

Plan

6.1	Théorèmes de l'équilibre	149
6.2	Méthodologie de résolution	152
6.3	Équilibres particuliers	157
	Exercices d'application	164
	Exercices d'approfondissement	167
	Solutions des exercices	171

Introduction

Évaluer la puissance transmise par un mécanisme, dimensionner et choisir un composant, calculer les déformations induites par un chargement... Autant d'activités de bureau d'étude qui nécessitent la détermination d'actions mécaniques.

Ce chapitre expose les théorèmes utilisables en *statique*, lorsque l'on constate des situations d'équilibres, et pose bases, principes et méthodes pour une résolution efficace des problèmes de mécanique à partir d'un exemple très détaillé.

Prérequis

- Cinématique des solides indéformables ;
- Concept d'actions mécaniques, exposé au chapitre précédent ;
- Notion de résolution des systèmes d'équations linéaires.

Objectifs

- Comprendre un équilibre comme un mouvement particulier ;
- Différencier actions mécaniques extérieures et actions mécaniques intérieures ;
- Acquérir une méthode efficace de résolution des problèmes.

6.1 Théorèmes de l'équilibre

Notation

Pour tout ce chapitre :

- S est un solide indéformable ;
- Σ est un système matériel quelconque ;
- Rg représente un référentiel galiléen.

6.1.1

Équilibre – Statique

Définition

On appelle **équilibre** un mouvement nul.

Dans le cas d'un système matériel quelconque, un mouvement nul se traduit par un champ de vecteurs vitesses nul.

Dans le cas d'un solide indéformable, ce mouvement particulier est caractérisé par un torseur cinématique nul.

Définition

On appelle **statique** la branche de la mécanique qui s'intéresse aux états d'équilibre.

Le terme « statique des solides » est souvent employé, mais le lecteur est alors détourné de ce qui doit être sa seule préoccupation du moment, à savoir l'identification de mouvements. Ce n'est qu'en abordant ultérieurement la résistance des matériaux ou la fabrication d'une pièce qu'un solide est abordé avec profit hors de son contexte cinématique.

6.1.2

Repère galiléen



Pour le spécialiste des mécanismes, un repère lié à la terre convient souvent comme repère galiléen.

Un **repère galiléen** est le repère de référence en mécanique newtonienne. Il est supposé exister lors de l'énoncé du principe fondamental de la dynamique, mais on n'en connaît que des approximations plus ou moins fines. Ce sont les repères :

- héliocentrique, d'origine le centre du soleil et comportant trois directions d'étoiles ;
- géocentrique, d'origine le centre de la terre et comportant trois directions d'étoiles ;
- terrestre.

6.1.3

Système matériel



Un objet réel, par opposition à un objet imaginaire.

Définition

On appelle **système matériel** un ensemble d'objets réels.

Le plus petit objet du mécanicien est le point matériel, c'est-à-dire un volume solide suffisamment petit pour être modélisable par un point.

Un élément d'un système matériel est caractérisé par sa nature – liquide, solide, gazeuse, ... –, et par des grandeurs attachées à sa géométrie et à sa masse.

Le mécanicien a comme objet de référence le solide indéformable, avec en tout premier lieu celui qui sert de repère ! La distinction entre le solide S et un système Σ quelconque est faite pour distinguer les lois générales des expressions propres au solide indéformable.

6.1.4

Action mécanique extérieure – intérieure

Soit Σ un système matériel quelconque. On appelle $\bar{\Sigma}$, ce qui se lit « Σ barre », l'ensemble des éléments qui n'appartiennent pas à ce système :

- décrire un système Σ revient à détailler les éléments de ce système ;
- décrire $\bar{\Sigma}$ revient à lister les éléments extérieurs à ce système.

Remarque

Comme le reste de l'univers est grand, on reprend la notion de milieu environnant vue au chapitre I pour ne lister pour $\bar{\Sigma}$ que les éléments retenus comme ayant une influence sur le comportement de Σ .

Définitions

On appelle **action mécanique extérieure** à un système Σ une action mécanique posée d'un élément de $\bar{\Sigma}$ sur un des éléments de Σ .

On appelle **action mécanique intérieure** à un système Σ une action mécanique posée entre deux éléments de Σ .

Notation

Le tenseur des actions mécaniques extérieures à un système quelconque Σ est noté $\mathcal{F}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)$.

Exemple

Soit un système $\Sigma = \{i, k, m\}$ composé de trois objets. On retient comme milieu environnant $\bar{\Sigma} = \{1, 2, 3, 4\}$ quatre objets ou phénomènes :

- $(i \rightarrow k), (i \rightarrow m)$ sont des actions mécaniques intérieures à Σ ;
- $(2 \rightarrow i), (3 \rightarrow m)$ sont des actions mécaniques extérieures à Σ ;
- $(2 \rightarrow 3), (3 \rightarrow 4)$ ne rentrent dans aucune des deux catégories, ce sont des actions mécaniques qui ne concernent pas ce système Σ .

Le tenseur des actions mécaniques extérieures à Σ s'évalue par

$$\mathcal{F}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) = \sum_{j=1}^4 \mathcal{F}(j \rightarrow \Sigma)$$

6.1.5**Équilibre d'un système matériel quelconque**

Soit un système matériel Σ dont on constate ou on souhaite l'équilibre par rapport à un référentiel galiléen Rg .

Théorème

S'il existe un référentiel galiléen Rg dans lequel on constate ou on souhaite l'équilibre d'un système matériel Σ , alors le tenseur des actions mécaniques extérieures au système Σ est à chaque instant le tenseur nul.

$$\forall t, \forall P \quad \vec{V}(P, \Sigma / Rg) = \vec{0} \implies \forall t, \mathcal{F}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) = \mathcal{O} \quad (1)$$

6.1.6**Solide indéformable**

Soit un solide indéformable S dont on constate ou on souhaite l'équilibre dans un référentiel galiléen.

Théorème

S'il existe un référentiel galiléen Rg dans lequel on constate ou on souhaite l'équilibre d'un solide indéformable S , alors le tenseur des actions mécaniques extérieures au solide S est à chaque instant le tenseur nul.

$$\forall t, \forall \mathcal{V}(S / Rg) = \mathcal{O} \implies \forall t, \mathcal{F}(\bar{S} \rightarrow S) = \mathcal{O} \quad (2)$$



La compréhension du sens de l'implication est fondamentale... C'est parce qu'il y a équilibre que le tenseur des actions mécaniques extérieures est nul !



C'est la même implication !

6.1.7



L'équilibrage d'un solide en rotation est étudié en seconde année. On admet ici qu'il tourne sans générer de vibration.

Réciproque

La réciproque des théorèmes de l'équilibre est fautive. Un solide S parfaitement équilibré, entretenu par un moteur en rotation uniforme dans un repère galiléen R_g , admet un torseur des actions mécaniques extérieures nul alors que le torseur cinématique $\mathcal{V}(S/R_g)$ n'est pas le torseur nul.

Une seule proposition peut être énoncée : elle concerne tous les systèmes matériels, solides ou quelconques.

Proposition

Si, à chaque instant, le torseur des actions mécaniques extérieures de toute partie d'un système matériel Σ est le torseur nul, alors il existe un référentiel galiléen dans lequel ce système matériel Σ est en équilibre.

$$\forall t, \forall \Sigma_i \subset \Sigma, \mathcal{F}(\bar{\Sigma}_i \rightarrow \Sigma_i) = \mathcal{O} \implies \exists R_g \mid \forall t, \forall P, \vec{V}(P, \Sigma/R_g) = \vec{0} \quad (3)$$

Cette proposition est dans les faits peu exploitable, car la nullité du torseur des actions mécaniques extérieures doit être vérifiée quelle que soit la partie incluse...

6.2 Méthodologie de résolution

6.2.1



Les compétences acquises en cinématique donnent les clés de l'efficacité...

Les différentes étapes

Résoudre un problème de statique se fait en plusieurs étapes :

- lecture et décodage.
Les auteurs constatent que l'étudiant moderne a tendance à *zapper* cette étape. Il n'est pas besoin d'être expert pour constater rétrospectivement que les principales difficultés rencontrées sont issues de défaillances lors de cette première étape.
- inventaire du milieu environnant.
En complément de la compréhension du mécanisme étudié, il s'agit à cette étape de faire la recherche exhaustive de tous les éléments extérieurs au système qui sont en relation avec lui. Le résultat de cette recherche est la liste des objets et des phénomènes dont il faut tenir compte lors de l'étude, sans chercher à ce stade à modéliser de manière systématique les actions mécaniques induites !
- décompte du nombre d'inconnues d'action mécanique et du nombre d'équations que l'on a à disposition.

Ces dénombrements ont pour objectifs :

- de se faire une opinion sur la faisabilité de la résolution ;
- de localiser les inconnues recherchées, bien sûr, mais surtout de dénombrer les inconnues que l'on souhaite éviter pour accélérer la résolution.

- mise en place d'une stratégie de résolution ;

Cette étape est complexe, au sens du premier chapitre où la *solution* n'est pas unique !

- modélisation des actions mécaniques utiles à la résolution ;
- résolution effective.



En fonction de son niveau de difficulté, un énoncé de problème donne plus ou moins de coups de pouce lors de l'une ou l'autre des étapes.

6.2.2

Anticiper un résultat



Une condition apparaît indispensable avant de commencer : il est nécessaire de connaître suffisamment les liaisons usuelles pour pouvoir imaginer immédiatement la forme du torseur des actions mécaniques transmissibles !

Pour arriver à mettre en place une stratégie de résolution de manière efficace, il est nécessaire d'arriver à anticiper le résultat d'un calcul vectoriel, notamment de prévoir si une composante va apparaître ou non lors de telle ou telle équation scalaire issue d'un équilibre.

Le travail d'imagination à mener est exposé sur un exemple. On suppose étudier l'équilibre d'un solide 2 par rapport à 1 et on s'intéresse à la contribution des actions mécaniques transmissibles par une liaison pivot d'axe (B, \vec{z}_2) entre deux solides 2 et 3.

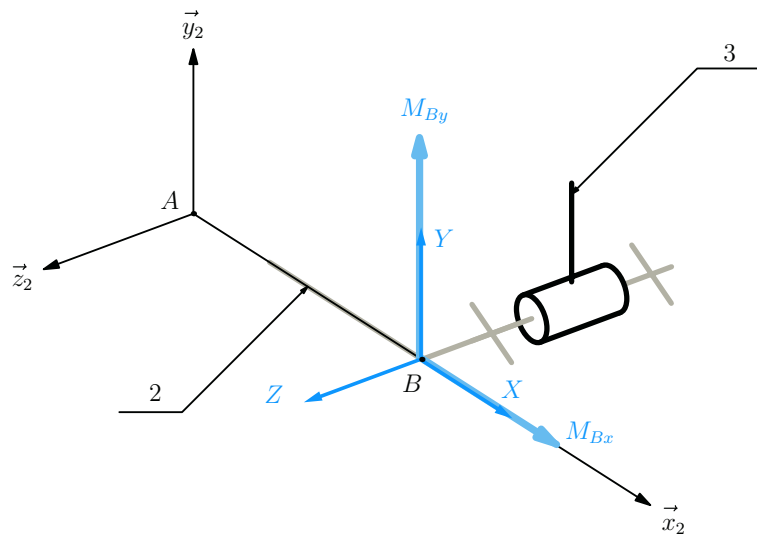


Figure 6.1 Les composantes dessinées au point B.

La résultante transmissible $\vec{R}(3 \rightarrow 2)$ est quelconque, le moment $\vec{M}(B, 3 \rightarrow 2)$ n'a pas de composante suivant \vec{z}_2 et on pose

$$\begin{aligned} \vec{R}(3 \rightarrow 2) \cdot \vec{x}_2 &= X & \vec{M}(B, 3 \rightarrow 2) \cdot \vec{x}_2 &= M_{Bx} \\ \vec{R}(3 \rightarrow 2) \cdot \vec{y}_2 &= Y & \vec{M}(B, 3 \rightarrow 2) \cdot \vec{y}_2 &= M_{By} \\ \vec{R}(3 \rightarrow 2) \cdot \vec{z}_2 &= Z \end{aligned}$$

Ces composantes sont dessinées issues du point B sur la figure ci-dessus. On ajoute un point A défini par $\vec{AB} = L\vec{x}_2$.

On rappelle la formule de changement de points pour calculer le moment de l'action mécanique $(3 \rightarrow 2)$ au point A

$$\vec{M}(A, 3 \rightarrow 2) = \vec{M}(B, 3 \rightarrow 2) + \vec{R}(3 \rightarrow 2) \wedge \vec{BA}$$

Si ce calcul est mené avec les composantes posées, on obtient

$$\begin{aligned} \vec{M}(A, 3 \rightarrow 2) \cdot \vec{x}_2 &= M_{Bx} \\ \vec{M}(A, 3 \rightarrow 2) \cdot \vec{y}_2 &= M_{By} - LZ \\ \vec{M}(A, 3 \rightarrow 2) \cdot \vec{z}_2 &= +LY \end{aligned}$$

On oublie provisoirement ce résultat et on regarde la figure. Trois propositions peuvent être formulées :

- la composante Z tend à faire tourner 2 autour de la droite (A, \vec{y}_2) dans le sens négatif, ce qui est confirmé par le calcul.

$$L\vec{x}_2 \wedge Z\vec{z}_2 = -LZ\vec{y}_2$$



Anticiper un calcul vectoriel revient à remplacer le calcul par un travail d'imagination de mouvements !

- la composante Y tend à faire tourner 2 autour de la droite (A, \vec{z}_2) dans le sens positif

$$L\vec{x}_2 \wedge Y\vec{y}_2 = +LY\vec{z}_2$$

- la droite (B, \vec{x}_2) passe par le point A. La composante X ne provoque aucune rotation autour du point A

$$L\vec{x}_2 \wedge X\vec{x}_2 = \vec{0}$$

Ce travail d'imagination est utile pour savoir quelles inconnues scalaires fait intervenir telle ou telle équation. On termine ainsi l'exemple précédent avec les six propositions concernant l'influence des composantes transmissibles par la liaison pivot entre 2 et 3 sur l'équilibre de 2/1

- l'équation de résultante scalaire \vec{x}_2 fait intervenir X , et uniquement X ;
- l'équation de résultante scalaire \vec{y}_2 contient Y ;
- l'équation de résultante scalaire \vec{z}_2 contient Z ;
- l'équation de moment au point A scalaire \vec{x}_2 contient M_{Bx} ;
- l'équation de moment au point A scalaire \vec{y}_2 fait intervenir M_{By} et Z ;
- l'équation de moment au point A scalaire \vec{z}_2 ne fait intervenir que Y ;

Ces six propositions sont bien évidemment complétées par une septième

- l'équation de moment au point B scalaire \vec{z}_2 évite les cinq inconnues scalaires de la liaison pivot.

6.2.3 Mise en œuvre sur un exemple détaillé

On se propose d'illustrer une stratégie de résolution à partir d'un exemple représentatif.

On considère l'élévateur présenté sur la figure ci-dessous. Son architecture s'appuie sur un parallélogramme déformable. Il comprend :

- un bâti noté 1 auquel on associe un repère $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et on pose $\vec{OC} = L\vec{x}_1$;
- un bras motorisé 2, en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_1) avec le bâti 1. On lui associe un

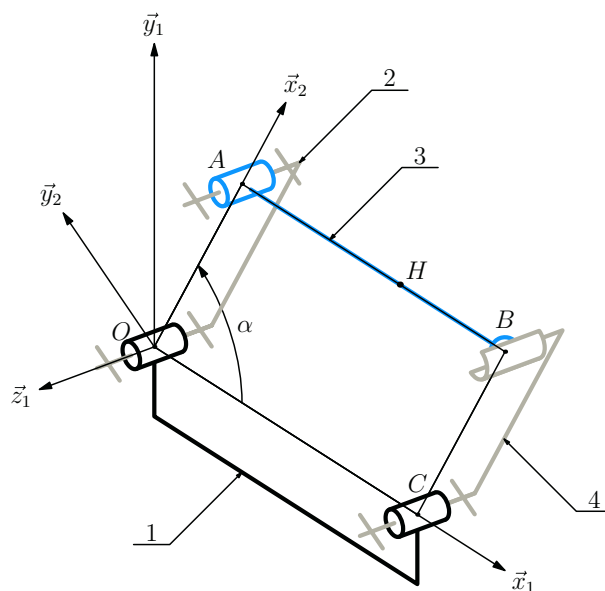


Figure 6.2 Schéma cinématique de l'élévateur.

repère $(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ en prenant soin de confondre les vecteurs \vec{z}_2 et \vec{z}_1 et on pose d'une part $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$, d'autre part $\vec{OA} = R\vec{x}_2$;

- une plateforme 3 sur laquelle est posée la charge. Cette plateforme est en liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_2) avec le bras motorisé 1. On pose $\vec{AB} = L\vec{x}_1$ et $\vec{AH} = \lambda\vec{x}_1$.
- une jambe 4 de même longueur que le bras 2, en liaison pivot d'axe (C, \vec{z}_1) avec le bâti et en liaison sphère-cylindre de centre B_3 et d'axe (B_4, \vec{z}_4) avec la plateforme 3.

Concernant la modélisation des actions mécaniques, on considère les hypothèses suivantes :

- l'action de la charge sur la plateforme est modélisée par un glisseur d'axe central la droite (H, \vec{y}_1) ;

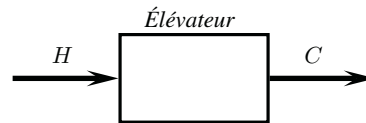
$$\mathcal{F}(c \rightarrow 3) = \begin{Bmatrix} -H\vec{y}_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- l'action du moteur sur le bras motorisé est modélisée par un couple ;

$$\mathcal{F}(m \rightarrow 2) = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C\vec{z}_1 \end{Bmatrix}$$

- les poids des différentes pièces sont négligés devant l'intensité de la charge supportée ;
- les liaisons sont toutes supposées sans frottement.

En vue de dimensionner l'actionneur, on souhaite établir la relation entre le couple moteur C et la charge H lors d'une configuration d'équilibre.



Lecture et décodage

Avant d'entrer dans le vif du sujet, il n'est jamais inutile de détailler le contenu d'un **énoncé**, qui comporte :

- un titre, souvent un terme spécialisé ou une marque commerciale ;
- une description fonctionnelle, accompagnée de figures et d'images ;
- une description structurelle, accompagnée de schémas ;
- un jeu d'hypothèses en général simplificatrices ;
- une ou plusieurs questions dans le cadre d'une problématique.



L'incompréhension d'un titre est fréquente, et la description fonctionnelle est là pour expliquer...



C'est le temps investi lors de cette étape qui élève le niveau d'efficacité lors de la résolution !

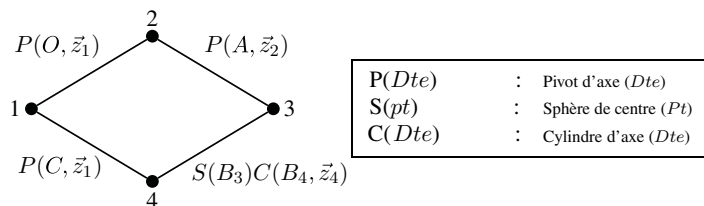


Figure 6.3 Graphe des liaisons de l'élévateur.



Ne sont pas retenues dans ce cas les influences de la pesanteur et de l'air...



On extrait donc de l'ensemble des dix huit équations un système de trois équations à quatre inconnues !



Si ces propositions apparaissent bien mystérieuses, il faut revenir à la section précédente, et ne pas hésiter à refaire schémas et graphes...

Après le constat des éléments présents ou absents peut débiter l'analyse du mécanisme. Ce mécanisme comporte une chaîne fermée de solides, comprenant quatre pièces et quatre liaisons, ce que résume le graphe des liaisons.

Inventaire du milieu environnant

Avec les hypothèses de l'énoncé, on retient pour le milieu environnant :

- la charge ;
- le moteur.

Décompte des nombres d'inconnues de liaison et d'équations

Que ce soit du point de vue de la cinématique ou des actions mécaniques, il est nécessaire de parcourir la chaîne fermée pour résoudre le problème. Si on considère le bâti 1 comme repère galiléen, trois équilibres sont à écrire pour la résolution : ce serait par exemple de manière systématique les équilibres 2/1, 3/1 et 4/1.

Ces trois équilibres donnent 18 équations scalaires.

La chaîne fermée comporte trois liaisons pivot et une liaison sphère-cylindre, donc admet 17 inconnues d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons supposées sans frottement.

Au bilan, la résolution semble possible avec un système de 18 équations pour 19 inconnues ! À la condition que le rang de ce système de 18 équations soit égal à 18, on peut déterminer les 17 inconnues de liaison et le couple moteur C en fonction de la charge H , cette dernière inconnue devenant paramètre une fois basculée dans le second membre.

Stratégie de résolution

De nombreuses possibilités de résolution existent. L'analyse préliminaire permet de borner ces possibilités :

- au minimum, trois équilibres sont à envisager, on ne peut donc probablement pas descendre en dessous de trois équations scalaires à écrire ;
- au maximum, l'écriture systématique de toutes les dix-huit équations doit donner la solution.

Dans l'hypothèse où on arrive à résoudre avec trois équations scalaires, cela signifie que l'on détermine deux inconnues de liaison et le couple moteur C en fonction de la charge H .

C'est ainsi que l'on peut décider de garder pour ces deux inconnues celles de la liaison sphère-cylindre. En conséquence, la stratégie est alors de chercher à éviter les quinze inconnues des trois liaisons pivot, et les trois équations scalaires à écrire sont alors :

- équilibre de 4 par rapport à 1 et écriture de l'équation de moment au point C scalaire \vec{z}_1 pour éviter les cinq inconnues de la liaison pivot entre 1 et 4 ;
- équilibre de 3 par rapport à 1 et écriture de l'équation de moment au point A scalaire \vec{z}_3 pour éviter les cinq inconnues de la liaison pivot entre 2 et 3 ;
- équilibre de l'ensemble $\{2,3\}$ par rapport à 1 et écriture de l'équation de moment au point O scalaire \vec{z}_1 pour éviter les cinq inconnues de la liaison pivot entre 1 et 2.

Arriver en autonomie à ces propositions est un des objectifs. Pour aider à y parvenir, le tableau (6.4) propose les différentes combinaisons de solides possibles lors des choix d'équilibre, dénombre en deuxième colonne les inconnues scalaires de liaison et liste en dernière colonne les inconnues scalaires d'actions mécaniques supplémentaires.



Un tel tableau n'est pas à produire de manière systématique. Il résume néanmoins les pensées du mécanicien qui balaie mentalement l'ensemble des possibilités...



L'exploit est remarquable, et l'intérêt est de le remarquer, mais il n'y a hélas pas de médaille...



Le premier exercice d'application permet de poursuivre la réflexion sur cet exemple ! Et de résoudre...

Équilibre	Nb. inc. liaison	Inc. autres
2/1	10	C
3/1	7	H
4/1	7	
{2, 3}/1	7	C, H
{2, 4}/1	17	C, H
{3, 4}/1	10	H
{2, 3, 4}/1	10	C, H

Figure 6.4 Les différents équilibres envisageables.

L'observation de ce tableau invite aux réflexions suivantes :

- l'étude de l'équilibre de l'ensemble {2, 4}/1 est possible et permet de faire intervenir toutes les inconnues du problème dans six équations. On se garde bien de poursuivre.
- la stratégie proposée s'appuie sur les trois lignes où apparaissent sept inconnues de liaison, à savoir à chaque fois les deux inconnues de la liaison sphère plan et cinq inconnues scalaires des différentes liaisons pivots.
- l'équilibre de 4 par rapport à 1 est particulier et mérite d'être repéré : il ne fait intervenir que deux éléments du milieu environnant.
- pour les lignes à dix inconnues de liaison, elles font intervenir deux liaisons pivot d'axes parallèles, et il est donc possible dans ce cas de proposer une équation scalaire évitant huit des dix inconnues.

6.3 Équilibres particuliers

6.3.1 Résolutions triviales

Système soumis à l'action de deux glisseurs

Théorème

Si un système Σ est en équilibre dans un référentiel galiléen sous l'action de deux glisseurs, alors ces deux glisseurs sont opposés.

Le résultat se généralise à tout équilibre ne faisant intervenir que deux éléments du milieu environnant.

Théorème

Si un système Σ est en équilibre dans un référentiel galiléen sous les actions issues de deux éléments, alors les deux torseurs d'actions mécaniques correspondants sont opposés.

Exemple Poutre encastrée

On considère une poutre 2 de longueur L encastrée à une de ses extrémités dans un bâti 1 :

- on associe au bâti 1 un repère $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$;
- la poutre 2 reste immobile au cours du temps par rapport au bâti 1 et on pose $\vec{AB} = L\vec{y}_1$.



Le sens de l'implication est fondamental, la réciproque est fautive !

Une charge c est accrochée à l'extrémité B de la poutre et on modélise l'action de cette charge par une force au point B définie par $\vec{F}(c \rightarrow 2) = -F\vec{z}_1$.

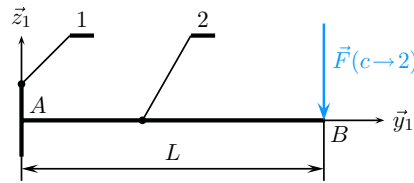


Figure 6.5 Une poutre encastrée à une de ses extrémités.

Un seul équilibre est à étudier, celui de 2 par rapport à 1 supposé galiléen. L'inventaire du milieu environnant permet de ne retenir que les deux éléments principaux :

- la charge c ;
- le bâti 1.

On dénombre six inconnues de liaison issues de l'encastrement de 2 sur 1 et la charge F pour six équations qu'il n'est pas utile d'écrire. En effet, la résolution est immédiate

$$\mathcal{F}(1 \rightarrow 2) = -\mathcal{F}(c \rightarrow 2)$$

Il n'est besoin que de préciser le glisseur $\mathcal{F}(c \rightarrow 2)$ pour détailler $\mathcal{F}(1 \rightarrow 2)$

$$\mathcal{F}(c \rightarrow 2) = \underset{B}{\left\{ \begin{array}{c} -F\vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}} \quad \mathcal{F}(1 \rightarrow 2) = \underset{B}{\left\{ \begin{array}{c} F\vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$$

Le point A sur le schéma est symbolique, et y calculer les éléments de réduction ne présente aucun intérêt à ce stade.

Système soumis à l'action de trois glisseurs

Théorème

Soit un système quelconque soumis à l'action de trois glisseurs.

Si ce système est en équilibre dans un référentiel galiléen, alors les trois axes centraux des glisseurs sont coplanaires, et sont de plus soit parallèles, soit concourants.

Ce théorème est utile lors de résolution graphique

Exemple

On utilise en exemple la démonstration du théorème. Soit un système Σ en équilibre dans un référentiel galiléen soumis à l'action de trois glisseurs $\mathcal{F}(1 \rightarrow \Sigma)$, $\mathcal{F}(2 \rightarrow \Sigma)$ et $\mathcal{F}(3 \rightarrow \Sigma)$. On pose

$$\mathcal{F}(1 \rightarrow \Sigma) = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}} \quad \mathcal{F}(2 \rightarrow \Sigma) = \underset{B}{\left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_2 \\ \vec{0} \end{array} \right\}} \quad \mathcal{F}(3 \rightarrow \Sigma) = \underset{C}{\left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_3 \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$$

Les lois de l'équilibre annoncent $\mathcal{F}(\vec{\Sigma} \rightarrow \Sigma) = \mathcal{O}$, équation qui se détaille par

$$\mathcal{F}(1 \rightarrow \Sigma) + \mathcal{F}(2 \rightarrow \Sigma) + \mathcal{F}(3 \rightarrow \Sigma) = \mathcal{O}$$



Concourants signifie sécants en un même point.

L'équation de moment au point A pour éviter \vec{R}_1 , scalaire \vec{AB} pour éviter \vec{R}_2 , donne un produit mixte nul $(\vec{R}_3, \vec{AC}, \vec{AB}) = 0$

On suppose les trois points A , B et C non alignés et on en déduit que le vecteur \vec{R}_3 peut être exprimé comme une combinaison linéaire des deux autres vecteurs et qu'il est donc dans le plan (\vec{AC}, \vec{AB}) .

Ce raisonnement est recommencé deux fois pour montrer que les deux autres résultantes \vec{R}_1 et \vec{R}_2 sont également dans le plan (\vec{AC}, \vec{AB}) . Les trois axes centraux sont ainsi nécessairement coplanaires, dans le plan (ABC) .

Soit de plus I le point d'intersection des droites (A, \vec{R}_1) et (B, \vec{R}_2) . L'équation de moment en ce point donne $\vec{R}_3 \wedge \vec{CI} = \vec{0}$

La résultante \vec{R}_3 est nécessairement colinéaire au vecteur \vec{CI} et les trois axes centraux sont bien concourants, ou parallèles dans le cas où le point I est rejeté à l'infini.

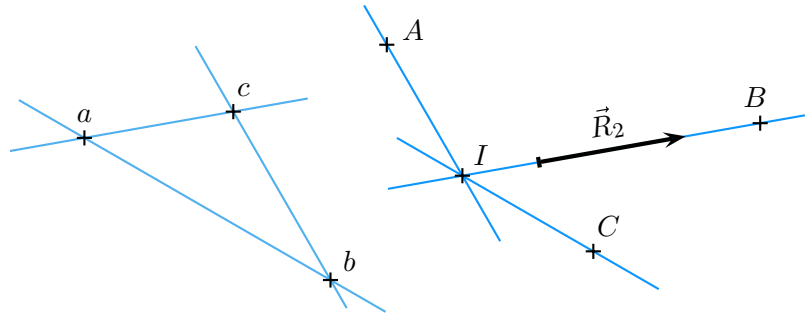


Figure 6.6 Construction graphique dans le plan (ABC) .

Les constructions de la figure ci-dessus illustrent le résultat et méritent d'être refaites dans un ordre logique, à partir de la situation de départ suivante :

- on pose les trois points A , B et C , non alignés ;
- on suppose connue la résultante \vec{R}_2 et on propose une longueur de 20 mm pour $\|\vec{R}_2\|$;
- on suppose connue la direction de l'axe central de $\mathcal{F}(1 \rightarrow \Sigma)$, que l'on trace à partir du point A .

À partir de là, la construction se fait en deux étapes :

- (1) sur la figure géométrique amorcée, la nécessaire concourance des trois axes centraux permet d'identifier le point d'intersection I et de tracer la droite CI .
- (2) il reste maintenant à exploiter l'équation de résultante $\vec{R}_1 + \vec{R}_2 + \vec{R}_3 = \vec{0}$ dans un plan pour lequel on pose une « échelle des forces »
 - on trace une parallèle à la droite (IB) sur laquelle on pose un segment $[ac]$ de 20 mm ;
 - on trace issue du point a une parallèle à la droite (IC) ;
 - on trace issue du point c une parallèle à la droite (IA) et on identifie le point d'intersection b ;



Sur un énoncé, une échelle des longueurs est nécessaire pour respecter les positions relatives des différents éléments géométriques.

- comme on a posé $\vec{R}_2 = \vec{ac}$, on en déduit $\vec{cb} = \vec{R}_1$ et $\vec{ba} = \vec{R}_3$;
- on mesure environ 25,5 mm pour $\|\vec{R}_1\|$, environ 37,5 mm pour $\|\vec{R}_3\|$ et ces longueurs restent à convertir.

6.3.2 L'arc-boutement

Un tiroir qui bloque, un serre-joint qui serre. Voici deux nouveaux exemples de manifestation du phénomène de frottement, néfaste dans le premier cas, utile dans le second !

Un premier mot s'impose pour décrire ces équilibres particuliers : l'arc-boutement.

Définition

On appelle **arc-boutement** le phénomène issu du frottement pour lequel un équilibre subsiste indépendamment de l'intensité d'un effort qui tend à le rompre.

Autrement dit, si un équilibre est possible, il se réalise et dans le cas de l'arc-boutement, tout effort dépensé pour une mise en mouvement n'est pas suivi d'effet. On illustre ce phénomène avec l'exemple d'un serre-joint présenté sur la figure ci-dessous, sur lequel on peut distinguer quatre ensembles :

- un mors fixe repéré 1, que l'on prend comme référence ;
- une tige repérée 2, encastrée sur le mors fixe 1 ;
- un mors mobile repéré 3, dessiné en filigrane, qui peut coulisser le long de la tige 2 en l'absence de serrage ;
- les pièces à serrer, prises entre les deux mors.

Le contact entre la tige 2 et le mors mobile 3 est caractérisé par un coefficient de frottement f .

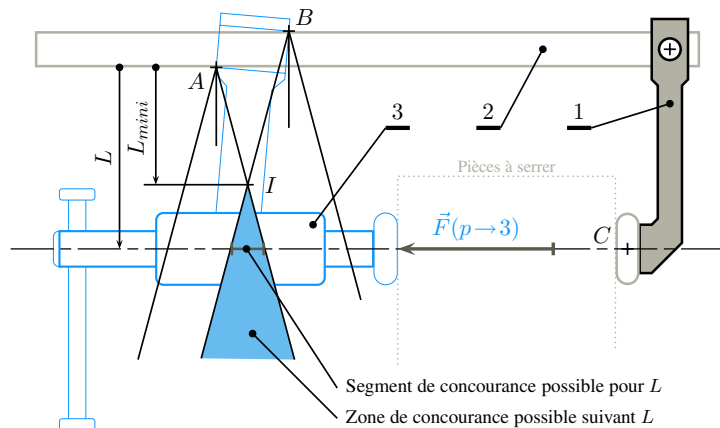


Figure 6.7 Modélisation d'un serre-joint.

Lors du serrage, le mors mobile peut légèrement basculer par rapport à la tige et le contact se fait en deux points nommés A et B. Trois actions mécaniques extérieures à 3 sont retenues pour caractériser son équilibre constaté par rapport à l'ensemble {1,2} que l'on considère comme galliléen :

- l'action des pièces à serrer, modélisée par un glisseur $\mathcal{F}(p \rightarrow 3)$;
- l'action de la tige sur 3 au point A, modélisée par un glisseur $\mathcal{F}(2_A \rightarrow 3)$ d'axe central la droite $(A, \vec{R}(2_A \rightarrow 3))$;



En l'absence de frottement, il ne peut y avoir arc-boutement.



Le cône de frottement est de demi angle au sommet φ tel que $\tan \varphi = f$.

6.3.3 Le coincement

Le phénomène de coincement s'appuie sur les mêmes bases que le phénomène d'arc-boutement. Mais alors que l'arc-boutement disparaît dès la fin de l'effort qui tend à rompre l'équilibre, le coincement subsiste.

Définition

On appelle **coincement** le phénomène issu du frottement pour lequel un équilibre persiste sous des actions mécaniques indéterminées alors même que la cause de l'équilibre a disparu.



En l'absence de frottement, il ne peut y avoir coincement.

Autrement dit, il faut dépenser de l'énergie pour « décoincer » un objet coincé, opération inutile pour l'arc-boutement.

On illustre ce phénomène avec l'exemple d'un poussoir présenté sur la figure ci-dessous. Ce mécanisme est conçu pour bloquer des pièces sur un bâti et comporte trois ensembles :

- un bâti repéré 1 supposé galiléen, auquel on associe une base vectorielle $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$;
- un coin 2, en liaison glissière de direction \vec{z}_1 avec le bâti 1. On lui associe une base vectorielle $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ confondue avec celle du bâti et une base vectorielle $(\vec{x}_2, \vec{v}_2, \vec{w}_2)$ en posant $\alpha = (\vec{y}_2, \vec{v}_2)$. Sur ce coin est fabriqué un plan de normale \vec{v}_2 et on appelle A un point de ce plan.
- un poussoir repéré 3, en liaison glissière de direction \vec{y}_1 avec le bâti 1. Sur ce poussoir est fabriquée une calotte sphérique de centre C . Elle est en contact avec le plan du coin 2 en un point I , contact caractérisé par un coefficient de frottement f .

Concernant les actions mécaniques à modéliser :

- Un vérin déplace le coin 2 suivant \vec{z}_1 par rapport au bâti, et on pose

$$\mathcal{F}(v \rightarrow 2) = {}_A \begin{Bmatrix} F_{v2\vec{z}_1} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- Le poussoir se déplace suivant \vec{y}_1 par rapport au bâti jusqu'à être en butée contre la pièce à bloquer, et l'action mécanique de cette dernière sur le poussoir est représentée par un torseur quelconque $\mathcal{F}(p \rightarrow 3)$.
- Les actions de la pesanteur sont négligées devant les autres actions mécaniques.

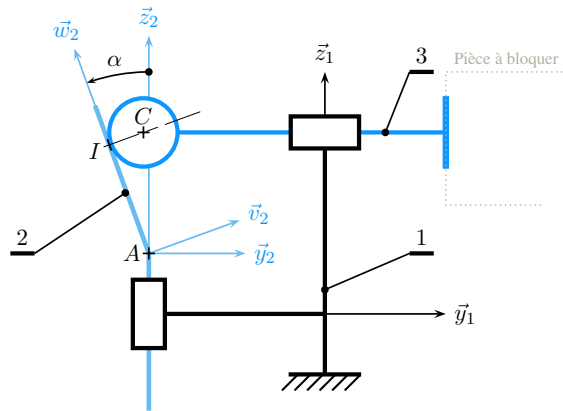


Figure 6.8 L'équilibre possible d'un coin en l'absence de poussée.

On s'intéresse à l'équilibre possible du coin 2 par rapport à 1 en l'absence de poussée du vérin, et les seules actions mécaniques extérieures à retenir sont issues :

- du bâti 1 ;
- du poussoir 3.

On pose alors

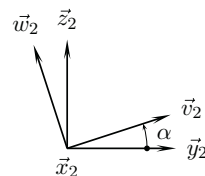
$$\mathcal{F}(3 \rightarrow 2) = \begin{cases} -N_{32}\vec{v}_2 + \vec{T}_{32}, & \text{avec } N_{32} \geq 0 \text{ et } \frac{\|\vec{T}_{32}\|}{|N_{32}|} \leq f \\ \vec{0} \end{cases}$$

On s'intéresse à l'équation de résultante scalaire \vec{z}_1 pour éviter les cinq inconnues de la liaison glissière et on obtient

$$(-N_{32}\vec{v}_2 + \vec{T}_{32}) \cdot \vec{z}_1 = 0 \quad (4)$$

Pour poursuivre le raisonnement, on suppose la composante de \vec{T}_{32} suivant \vec{x}_2 nulle et on pose $\vec{T}_{32} = T_{32}\vec{w}_2$. On trace la figure de définition de l'angle α pour effectuer les calculs de trigonométrie.

L'équation scalaire (4) s'écrit alors par :



$$\frac{T_{32}}{N_{32}} = \tan \alpha \quad (5)$$

Cette dernière équation permet de conclure quant aux possibilités d'équilibre :

- soit $\tan \alpha \leq f$, c'est-à-dire $\alpha \leq \varphi$, et l'équilibre est possible ;
- soit $\tan \alpha > f$, c'est-à-dire $\alpha > \varphi$, et l'égalité de l'équation (5) ne peut être satisfaite, l'équilibre du coin 2 par rapport au bâti 1 est alors impossible.



La première condition $N_{32} \geq 0$ traduit le contact unilatéral entre 2 et 3, la deuxième condition vient de l'application des lois du frottement dans le cas de l'adhérence.

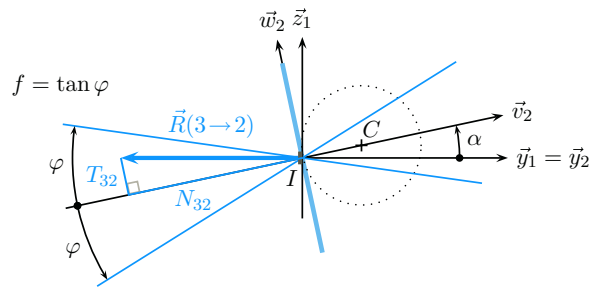


Figure 6.9 Configuration géométrique de coincement possible.

La résolution ne peut pas être menée plus loin, vu le trop grand nombre d'inconnues par rapport au nombre d'équations. En effet, le problème comporte 13 inconnues de liaison et 7 inconnues pour les actions du vérin et de la pièce à bloquer pour deux équilibres possibles, soit 12 équations scalaires.

Plusieurs remarques peuvent néanmoins être formulées :

- On arrive à montrer que l'équilibre de 2 par rapport à 1 est possible, mais on ne peut déterminer la valeur du module de la résultante $\|\vec{R}(3 \rightarrow 2)\|$ par les seules lois de l'équilibre.
- L'hypothèse que la composante tangentielle \vec{T}_{32} suivant \vec{x}_2 est nulle ne peut être vérifiée, même si elle reste plausible car le mécanisme n'autorise pas de glissement suivant cette direction. En conséquence, si l'on souhaite le coincement effectif de 2, il ne faut pas choisir l'angle α trop proche de l'angle φ .
- La composante normale N_{32} est positive, l'équation (5) donne alors une composante T_{32} également positive.

On en déduit qu'en l'absence de frottement, une vitesse de glissement apparaîtrait au point I , caractérisée par le vecteur $\vec{V}(I, 2/3)$ suivant $-\vec{w}_2$, car opposée au vecteur \vec{T}_{32} . L'action de 3 sur 2 provoquerait le déplacement de 2 par rapport à 1 suivant $-\vec{z}_1$.

Synthèse

Savoirs

Je sais définir les mots ou expressions :

- équilibre ;
- repère galiléen ;
- système matériel ;
- actions mécaniques extérieures, intérieures ;
- arc-boutement, coincement.

Je connais :

- le théorème de l'équilibre pour un solide indéformable ;
- le théorème de l'équilibre pour un système matériel quelconque ;
- la réciproque du théorème de l'équilibre ;
- le contenu type d'un énoncé.

Savoir-faire

Je sais

- faire un inventaire exhaustif du milieu environnant, en ne nommant que des objets ou des phénomènes ;
- proposer des modèles d'actions mécaniques pour les liaisons usuelles ;
- compter le nombre d'inconnues d'un problème ;
- identifier un système soumis à l'action de deux glisseurs, de trois glisseurs.

Exercices d'application

6.1 Table élévatrice

À partir de l'exemple de la table élévatrice présentée sur la figure 6.2 à la page ??, on se propose de rechercher d'autres stratégies de résolution.

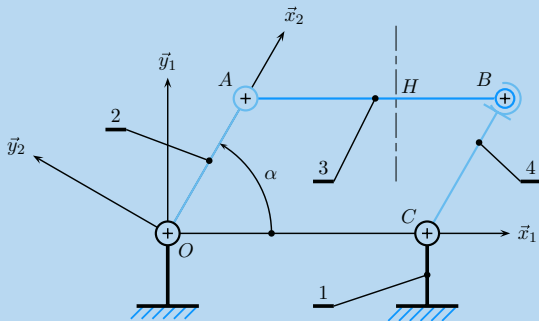


Schéma plan de l'élévateur.

Le lecteur est invité à reprendre la description des pages ? à ??.

1. Quelle stratégie de résolution permet d'éviter :

- les cinq inconnues de la liaison pivot entre 2 et 1 ;
- les cinq inconnues de la liaison pivot entre 3 et 2 ;
- les deux inconnues de la liaison sphère cylindre entre 4 et 3 ;
- trois des cinq inconnues scalaires de la liaison pivot entre 4 et 1.

2. Un étudiant propose :

- équilibre de 3 par rapport à 1 : équation de résultante scalaire \vec{y}_1 pour avoir H ;
- équilibre de 2 par rapport à 1 : équation de moment en O scalaire \vec{z}_1 pour avoir C ;

Combien d'inconnues de liaisons fait-il intervenir ? A-t-il des chances de résoudre avec une troisième équation ? Proposer une ou plusieurs équations complémentaires ?

3. Avec une stratégie à choisir, déterminer la relation recherchée $C = f(H)$.

6.2 Couple moteur, couple résistant ?

On se propose de définir les deux termes « couple moteur » et « couple résistant » à partir de la description d'un moteur électrique.

Un moteur électrique est constitué principalement de quatre pièces :

- un carter repéré 1 ;
- un arbre repéré 2, en contact avec le carter par l'intermédiaire de deux roulements à billes 3 et 4 ;
- un rotor r solidaire de l'arbre ;
- un stator s solidaire du carter.

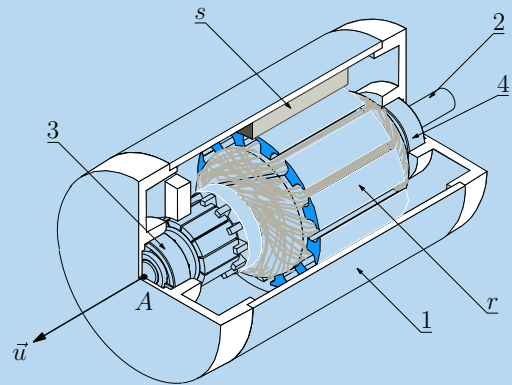


Schéma simplifié d'un moteur électrique.

On suppose le moteur en situation, entraînant une charge en rotation. On modélise l'action de cette charge sur l'arbre par un torseur $\mathcal{F}(c \rightarrow 2)$ indéterminé.

1. Tracer le graphe des liaisons, et proposer un modèle de comportement pour le contact entre l'arbre 2 et le carter 1.

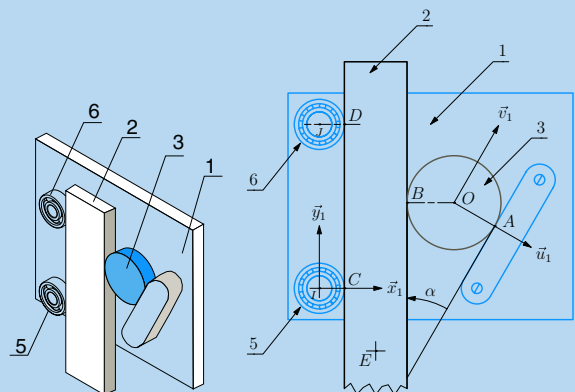
2. Faire l'inventaire des actions mécaniques qui s'exercent sur l'arbre 2.

3. L'arbre est supposé parfaitement équilibré et en rotation uniforme par rapport au carter, ce qui permet de lui appliquer les lois de l'équilibre. Quel est l'intérêt d'écrire l'équation de moment au point A scalaire \vec{u} ?

4. En exploitant l'équation précédente, proposer une définition d'un couple moteur Cm , d'un couple résistant Cr .

6.3 Dispositif autobloquant

On considère le mécanisme autobloquant représenté sur la figure ci-dessous



Dispositif autobloquant.

Ce mécanisme comprend trois ensembles :

- une plaque plane 1 que l'on oriente en posant \vec{z}_1 orthogonal au plan. Sur cette plaque est fixée une rampe et sont montés deux roulements à billes dont les bagues extérieures 5 et 6 sont avec la plaque en liaison pivot respectivement d'axes (I, \vec{z}_1) et (J, \vec{z}_1) . On pose \vec{y}_1 orientant la droite joignant les centres géométriques des deux roulements et la base vectorielle $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est ainsi définie. On associe à la plaque une deuxième base vectorielle $(\vec{u}_1, \vec{v}_1, \vec{z}_1)$ en orientant le vecteur \vec{u}_1 suivant la normale à la rampe et on pose $\alpha = (\vec{u}_1, \vec{x}_1)$;
- un barreau parallélépipédique 2 de centre géométrique E , en appui sur les roulements de la plaque 1 ;
- un galet mobile 3 cylindrique de révolution, de centre géométrique O , logé entre le barreau 2 et la rampe 1.

Ce mécanisme est dit « autobloquant » car on constate le phénomène remarquable suivant :

- on peut translater le barreau 2 par rapport à 1 suivant \vec{y}_1 ;
- on ne peut pas translater le barreau 2 par rapport à 1 suivant $-\vec{y}_1$, quelle que soit l'effort mis en œuvre pour cela.

Les contacts plans entre le barreau et la plaque, le galet et la plaque sont conservés à chaque instant et sont supposés sans frottement. On ne s'intéresse ainsi qu'aux trois degrés de liberté des mouvements dans le plan (\vec{x}_1, \vec{y}_1) et les différents contacts sont assimilés à des points :

- contact aux points C et D entre le barreau 2 et les roulements à billes 5 et 6 du plateau 1 ;
- contact au point B entre le barreau 2 et le galet 3 ;
- contact au point A entre le galet 3 et la rampe 1.

Concernant les actions mécaniques :

- le contact au point A est caractérisé par un coefficient de frottement f_{13} et on pose $\tan \varphi_{13} = f_{13}$;
- le contact au point B est caractérisé par un coefficient de frottement f_{23} et on pose $\tan \varphi_{23} = f_{23}$;
- les contacts aux points C et D sont caractérisés par un coefficient de frottement f ;
- les deux liaisons pivot sont supposées sans frottement ;
- les actions mécaniques de pesanteur sont négligées devant les actions mécaniques de contact ;
- le référentiel lié à la plaque est supposé galiléen ;
- l'action mécanique extérieure qui tend à déplacer le barreau 2 par rapport au bâti 1 est modélisée par un glisseur

$$\mathcal{F}(e \rightarrow 2) = \begin{cases} \pm F \vec{y}_1, & \text{avec } F > 0 \\ 0 \end{cases}$$

L'objectif de cette étude est de trouver les conditions géométriques sur l'angle α pour que le fonctionnement décrit soit possible, et de caractériser l'action mécanique entre le barreau 2 et le galet 3.

1. Tracer le graphe des liaisons et dénombrer les inconnues d'actions mécaniques.

Une étude systématique nécessite l'étude de quatre équilibres. En déduire le nombre d'équations scalaires à disposition et évaluer les chances de réussite pour la résolution du problème.

2. Par l'étude de l'équilibre du galet 5 par rapport à 1, montrer que le phénomène de frottement n'a pas d'influence sur l'action mécanique $\mathcal{F}(2 \rightarrow 5)$.

3. Étudier l'équilibre du galet 3 par rapport à la plaque 1 et déterminer les conditions sur l'angle α qui permettent le blocage du barreau.

4. On suppose l'effort de poussée suivant $-\vec{y}_1$, soit $\vec{R}(e \rightarrow 2) = -F \vec{y}_1$.

Déterminer la relation entre l'effort de poussée F et les actions s'appliquant au galet 3.

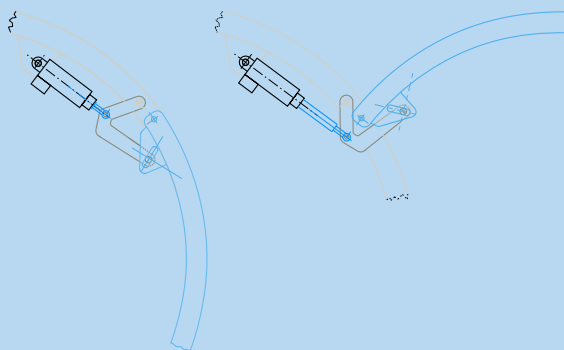
5. On suppose l'effort de poussée suivant \vec{y}_1 , soit $\vec{R}(e \rightarrow 2) = +F \vec{y}_1$.

L'équilibre du barreau 2 par rapport à la plaque 1 est-il possible ?

6. Comment peut-on appeler le phénomène mis à profit par ce dispositif ?

6.4 Porte cargo d'un ATR42

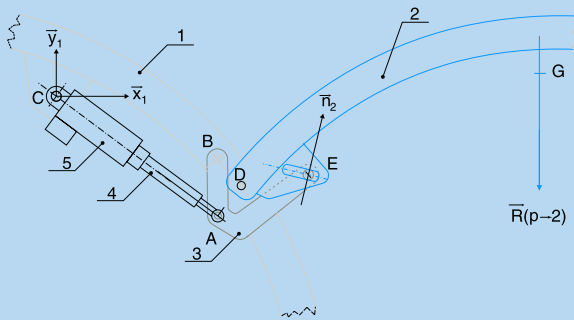
On se propose d'étudier le mécanisme de manœuvre de la porte cargo de l'avion ATR42. Les deux configurations extrêmes – porte ouverte et porte fermée – sont représentées sur la figure ci-dessous.



La porte d'accès à la soute à bagage.

Le mécanisme comporte cinq ensembles, repérés sur la figure suivante :

- Le fuselage de l'avion 1, auquel on associe un repère $(C, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$;
- la porte cargo 2, en liaison pivot d'axe (D, \vec{z}_1) avec le fuselage. Cette porte de masse $m_2 = 100 \text{ kg}$ admet le point G comme centre de gravité et comporte une rainure oblongue définissant la direction \vec{n}_2 ;
- une équerre 3, en liaison pivot d'axe (D, \vec{z}_1) avec le fuselage et en liaison sphère-plan de centre E et de normale \vec{n}_2 avec la porte cargo 2 ;



Paramétrage du mécanisme.

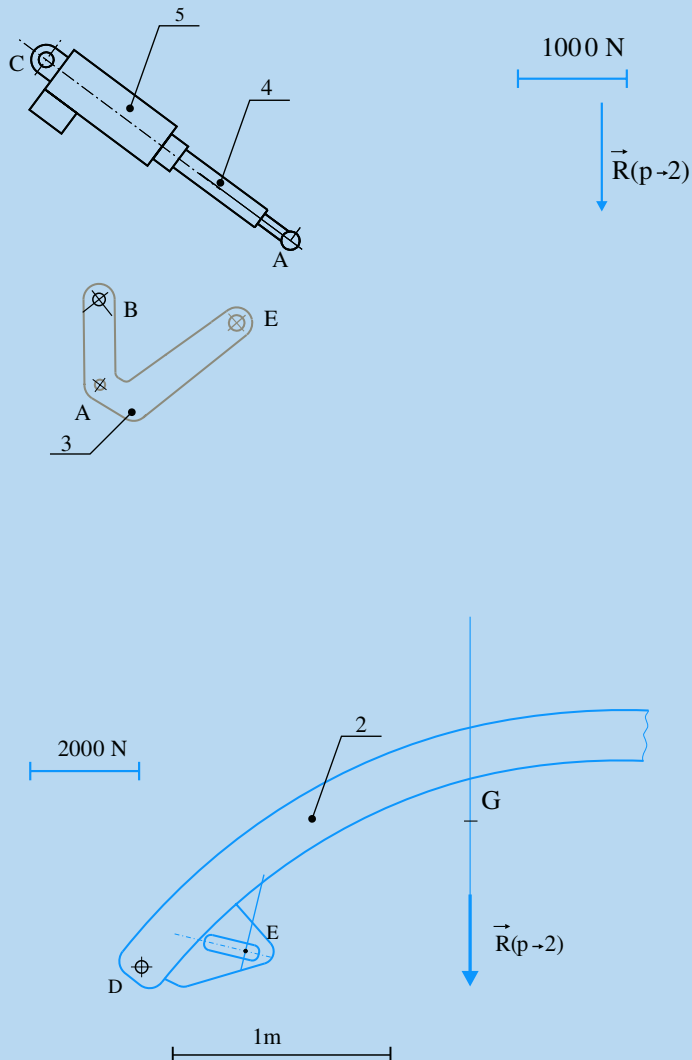
- un vérin, dont le corps 5 est en liaison sphérique de centre C avec le fuselage et dont la tige 4 est en liaison sphérique de centre A avec la bride 3, et en liaison pivot glissant d'axe (AC) avec le corps de vérin 5.

Concernant les actions mécaniques :

- le référentiel attaché au fuselage est assimilable à un référentiel galiléen ;
- la pesanteur est orientée par $-\vec{z}_1$ et on prend $g = 10 \text{ ms}^{-2}$;
- toutes les masses non citées sont négligées devant celle de la porte ;
- toutes les liaisons sont supposées sans frottement ;
- on se limite aux mouvements dans le plan (\vec{x}_1, \vec{y}_1) et les actions mécaniques sont ainsi toutes modélisables par des glisseurs dont les axes centraux sont dans le plan d'étude.

L'objectif de l'étude est de déterminer par une méthode graphique l'effort développé par le vérin dans la position porte ouverte de la figure ci-dessus. Toutes les dimensions utiles sont à relever sur la feuille réponse donnée ci-dessous, sur laquelle sont également données les échelles des forces à adopter.

Feuille pour les constructions graphiques



1. Sachant qu'une étude systématique de ce mécanisme requiert quatre équilibres, évaluer les chances de réussite lors de la résolution.
2. Quel intérêt y a-t-il à commencer par l'équilibre du vérin {4,5}/1 ?

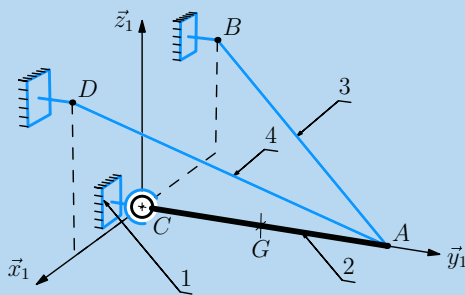
3. Étudier l'équilibre de la porte 2 par rapport au fuselage 1 et déterminer l'action mécanique exercée par l'équerre 3 sur la porte 2.
4. Étudier l'équilibre de l'équerre 3 par rapport au fuselage 1 et déterminer l'effort de poussée du vérin.

Exercices d'approfondissement

6.5 Poutrelle haubannée

On s'intéresse aux différentes possibilités de mise en place pour deux câbles qui supportent une poutrelle. Le dispositif étudié, schématisé sur la figure ci-dessous, est constitué de quatre ensembles :

- le bâti est repéré 1 et on lui associe le repère $(C, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, avec \vec{z}_1 orientant la verticale ascendante du lieu. On pose
 - $\vec{CB} = b\vec{x}_1 + d\vec{z}_1$
 - $\vec{CD} = c\vec{x}_1 + e\vec{z}_1$
- la poutrelle, repérée 2, est de masse m et de centre de masse G . Elle est supposée horizontale, immobile par rapport au bâti et on pose $\vec{CA} = a\vec{y}_1$. Elle est en liaison sphérique de centre C avec le bâti 1. La poutrelle est supposée homogène, on pose donc $\vec{CG} = \frac{1}{2}\vec{CA}$.
- un câble 3 sans masse, inextensible mais infiniment flexible, est accroché entre les points A et B .
- un câble 4 identique est accroché entre les points A et D .

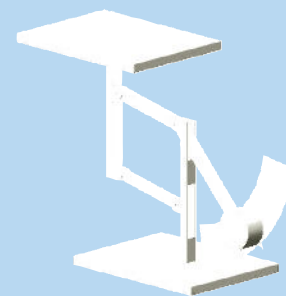
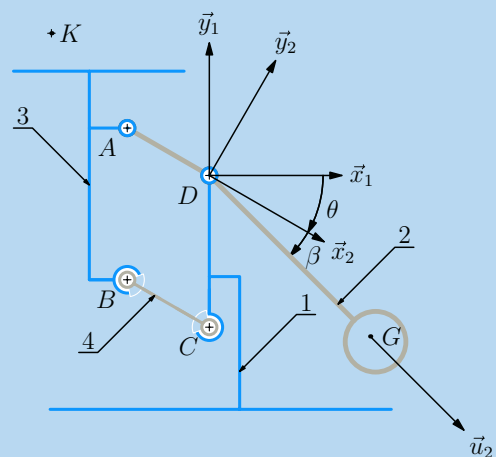


Une poutrelle haubannée.

1. Tracer le graphe des liaisons.
2. Détailler l'ensemble des actions mécaniques extérieures à poser pour l'étude de l'équilibre de la poutrelle 2 par rapport au bâti 1 supposé galiléen et dénombrer les inconnues scalaires de liaison.
3. Déterminer les expressions des tensions dans les câbles 3 et 4 en fonction de la masse m de la poutrelle et des grandeurs géométriques posées.
4. Quelles conditions a-t-on sur les coordonnées b, c, d et e des points B et D pour garantir l'équilibre.

6.6 Pèse-lettre mécanique

On considère le pèse-lettre mécanique schématisé ci-dessous. Lorsqu'un objet est posé sur le plateau, le mécanisme prend une nouvelle position d'équilibre caractérisée par un angle θ , dont la valeur est relevée par le biais d'un index placé devant une graduation.



Un pèse-lettre mécanique.

Le pèse-lettre étudié comporte quatre ensembles :

- un bâti, repéré 1, auquel on associe un repère $(D, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, avec \vec{y}_1 orientant la verticale ascendante. On pose $\vec{CD} = a\vec{y}_1$
- un balancier, repéré 2, est assimilable à une ligne brisée ADG . Il est en liaison pivot d'axe (D, \vec{z}_1) avec le bâti 1. On lui associe un repère $(D, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ en choisissant $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$ et on pose

- l'angle $\theta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ pour la mise en position de 2 par rapport à 1;
- le rayon $\vec{DA} = -b\vec{x}_2$;
- le repère $(D, \vec{u}_2, \vec{v}_2, \vec{z}_2)$ défini par l'angle $\beta = (\vec{x}_2, \vec{u}_2)$;
- la bras $\vec{DG} = c\vec{u}_2$.

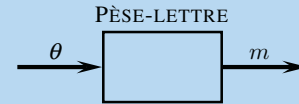
Une masse est accrochée à l'extrémité du balancier. Le centre de gravité de cet ensemble est situé au point G et la masse totale est notée M .

- un plateau repéré 3 de masse m_3 supporte l'objet dont on veut évaluer la masse m_o . Il est en liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_2) avec le balancier. On pose le point B tel que $\|\vec{AB}\| = \|\vec{CD}\| = a$. La masse de l'ensemble {3, objet} est notée m et l'on a bien évidemment $m = m_o + m_3$.
- une biellette repérée 4 est en liaison sphérique de centre B avec le plateau et de centre C avec le bâti. Sa longueur $\|\vec{BC}\|$ est prise égale à b . Sa masse est négligée devant celle du plateau 3.

Les liaisons sont supposées sans frottement et l'accélération de la pesanteur est prise égale à $\vec{g} = -g\vec{y}_1$.

Le référentiel lié au bâti 1 est assimilable à un référentiel galiléen.

On recherche la relation exprimant la valeur de la masse m en fonction de l'angle θ et des paramètres β , M , a et b .



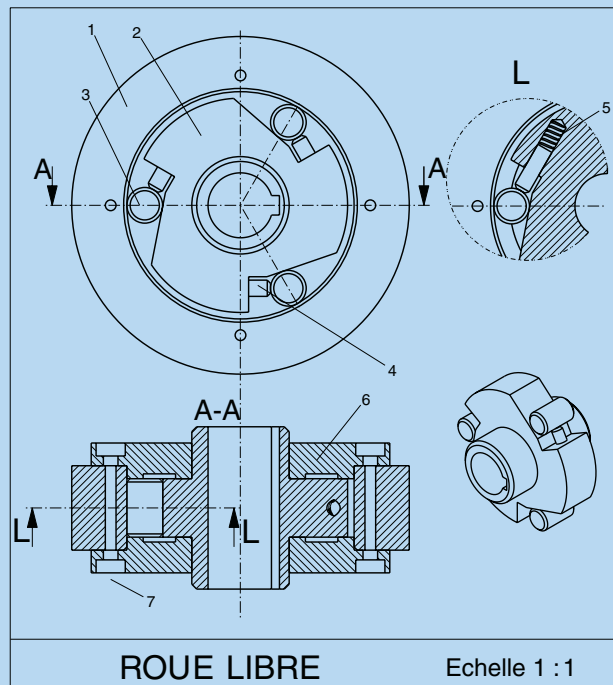
Déterminer la relation $m = f(\theta)$ et montrer que la position du centre de masse K de l'ensemble {3, objet} n'a pas d'influence sur le résultat de la mesure.

6.7 Roue libre

Une roue libre est un dispositif qui n'autorise la rotation relative de deux solides que dans un seul des deux sens possibles. La figure ci-dessous présente un modèle de roue-libre à galets, dont le fonctionnement s'appuie sur le phénomène d'arc-boutement. Le paramétrage adopté est illustré sur la figure suivante.

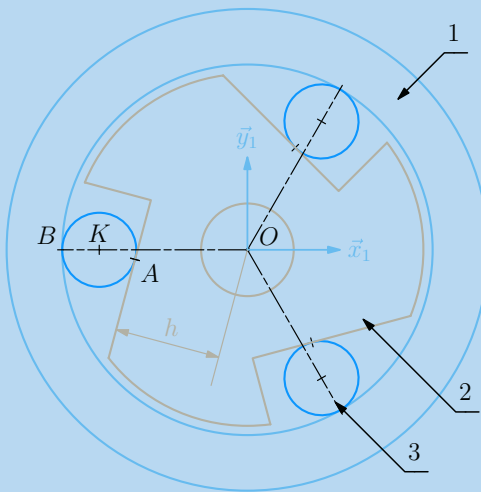
Le mécanisme étudié comprend :

- une bague repérée 1 que l'on prend comme référence. On lui associe un repère $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et on note la présence d'une forme cylindrique de révolution creuse d'axe (O, \vec{z}_1) et de rayon R .
- un arbre 2 que l'on considère en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_1) avec la bague 1 et sur lequel sont usinés trois plans parallèles à l'axe de rotation et disposés à 120° . On note h la distance entre les plans et l'axe de rotation.



Dessin d'ensemble d'un modèle de roue-libre à trois galets.

- trois galets 3 de rayon r , logés entre la forme cylindrique de révolution creuse de la bague et les plans de l'arbre.
- trois plots 4, poussés par les ressorts 5, maintiennent en permanence les galets en contact avec la bague et l'arbre.



Paramétrage de la roue-libre.

Concernant les actions mécaniques :

- toutes les pièces sont en acier et les contacts du galet avec la bague et l'arbre sont caractérisés par un coefficient de frottement noté f ;
- les ressorts sont de raideur suffisamment petite pour que l'on néglige leurs actions mécaniques devant les actions de contact ;
- la masse des galets 3 n'est pas prise en compte pour cette étude, ce qui permet de considérer le référentiel attaché à la bague comme galiléen.

Tous les plans perpendiculaires à l'axe de rotation sont semblables, et on cherche à définir dans le plan $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$ les conditions géométriques à respecter pour que le fonctionnement souhaité soit possible.

- Peut-on anticiper le sens de la rotation bloqué ?
- Définir les conditions géométriques entre les trois paramètres R , r et h garantissant d'une part l'équilibre possible du galet 3 par rapport à la bague 1, d'autre part le montage possible du galet entre la bague et l'arbre.
- À partir des résultats précédents, justifier le sens de rotation bloqué.

6.8 Maxpid

On se propose de reprendre le mécanisme « Maxpid » présenté au chapitre IV à la page ??.

Le mécanisme est composé de cinq ensembles :

- un bâti 1, auquel on associe un repère $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$. On pose $\vec{OA} = a\vec{x}_1$ et $\vec{OB} = b\vec{y}_1$.
- un bras 2, en liaison pivot d'axe (B, \vec{z}_1) avec le bâti 1. On lui associe un repère $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ en choisissant $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$ et on pose $\theta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$, $\vec{AC} = c\vec{x}_2$ et $\vec{AD} = d\vec{x}_2$.
- une noix 4, en liaison pivot glissant d'axe (C, \vec{z}_2) avec le bras 2.
- un moteur électrique, dont le carter 5 est en liaison pivot d'axe (B, \vec{z}_1) avec le bâti 1.
- une vis 3, solidaire de l'arbre du moteur. On lui associe un repère $(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ en choisissant \vec{x}_3 suivant l'axe de rotation du moteur électrique. Cette vis est en liaison pivot d'axe (B, \vec{x}_3) avec le carter 5 et en liaison hélicoïdale de pas p et d'axe (C, \vec{x}_3) avec la noix 4.

Concernant les actions mécaniques :

- le référentiel lié au bâti 1 est supposé galiléen ;
- l'accélération de la pesanteur est caractérisée par $\vec{g} = -g\vec{y}_1$;
- toutes les liaisons sont supposées sans frottement ;
- une charge est accrochée à l'extrémité du bras 2, et cet ensemble est de masse totale M , de centre de masse le point D . On modélise ainsi cette action mécanique sur 2 par un glisseur :

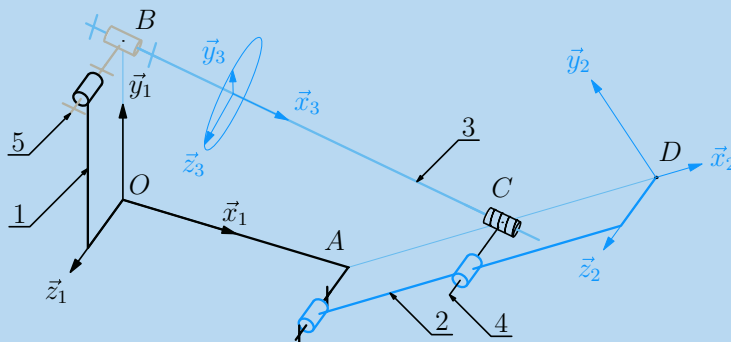


Schéma cinématique du mécanisme « Maxpid ».

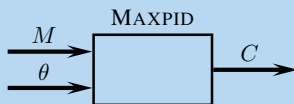
$$\mathcal{F}(c \rightarrow 2) = {}_D \left\{ \begin{array}{l} -Mg\vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right.$$

– le stator du moteur électrique $5m$ exerce sur le rotor 3 un couple noté C suivant \vec{x}_3 et on pose alors

$$\mathcal{F}(5m \rightarrow 3) = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C\vec{x}_3 \end{array} \right.$$

– le poids des différentes pièces est négligé devant l'action de la charge.

L'objectif de cette étude est de trouver le couple moteur nécessaire au maintien du bras 2 en équilibre par rapport au bâti 1 en fonction de la masse M de la charge et de la position θ du bras par rapport au bâti.



1. Dénumbrer les inconnues scalaires d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons.

2. Proposer une stratégie de résolution pour trouver la relation $C = f(M, \theta)$.

3. Mettre en œuvre cette stratégie et exprimer cette relation.

4. On relève pour différentes positions d'équilibre l'intensité du courant traversant le moteur. La constante de couple est égale à $52,5 \text{ mN/A}$ et on obtient après conversion le tableau suivant :

$\theta [^\circ]$	5,9	14,8	39,9	50,7	60,9	70,1	80	89,8
$C [\text{mNm}]$	65,65	60,35	34,15	28,85	21,00	13,15	5,25	2,65

Tracer et superposer pour θ de 0° à 90° cette courbe à la courbe théorique obtenue en prenant comme valeurs numériques :

$$\begin{array}{llll} a = 70 \text{ mm} & b = 80 \text{ mm} & c = 80 \text{ mm} & d = 190 \text{ mm} \\ p = 4 \text{ mm/tr} & M = 1.9 \text{ kg} & g = 9.81 \text{ ms}^{-2} & \end{array}$$

Solutions des exercices

Exercices d'application

6.1

- La stratégie induite est de déterminer les deux inconnues scalaires de la résultante $\vec{R}(1 \rightarrow 4)$ dans le plan (\vec{x}_1, \vec{y}_1) :
 - équilibre de 4/1 : équation de moment en B pour éviter les deux inconnues de la liaison sphère cylindre, scalaire \vec{z}_1 pour éviter trois des cinq inconnues de la liaison pivot entre 4 et 1. Les deux inconnues qui apparaissent sont les deux inconnues scalaires de la résultante $\vec{R}(1 \rightarrow 4)$ dans le plan (\vec{x}_1, \vec{y}_1) ;
 - équilibre de l'ensemble {3,4} par rapport à 1 : équation de moment en A scalaire \vec{z}_1 pour éviter les cinq inconnues scalaires de la liaison pivot entre 2 et 3 ;
 - équilibre de {2,3}/1 : équation de moment au point O scalaire \vec{z}_1 pour éviter les cinq inconnues scalaires de la liaison pivot entre 1 et 0.

Que ce soit la stratégie vue en cours ou celle-ci, il est à remarquer qu'elles s'appuient toutes les deux sur l'identification de l'objet 4 qui n'est soumis qu'aux actions mécaniques issues de deux éléments.

- L'équation de résultante scalaire \vec{y}_1 , issue de l'équilibre de 3 par rapport à 1, fait intervenir deux inconnues scalaires de liaison :

- la composante suivant \vec{y}_1 de la résultante $\vec{R}(4 \rightarrow 3)$;
- la composante suivant \vec{y}_1 de la résultante $\vec{R}(2 \rightarrow 3)$.

L'équation de moment en O scalaire \vec{z}_1 , issue de l'équilibre de 2 par rapport à 1, fait également intervenir deux inconnues scalaires de liaison :

- les deux composantes dans le plan (\vec{x}_1, \vec{y}_1) de la résultante $\vec{R}(3 \rightarrow 2)$.

On a donc à ce stade un système de deux équations à cinq inconnues – C , H et trois inconnues de liaison – à traiter. Il manque deux équations scalaires pour arriver à un système de quatre équations à cinq inconnues. Ces deux équations ne doivent bien évidemment pas faire intervenir d'autres inconnues scalaires ! Elles existent, ce sont par exemple :

- équation de moment en C scalaire \vec{z}_1 issue de l'équilibre de l'ensemble {3,4}/1 ;
- équation de moment en A scalaire \vec{z}_1 issue de l'équilibre de 3 par rapport à 1 ;

Le réflexe de l'étudiant qui se focalise uniquement sur les grandeurs recherchées le conduit à devoir écrire un plus grand nombre d'équations. Ceci dit, dans le cas où on ne trouve pas de chemin plus court, il est toujours possible d'écrire les dix huit équations scalaires !

- La stratégie suivante reprend les trois équilibres proposés dans le cours :

- équation de moment au point C scalaire \vec{z}_1 issue de l'équilibre de 4 par rapport à 1, pour éviter les cinq inconnues de la liaison pivot entre 1 et 4

$$(\vec{R}(3 \rightarrow 4) \wedge \vec{CB}) \cdot \vec{z}_1 = 0$$

Le vecteur \vec{CB} est à chaque instant orthogonal au vecteur \vec{z}_1 , donc le résultat du produit vectoriel ne peut être orthogonal à \vec{z}_1 . Le produit vectoriel $\vec{R}(3 \rightarrow 4) \wedge \vec{CB}$ est donc nécessairement nul et les deux vecteurs sont colinéaires. On pose alors

$$\vec{R}(3 \rightarrow 4) = k_{34} \vec{CB}$$

- équation de moment au point A scalaire \vec{z}_3 issue de l'équilibre de 3 par rapport à 1, pour éviter les cinq inconnues de la liaison pivot entre 2 et 3

$$(-k_{34} \vec{CB} \wedge \vec{BA} - H \vec{y}_1 \wedge \vec{HA}) \cdot \vec{z}_3 = 0 \quad (1)$$

- équilibre de l'ensemble {2,3} par rapport à 1 et écriture de l'équation de moment au point O scalaire \vec{z}_1 pour éviter les cinq inconnues de la liaison pivot entre 1 et 2.

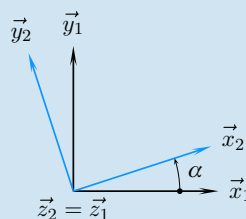
$$(-k_{34} \vec{CB} \wedge \vec{BO} - H \vec{y}_1 \wedge \vec{HO} + C \vec{z}_1) \cdot \vec{z}_1 = 0 \quad (2)$$

Les vecteurs \vec{OA} et \vec{CB} sont à chaque instant égaux, ainsi que les vecteurs \vec{z}_3 et \vec{z}_1 . On décompose dans l'équation (2)

le vecteur \vec{BO} en $\vec{BA} + \vec{AO}$ et on calcule alors la différence des deux dernières équations (2) – (1) pour trouver

$$(-H \vec{y}_1 \wedge \vec{AO} + C \vec{z}_1) \cdot \vec{z}_1 = 0$$

On rappelle $\vec{OA} = R \vec{x}_2$ et on trace la figure de définition de l'angle α .

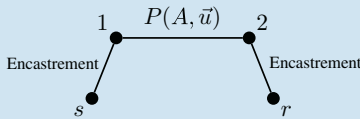


Cette figure permet d'évaluer $\vec{y}_1 \wedge \vec{x}_2 = -\cos \alpha \vec{z}_1$, et on en déduit finalement la relation recherchée

$$C = HR \cos \alpha$$

6.2

- On propose comme modèle de comportement pour le contact entre l'arbre et le carter une liaison pivot d'axe (A, \vec{u}) . Le moteur est constitué d'une chaîne ouverte de solides. Il n'y a surtout pas contact entre le rotor et le stator !



2. Le milieu environnant retenu pour l'ensemble {arbre, rotor} est constitué :

- du carter, par l'intermédiaire de la liaison pivot ;
- du stator, pour les phénomènes d'origine électromagnétique ;
- de la charge, pour l'énergie nécessaire à son mouvement.

Cet inventaire aboutit à cinq inconnues scalaires de liaison et à *a priori* douze inconnues scalaires pour les actions mécaniques issues de la charge et du stator.

3. L'équation de moment au point A scalaire \vec{u} permet d'éviter les cinq inconnues scalaires de la liaison pivot. il est nécessaire pour poursuivre de paramétrer les actions mécaniques $\mathcal{F}(c \rightarrow 2)$ et $\mathcal{F}(s \rightarrow r)$

$$\mathcal{F}(c \rightarrow 2) = \begin{cases} \vec{R}(c \rightarrow 2) \\ \vec{M}(A, c \rightarrow 2) \end{cases}$$

$$\mathcal{F}(s \rightarrow r) = \begin{cases} \vec{R}(s \rightarrow r) \\ \vec{M}(A, s \rightarrow r) \end{cases}$$

Une fois ces torseurs posés, l'équation scalaire proposée donne alors

$$\vec{M}(A, c \rightarrow 2) \cdot \vec{u} + \vec{M}(A, s \rightarrow r) \cdot \vec{u} = 0$$

4. On appelle couple moteur l'action mécanique d'origine électro-magnétique filtrée par la liaison pivot.

$$Cm = \vec{M}(A, s \rightarrow r) \cdot \vec{u}$$

On appelle couple résistant le moment scalaire exercé par le récepteur suivant l'axe de rotation

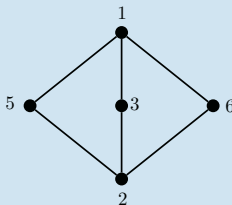
$$Cr = \vec{M}(A, c \rightarrow 2) \cdot \vec{u}$$

Il faut garder à l'esprit que les grandeurs scalaires habituellement posées cachent une problématique bien plus complexe :

- on ne perçoit les effets que d'une partie des actions d'origine électromagnétique ;
- les liaisons *encaissent* toutes les composantes suivant les degrés de liberté supprimés.

6.3

1. Le graphe des liaisons comporte cinq sommets et six arcs



En ce limitant aux mouvements dans le plan (\vec{x}_1, \vec{y}_1) , on dispose de douze équations scalaires issues des quatre équilibres à étudier :

- en supposant les contacts sans frottement, on compte deux inconnues scalaires par liaison pivot et une inconnue par contact, soit huit inconnues scalaires de liaison, auxquelles il faut ajouter F ;

- en supposant les contacts avec frottement, il faut ajouter au décompte précédent une inconnue tangentielle par contact, et on dénombre au total douze inconnues scalaires de liaison et F ;

Résoudre un système de douze équations à douze inconnues en prenant F comme paramètre est *a priori* possible.

2. La bague extérieure du roulement 5 est en équilibre par rapport à 1 sous l'action du bâti et du barreau :

Écrire l'équation de moment au point I scalaire \vec{z}_1 évite les deux inconnues scalaires de la liaison pivot et on obtient

$$(\vec{R}(2 \rightarrow 5) \wedge \vec{CI}) \cdot \vec{z}_1 = 0$$

Le vecteur \vec{CI} est à chaque instant orthogonal au vecteur \vec{z}_1 , donc le résultat du produit vectoriel ne peut pas être orthogonal à \vec{z}_1 . Le produit vectoriel $\vec{R}(2 \rightarrow 5) \wedge \vec{CI}$ est ainsi nécessairement nul et les deux vecteurs sont colinéaires. On pose

$$\vec{R}(2 \rightarrow 5) = R_{25} \vec{x}_1, \text{ avec } R_{25} \leq 0$$

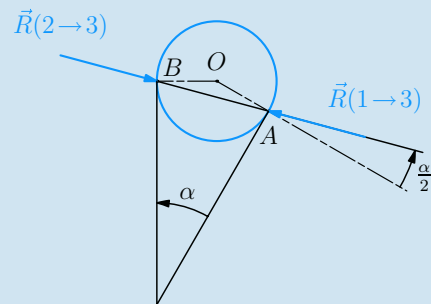
La composante tangentielle en C est à chaque instant nulle. Le phénomène de frottement n'a pas d'influence au niveau des contacts entre le barreau et les deux roulements à billes 5 et 6.

3. Équilibre du galet 3 par rapport à 1 :

Le galet 3 est soumis à deux actions mécaniques extérieures : celle de la rampe et celle du barreau. On pose

$$\mathcal{F}(1 \rightarrow 3) = \begin{cases} -N_{13} \vec{u}_1 + T_{13} \vec{v}_1, \\ \vec{0} \end{cases} \text{ avec } N_{13} \geq 0 \text{ et } \left| \frac{T_{13}}{N_{13}} \right| \leq f_{13}$$

$$\mathcal{F}(2 \rightarrow 3) = \begin{cases} N_{23} \vec{x}_1 + T_{23} \vec{y}_1, \\ \vec{0} \end{cases} \text{ avec } N_{23} \geq 0 \text{ et } \left| \frac{T_{23}}{N_{23}} \right| \leq f_{23}$$



Équilibre du galet 3 par rapport au bâti 1.

L'équilibre de 3 sous l'effet des deux glisseurs entraîne que :

- les deux glisseurs ont le même axe central : la droite (AB) ;
- les deux résultantes sont opposés :

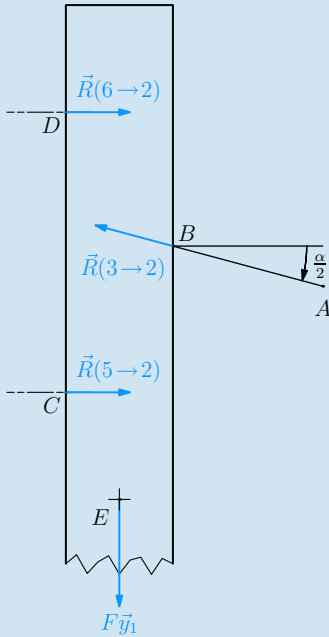
$$\vec{R}(1 \rightarrow 3) + \vec{R}(2 \rightarrow 3) = \vec{0}.$$

Les deux vecteurs $\vec{R}(1 \rightarrow 3)$ et $\vec{R}(2 \rightarrow 3)$ sont inclinés d'un angle $\frac{1}{2}\alpha$ par rapport aux normales aux contacts.

Étant en situation d'adhérence, cela impose alors que :

- $\frac{1}{2}\alpha \leq \varphi_{23}$
- $\frac{1}{2}\alpha \leq \varphi_{13}$

4. La relation recherchée se détermine à partir de l'équilibre du barreau 2 par rapport à 1. Ce dernier est soumis à quatre actions mécaniques extérieures :



– le roulement 5 ;

$$\mathcal{F}(5 \rightarrow 2) = \begin{Bmatrix} R_{52} \vec{x}_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

– le roulement 6 ;

$$\mathcal{F}(6 \rightarrow 2) = \begin{Bmatrix} R_{62} \vec{x}_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

– le galet 3 ;

$$\mathcal{F}(3 \rightarrow 2) = -\mathcal{F}(2 \rightarrow 3)$$

– le dispositif de poussée.

$$\mathcal{F}(e \rightarrow 2) = \begin{Bmatrix} -F \vec{y}_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

L'équation de résultante scalaire \vec{y}_1 évalue les actions des deux roulements 5 et 6 et on obtient :

$$\|\vec{R}(3 \rightarrow 2)\| \sin \frac{1}{2} \alpha = F$$

d'où :

$$\|\vec{R}(3 \rightarrow 2)\| = \frac{F}{\sin \frac{1}{2} \alpha}$$

Conclusion :

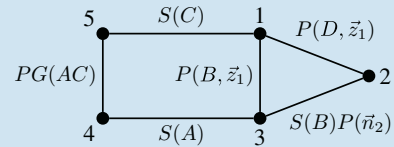
- pour obtenir un système autobloquant, on choisit $\alpha \leq 2 \min(\varphi_{13}, \varphi_{23})$, mais sans le prendre trop petit...
- en effet, plus l'angle α est petit, plus le module de la résultante $\|\vec{R}(3 \rightarrow 2)\|$ augmente, au risque de devenir disproportionné par rapport aux autres actions mécaniques.

5. La condition sur la composante normale N_{32} entraîne un produit scalaire $\vec{R}(3 \rightarrow 2) \cdot \vec{y}_1$ toujours positif. L'équation de résultante précédente ne peut donc pas être nulle lors d'une poussée F positive. Dès lors, l'équilibre du barreau 2 par rapport à 1 ne peut être réalisé.

6. Le phénomène qui apparaît au niveau de ce dispositif est l'arc-boutement.

6.4

1. Ce mécanisme comporte cinq solides et six liaisons, ce qu'illustre la figure ci-dessous.



Grphe des liaisons du mécanisme de l'ATR42.

Une étude systématique nécessite quatre équilibres qui fournissent 12 équations scalaires lorsque l'on se limite aux mouvements plans.

Toujours dans le plan, on dénombre 2 inconnues scalaires par liaison pivot (P), 2 par sphérique (S), 2 pour la liaison pivot glissant (PG) et 1 pour la sphère plan (SP), soit un total de 11 inconnues scalaires de liaison.

Déterminer onze inconnues de liaison en fonction du poids de la porte 2 à partir de douze équations est *a priori* faisable.

2. Le vérin {4,5} est en équilibre sous l'action de deux glisseurs $\mathcal{F}(1 \rightarrow 5)$ et $\mathcal{F}(3 \rightarrow 4)$.

– ces deux glisseurs ont alors pour axe central la droite (AC) ;

– et les deux résultantes sont opposées

$$\vec{R}(3 \rightarrow 4) = -\vec{R}(1 \rightarrow 5).$$

La direction de l'effort de poussée recherché $\vec{R}(4 \rightarrow 3)$ est ainsi déjà connue.

3. L'équilibre de la porte 2 par rapport au fuselage 1 met en œuvre les actions mécaniques extérieures issues de trois éléments du milieu environnant :

– la pesanteur, dont l'action ($p \rightarrow 2$) est entièrement connue ;

– le fuselage, dont l'action ($1 \rightarrow 2$) admet deux inconnues ;

– l'équerre, dont l'action ($3 \rightarrow 2$) ne comporte qu'une inconnue.

On rencontre parfois des tableaux pour faire la synthèse des inconnues. Ces tableaux ne doivent comporter que trois colonnes pour que le décompte des inconnues soit correct.

Action mécanique	Un point de l'axe central	Direction	Valeur algébrique
($p \rightarrow 2$)	G	$-\vec{y}_1$	1 kN
($1 \rightarrow 2$)	D		
($3 \rightarrow 2$)	E	\vec{n}_2	

On dispose de trois équations pour trois inconnues, on peut donc résoudre.

On est en présence de trois glisseurs dont deux ont leurs axes centraux sécants. L'équilibre impose que l'axe central du troisième passe aussi par ce point, et on peut tracer l'axe central du glisseur $\mathcal{F}(1 \rightarrow 2)$.

La somme issue de l'équation de résultante se trace en respectant l'échelle des forces :

$$\vec{R}(p \rightarrow 2) + \vec{R}(3 \rightarrow 2) + \vec{R}(1 \rightarrow 2) = \vec{0}$$

Cette somme permet de déterminer graphiquement $\vec{R}(3 \rightarrow 2)$ et $\vec{R}(1 \rightarrow 2)$.

On relève sur la figure $\|\vec{R}(3 \rightarrow 2)\| = 3,4 \text{ kN}$ et $\|\vec{R}(1 \rightarrow 2)\| = 2,4 \text{ kN}$.

4. La méthode appliquée pour l'équilibre de 2/1 est reprise pour l'équilibre de l'équerre 3 par rapport au fuselage 1.

Trois éléments du milieu environnant sont à évoquer :

- la porte cargo : l'action mécanique $\mathcal{F}(2 \rightarrow 3)$ est entièrement connue ;
- le fuselage : $\mathcal{F}(1 \rightarrow 3)$ est un glisseur d'axe central passant par le point B ;
- la tige du vérin : $\mathcal{F}(4 \rightarrow 3)$ est un glisseur d'axe central la droite (AC) .

À nouveau trois inconnues pour trois équations, la résolution est possible. Deux des axes centraux sont sécants, donc les trois axes centraux sont concourants et la somme des résultantes est nulle.

On relève sur la figure $\|\vec{R}(1 \rightarrow 3)\| = 6,7 \text{ kN}$ et $\|\vec{R}(4 \rightarrow 3)\| = 5,3 \text{ kN}$.

Conclusion

L'effort de poussée du vérin s'élève à $5,3 \text{ kN}$.

Remarque 1

Le tableau de synthèse des inconnues recensées à la deuxième question s'écrit

Action mécanique	Un point de l'axe central	Direction	Valeur algébrique
$(1 \rightarrow 5)$	C		
$(3 \rightarrow 4)$	A		

On compte quatre inconnues pour trois équations. Ceci explique pourquoi la résolution ne peut être que partielle. Mais si cette résolution partielle n'est pas faite en préliminaire, c'est à la quatrième question que l'on ne peut pas résoudre !

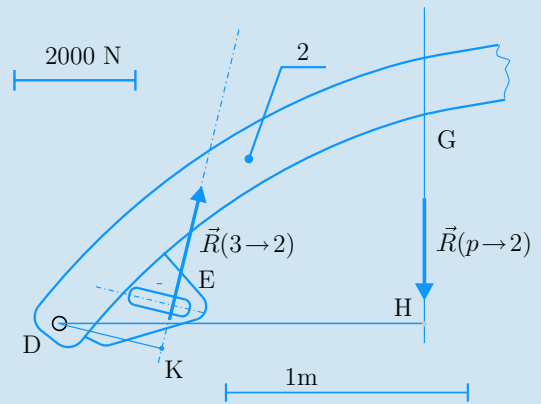
Remarque 2

Lors de l'équilibre de la porte 2 par rapport au fuselage 1, il est possible de ne s'intéresser qu'à l'équation de moment au point D scalaire \vec{z}_1 pour éviter les deux inconnues scalaires de l'action du fuselage :

$$(\vec{R}(p \rightarrow 2) \wedge \vec{GD}) \cdot \vec{z}_1 + (\vec{R}(3 \rightarrow 2) \wedge \vec{ED}) \cdot \vec{z}_1 = 0 \quad (3)$$

La figure ci-dessous définit les points H et K qui caractérisent les *bras de levier*, c'est-à-dire les distances des axes centraux au point de calcul des moments. On décompose les deux vecteurs $\vec{GD} = \vec{GH} + \vec{HD}$, $\vec{ED} = \vec{EK} + \vec{KD}$ et l'interprétation graphique de l'équation (3) permet d'écrire

$$\|\vec{R}(3 \rightarrow 2)\| = \frac{DH}{DK} \|\vec{R}(p \rightarrow 2)\|$$



Interprétation graphique des moments au point D .

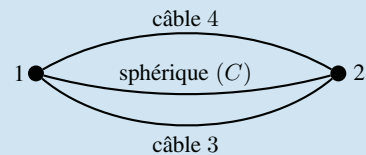
Il suffit alors de mesurer sur le plan les distances KD et HD sans se soucier de conversion, car elles sont relevées à la même échelle.

Synthèse des constructions graphiques (voir ci-contre).

Exercices d'approfondissement

6.5

1. Pour le graphe des liaisons, les câbles ne sont pas des solides.

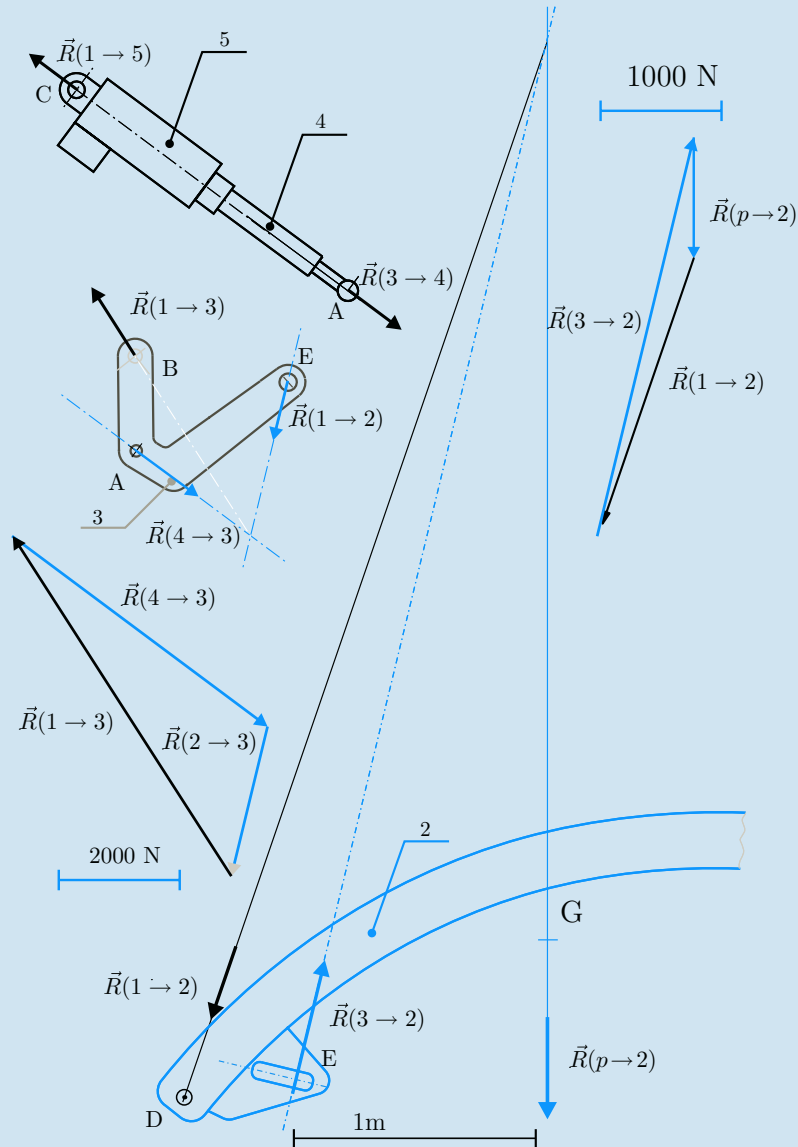


2. On s'intéresse à l'équilibre de la poutrelle 2 par rapport au support 1 supposé galiléen. Concernant l'inventaire des actions mécaniques extérieures exercées sur 2, on retient comme éléments du milieu environnant :

- le bâti 1 $\mathcal{F}(1 \rightarrow 2) = \begin{cases} \vec{R} \\ \vec{0} \end{cases} (1 \rightarrow 2)$
- le câble 3 $\mathcal{F}(3 \rightarrow 2) = \begin{cases} k_3 \vec{AB} \\ \vec{0} \end{cases}$, avec $k_3 \geq 0$
- le câble 4 $\mathcal{F}(4 \rightarrow 2) = \begin{cases} k_4 \vec{AD} \\ \vec{0} \end{cases}$, avec $k_4 \geq 0$
- la pesanteur $\mathcal{F}(p \rightarrow 2) = \begin{cases} -mg \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{cases}$

Au bilan, on a cinq inconnues de liaison pour six équations scalaires, et le poids comme paramètre : Une solution devrait être possible !

3. Pour trouver la valeur de la tension dans le câble 3, il suffit d'écrire :



– l'équation de moment en C pour éviter les trois inconnues de la liaison sphérique ;

– cette équation scalaire \vec{AD} pour éliminer le terme $k_4 \vec{AD} \wedge \vec{AC}$.

On obtient alors l'égalité de deux produits mixtes

$$k_3 (\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = mg (\vec{z}_1, \vec{GC}, \vec{AD})$$

Le premier produit mixte se transforme en utilisant successivement les cas de nullité d'un produit mixte, les permutations circulaires et l'antisymétrie du produit vectoriel

$$\begin{aligned} (\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) &= (\vec{CB}, \vec{AC}, \vec{CD}) \\ &= (\vec{CD}, \vec{CB}, \vec{AC}) \\ &= (\vec{CD} \wedge \vec{CB}) \cdot \vec{AC} \\ &= (\vec{CB} \wedge \vec{CD}) \cdot \vec{CA} \\ &= (cd - be)a \end{aligned}$$

Le deuxième produit mixte se traite de la même manière

$$\begin{aligned} (\vec{z}_4, \vec{GC}, \vec{AD}) &= (\vec{CD} \wedge \vec{z}_4) \cdot \vec{GC} \\ &= \frac{1}{2}ac \end{aligned}$$

On déduit de ces deux calculs la valeur du coefficient k_3

$$k_3 = \frac{mgc}{2(cd - be)}$$

Un raisonnement analogue et des calculs similaires conduisent à la détermination du coefficient k_4

$$k_4 = \frac{-mgb}{2(cd - be)}$$

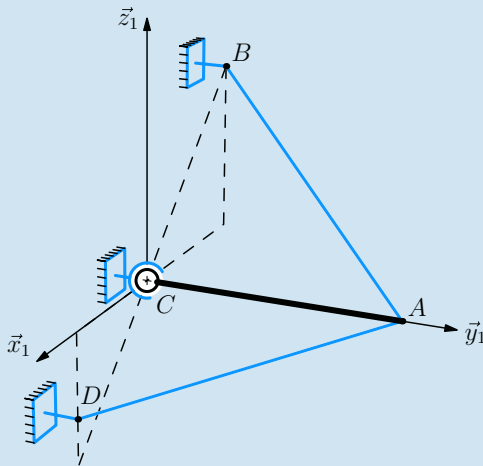
Les tensions dans les câbles sont obtenues en multipliant les coefficients k_3 et k_4 respectivement par les normes des vecteurs $\|\vec{AB}\|$ et $\|\vec{AC}\|$.

4. Les conditions d'équilibre ont été énoncées lors du paramétrage des actions mécaniques. Il est nécessaire que les coefficients k_3 et k_4 soient tous les deux positifs ou nuls. On constate que le quotient k_3/k_4 est égal à $-c/b$. Les valeurs de b et de c doivent donc être de signes opposés. En s'inspirant de la figure proposée, on peut choisir c positif et b négatif.

Le choix du signe de c étant fait, le terme $(cd - be)$ doit être positif. Ce terme est issu du produit vectoriel $\vec{CB} \wedge \vec{CD}$ et indique que l'angle entre \vec{CB} et \vec{CD} , compté de \vec{CB} vers \vec{CD} dans le sens positif, doit être compris entre $+0^\circ$ et $+180^\circ$.

Le produit vectoriel doit également être non nul, les trois points B , C et D ne doivent donc pas être alignés.

La figure ci-dessous définit une configuration d'équilibre possible, avec le point D en dessous de la poutrelle.

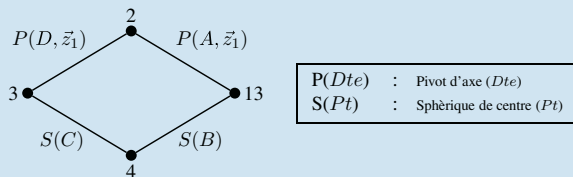


Une configuration d'équilibre possible.

6.6 Lecture et décodage

D'un point de vue géométrique, on constate après montage que le quadrilatère $(ABCD)$ est un parallélogramme déformable.

Ce mécanisme comporte une chaîne fermée de solides, comportant quatre pièces et quatre liaisons, ce que résume le graphe des liaisons suivant.



Graphe des liaisons du pèse-lettre.

Décompte des nombres d'inconnues de liaison et d'équations

L'étude systématique de ce mécanisme nécessite trois équilibres, ce qui donne 18 équations scalaires.

La chaîne fermée comporte deux liaisons pivot et deux liaisons sphériques, et admet donc 16 inconnues scalaires d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons supposées sans frottement. La masse m de l'ensemble {plateau, objet} est également une inconnue du problème. On a donc un total de 17 inconnues.

Exprimer dix-sept inconnues en fonction du paramètre M à partir de dix-huit équations devrait être possible.

Stratégie de résolution

Il est nécessaire de parcourir la chaîne fermée de solides pour résoudre, ce qui entraîne l'écriture d'au moins trois équations scalaires :

- la bielle 4 est soumise à l'action de deux glisseurs, donc l'équation de moment au point C donne la direction de la résultante $\vec{R}(3 \rightarrow 4)$, tout en évitant les trois inconnues scalaires de la liaison sphérique entre la bielle et le bâti ;
- l'équation de moment au point A issue de l'équilibre du plateau 3 par rapport à 1 permet d'éviter les cinq inconnues de la liaison pivot entre le plateau et le balancier ;
- l'équation de moment au point D issue de l'équilibre de l'ensemble $\{2, 3\}$ par rapport à 1 permet d'éviter les cinq inconnues de la liaison pivot entre le balancier et le bâti.

Résolution

Équilibre de la bielle 4 par rapport au bâti 1

Deux actions mécaniques extérieures sont à considérer : celle de 3 sur 4 et celle de 1 sur 4. Les deux liaisons concernées sont des liaisons sphériques de centres respectifs B et C . L'équation de moment au point C s'écrit alors

$$\vec{R}(3 \rightarrow 4) \wedge \vec{BC} = \vec{0}$$

On en déduit que la résultante $\vec{R}(3 \rightarrow 4)$ est colinéaire au vecteur \vec{BC} , et on pose, en utilisant les propriétés des parallélogrammes

$$\mathcal{F}(3 \rightarrow 4) = \begin{Bmatrix} R_{34}\vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$$

Équilibre du plateau 3 et de l'objet pesé par rapport au bâti 1

Trois actions mécaniques extérieures sont à considérer :

- action de la pesanteur

$$\mathcal{F}(p \rightarrow 3) = K \begin{Bmatrix} -mg\vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

- action de la bielle 4, dont la forme a été trouvée précédemment

$$\mathcal{F}(4 \rightarrow 3) = -\mathcal{F}(3 \rightarrow 4) = \begin{Bmatrix} R_{43}\vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$$

- enfin l'action du balancier 2 par l'intermédiaire d'une liaison pivot dont on veut éviter les cinq inconnues scalaires

$$\mathcal{F}(2 \rightarrow 3) = \begin{Bmatrix} \vec{R}(2 \rightarrow 3) \\ \vec{M}(A, 2 \rightarrow 3) \end{Bmatrix}_A$$

avec $\vec{M}(A, 2 \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_1 = 0$

L'équation de moment au point A scalaire \vec{z}_1 donne alors une somme nulle de deux produits mixtes

$$(-mg\vec{y}_1, \vec{K}\vec{A}, \vec{z}_1) + (R_{43}\vec{x}_2, \vec{B}\vec{A}, \vec{z}_1) = 0 \quad (4)$$

Il est judicieux d'attendre l'équation issue du dernier équilibre avant de traiter les produits mixtes.

Équilibre de l'ensemble {2 + 3} par rapport au bâti 1

Quatre actions mécaniques extérieures sont à considérer :

- action de la pesanteur sur le plateau 3 et l'objet pesé
- action de la pesanteur sur le balancier 2

$$\mathcal{F}(p \rightarrow 2) = G \begin{Bmatrix} -Mg\vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

- action de la biellette 4
- action du bâti 1 par l'intermédiaire d'une liaison pivot dont on veut éviter les cinq inconnues scalaires

L'équation de moment au point D scalaire \vec{z}_1 donne alors une somme nulle de trois produits mixtes

$$\begin{aligned} (-mg\vec{y}_1, \vec{K}\vec{D}, \vec{z}_1) + (-Mg\vec{y}_1, \vec{G}\vec{D}, \vec{z}_1) \\ + (R_{43}\vec{x}_2, \vec{C}\vec{D}, \vec{z}_1) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

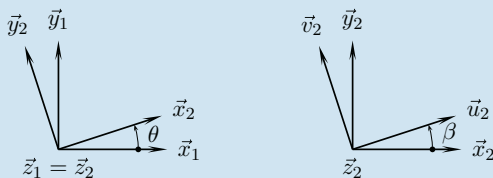
Calcul effectif

Les deux vecteurs $\vec{B}\vec{A}$ et $\vec{C}\vec{D}$ sont à chaque instant égaux. On effectue alors la différence des deux équations (4) – (5) pour obtenir immédiatement

$$m(\vec{y}_1, \vec{D}\vec{A}, \vec{z}_1) + M(\vec{y}_1, \vec{G}\vec{D}, \vec{z}_1) = 0$$

Après substitution, permutation et échange de signe, le résultat recherché s'exprime par

$$m = \frac{\vec{x}_1 \cdot \vec{u}_2}{\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2} \frac{c}{b} M$$



Les figures de définition des angles permettent d'évaluer les deux produits scalaires et on obtient finalement

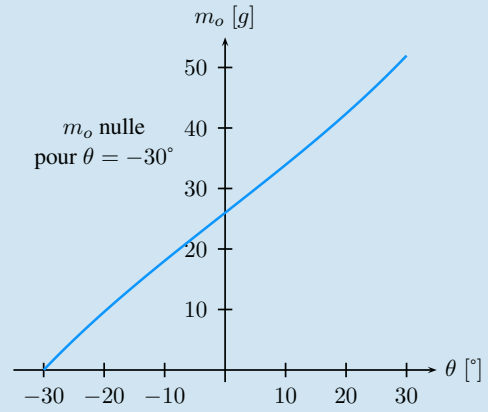
$$m = \frac{\cos(\theta + \beta)}{\cos(\theta)} \frac{c}{b} M$$

Conclusions

Trois remarques s'imposent :

- le résultat ne dépend pas de la position de l'objet pesé sur le plateau ;
- la graduation n'est pas linéaire ;
- la balance ne donne aucun résultat si l'angle β est nul.

La figure ci-après donne un exemple de courbe caractéristique obtenue avec un angle $\beta = -30^\circ$ et un contrepoids M d'une centaine de gramme.



Courbe caractéristique $m_o = f(\theta)$.

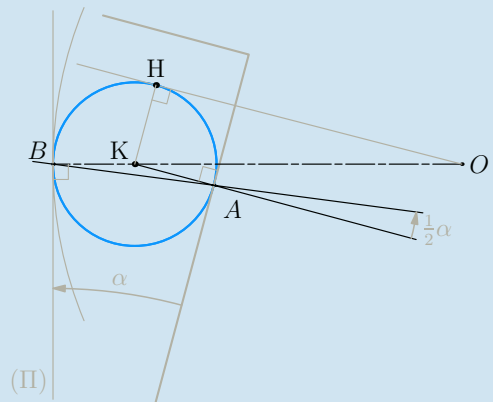
6.7

1. Il faut imaginer les mouvements des pièces à partir de la figure « Paramétrage de la roue libre » de l'énoncé pour anticiper le résultat :

- Lors d'une rotation de 2/1 dans le sens positif, ce sont les plots 4 qui entraînent les galets. Si on les supprime, on peut imaginer le mouvement de 2/1 en les laissant au contact de la bague et en constatant la rupture du contact avec l'arbre.
- Une rotation de 2/1 dans le sens négatif tend à écraser les galets entre arbre et bague...

En conséquence, le sens de rotation impossible de 2/1 est le sens négatif.

2. On s'intéresse à l'équilibre d'un des galet 3 par rapport à la bague 1.



Particularités géométriques au niveau d'un galet.

La figure ci-dessus, tracée dans le plan $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$ illustre le raisonnement mené :

- on trace (II) le plan tangent au point B et on pose α l'angle entre les deux plans tangents aux contacts.
- si le galet 3 est en équilibre sous l'action de deux glisseurs, alors les axes centraux sont confondus et sont caractérisés par la droite (AB).

- pour que l'équilibre soit possible, il est nécessaire d'avoir un angle α suffisamment petit, ce qui est exprimé par les lois du frottement

$$\tan \frac{\alpha}{2} \leq f$$

- dans le triangle (KOH) , droit au point H , on a

$$\cos \alpha = \frac{h+r}{R-r}$$

- on connaît la relation entre le cosinus et la tangente d'un angle

$$\cos \alpha = \frac{1 - \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan \frac{\alpha}{2}}$$

En définitive, deux conditions géométriques sont à considérer :

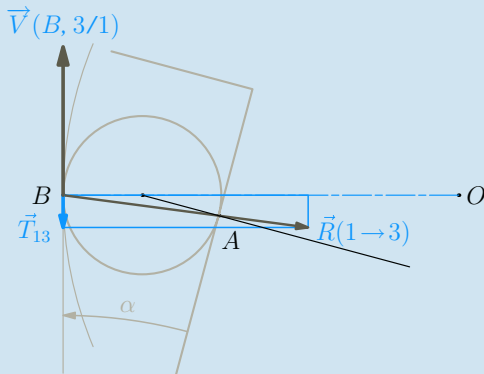
- Il faut pouvoir monter le galet entre le l'arbre et la bague, ce qui se traduit par

$$2r + h \leq R$$

- l'arc boutement est possible si l'angle α reste suffisamment petit, sa valeur ne dépendant que de R et de h

$$\frac{R-h}{R+h} \leq f$$

3. Un raisonnement cinématique consiste à imaginer solidaire l'arbre et le galet. On utilise alors le fait qu'au point de contact B , la composante tangentielle $\vec{T}(1 \rightarrow 3)$ s'oppose au vecteur vitesse de glissement $\vec{V}(B, 3/1)$ qui apparaîtrait en l'absence de frottement.



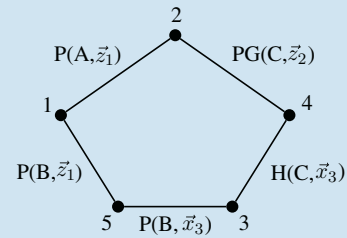
Vitesse de glissement virtuelle au point B .

Le vecteur vitesse tracé sur la figure ci-dessus correspond au cas où la rotation virtuelle de $2/1$ est négative. Envisager le vecteur vitesse opposé entraîne le changement de signe pour la composante tangentielle $\vec{T}(1 \rightarrow 3)$, donc une résultante d'actions mécaniques également opposée, ce qui est incompatible avec le contact bague-galet.

On peut compléter ce raisonnement en considérant le moment au point O suivant \vec{z}_1 des différentes actions mécaniques exercées par le bâti 1 sur l'ensemble $\{2, 3_i\}$. Il ne peut être que positif !

6.8

1. Ce mécanisme comporte une chaîne fermée de cinq solides.



Une étude systématique consiste à étudier quatre équilibres, ce qui donne vingt quatre équations scalaires.

On identifie trois liaisons pivot, une liaison pivot glissant et une liaison hélicoïdale, ce qui permet de dénombrer vingt quatre inconnues de liaison.

2. Il est nécessaire de parcourir la chaîne fermée. On peut donc difficilement espérer résoudre le problème avec moins de quatre équations scalaires. Ces dernières font intervenir le couple moteur et trois inconnues de liaison. Reste à déterminer lesquelles choisir :

- la liaison hélicoïdale permet la conversion du mouvement de rotation du moteur par rapport au carter 5 en translation suivant \vec{x}_3 de la noix 4 par rapport à 3. On décide alors de prendre comme première inconnue les deux composantes de la liaison hélicoïdale suivant \vec{x}_3 . Elles sont reliées par la relation

$$\vec{M}(C, 3 \rightarrow 4) \cdot \vec{x}_3 = -p \vec{R}(3 \rightarrow 4) \cdot \vec{x}_3$$

- la rotation du bras 2 par rapport au bâti 1 est empêchée par la noix 4. On choisit alors comme deux autres inconnues les composantes de la résultante $\vec{R}(4 \rightarrow 2)$.

Ces trois inconnues étant choisies, il faut trouver quatre équations scalaires évitant les vingt-et-une autres inconnues scalaires de liaison :

Eq1 : l'ensemble de pièces $\{3, 4, 5\}$ n'a dans son environnement que deux éléments. L'équation de moment au point B scalaire \vec{z}_1 issue de l'équilibre de cet ensemble $\{3, 4, 5\}$ par rapport à 1 permet d'éviter les cinq inconnues de la liaison pivot entre 5 et 1 et les deux inconnues de moment de la liaison pivot glissant entre 4 et 2.

Eq2 : l'équation de moment au point A scalaire \vec{z}_1 issue de l'équilibre de 2 par rapport à 1 permet d'éviter les cinq inconnues de la liaison pivot entre 2 et 1, ainsi que les deux inconnues de moment de la liaison pivot glissant entre 4 et 2.

Eq3 : l'équation de moment au point B scalaire \vec{x}_3 issue de l'équilibre de 3 par rapport à 1 permet d'éviter les cinq inconnues de la liaison pivot entre 3 et 5, ainsi que les quatre inconnues que l'on veut éviter pour la liaison hélicoïdale entre 3 et 4.

Eq4 : l'équation de résultante scalaire \vec{x}_3 issue de l'équilibre de 4 par rapport à 1 évite les quatre inconnues indésirables de la liaison hélicoïdale entre 3 et 4 et les deux inconnues de moment de la liaison pivot glissant entre 4 et 2.

3. L'équilibre **Eq4** ne fait intervenir que deux actions mécaniques extérieures :

- la vis 3 sur la noix 4 ;
- le bras 2 sur la noix 4.

On en déduit alors l'équation scalaire citée

$$\vec{R}(3 \rightarrow 4) \cdot \vec{x}_3 + \vec{R}(2 \rightarrow 4) \cdot \vec{x}_3 = 0 \quad (6)$$

L'équilibre **Eq3** met en jeu trois actions mécaniques extérieures :

- le carter 5 sur la vis 3 ;
- la noix 4 sur la vis 3 ;
- le stator du moteur 5m sur le rotor 3.

L'équation scalaire proposée s'exprime alors

$$\left(\vec{M}(B, 4 \rightarrow 3) + \vec{M}(B, 5m \rightarrow 3) \right) \cdot \vec{x}_3 = 0$$

Après substitution, on obtient

$$C = p \vec{R}(4 \rightarrow 3) \cdot \vec{x}_3 \quad (7)$$

Les deux équations (6) et (7) permettent d'écrire

$$C = -p \vec{R}(4 \rightarrow 2) \cdot \vec{x}_3 \quad (8)$$

Le premier équilibre **Eq1** proposé fait intervenir deux actions mécaniques extérieures :

- le bâti 1 sur le carter 5 ;
- le bras 2 sur la noix 4.

L'équation recherchée donne alors

$$\left(\vec{R}(4 \rightarrow 2) \wedge \vec{CB} \right) \cdot \vec{z}_1 = 0$$

Le vecteur \vec{CB} est à chaque instant orthogonal au vecteur \vec{z}_1 , donc le résultat du produit vectoriel ne peut être orthogonal à \vec{z}_1 . Le produit vectoriel $\vec{R}(4 \rightarrow 2) \wedge \vec{CB}$ est donc nécessairement nul et les deux vecteurs sont colinéaires. On pose au choix

$$\vec{R}(4 \rightarrow 2) = k_{42} \vec{CB} = X_{42} \vec{x}_3 \quad (9)$$

Les équations (8) et (9) permettent d'écrire

$$X_{42} = -k_{42} \|\vec{CB}\| = -\frac{C}{p} \quad (10)$$

Le dernier équilibre **Eq2** met en jeu trois actions mécaniques extérieures :

- le bâti 1 sur le bras 2 ;
- la noix 4 sur le bras 2 ;
- la charge c sur le bras 2.

L'équation scalaire recherchée s'exprime alors

$$\left(\vec{R}(4 \rightarrow 2) \wedge \vec{CA} \right) \cdot \vec{z}_1 + \left(\vec{R}(c \rightarrow 2) \wedge \vec{DA} \right) \cdot \vec{z}_1 = 0$$

Pour éviter les angles indésirables, le premier produit mixte s'évalue en prenant $\vec{R}(4 \rightarrow 2) = k_{42} \vec{CB}$ et en décomposant \vec{CB} en $\vec{CA} + \vec{AB}$. On obtient ainsi

$$k_{42} ((b\vec{y}_1 - a\vec{x}_1) \wedge -\vec{x}_2) \cdot \vec{z}_1 = k_{42} c (b \cos \theta + a \sin \theta).$$

Le second produit mixte donne $(Mg\vec{y}_1 \wedge d\vec{x}_2) \cdot \vec{z}_1 = -Mgd \cos \theta$ et on en déduit

$$k_{42} = \frac{mgd \cos \theta}{c(b \cos \theta + a \sin \theta)} \quad (11)$$

Les deux dernières équations (10) et (11) permettent d'écrire

$$C = p \|\vec{CB}\| \frac{Mgd \cos \theta}{c(b \cos \theta + a \sin \theta)} \quad (12)$$

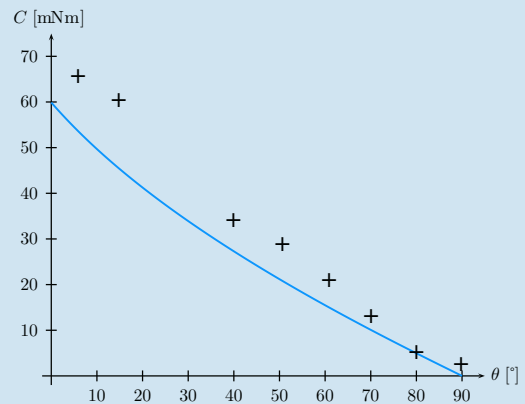
Il reste à exprimer $\|\vec{CB}\|$ en fonction de θ et des grandeurs géométriques

$$\begin{aligned} \vec{CB} &= \vec{CA} + \vec{AB} \\ &= -c\vec{x}_2 - a\vec{x}_1 + b\vec{y}_1 \\ \vec{CB}^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ca \cos \theta - 2cb \sin \theta \end{aligned}$$

On obtient ainsi l'expression recherchée

$$C = pMg \frac{d \cos \theta \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ca \cos \theta - 2cb \sin \theta}}{c(b \cos \theta + a \sin \theta)} \quad (13)$$

4. On trace la courbe obtenue et on lui superpose les points expérimentaux



Superposition de la courbe théorique et des points expérimentaux.