

JILID 2

EDISI KETIGA

APLIKASI ELEKTROMAGNETIK

STAKAAN
A TIMUR

LIANG CHI SHEN/JIN AU KONG

APLIKASI ELEKTROMAGNETIK

Edisi Ketiga

Jilid 2

Liang Chi Shen

University of Houston

Jin Au Kong

Massachusetts Institute of Technology



PENERBIT ERLANGGA

Jl. H. Baping Raya No. 100

Ciracas, Jakarta 13740

e-mail: mahameru@rad.net.id

(Anggota IKAPI)

290. 929 /BPP /P /04

Jin Au Kong, Liang Chi Shen

Aplikasi Elektromagnetik/Jin Au Kong, Liang Chi Shen;
alih bahasa, Iwa Garniwa; editor, H. Wibi Hardani.
-- Ed. 3, Cet. 1. -- Jakarta : Erlangga, 2001.
. . . hlm: . . . cm

Judul asli: APPLIED ELECTROMAGNETISM, Third Edition
ISBN 979-688-083-0 (No, Jil. lengkap)
ISBN 979-688-084-9 (Jil. 1)
ISBN 979-688-085-7 (Jil. 2)

- | | |
|------------------------------|---------------------|
| I. Elektromagnetik Aplikasi. | I. Judul. |
| II. Garniwa, Iwa | III. Hardani, Wibi. |

APLIKASI ELEKTROMAGNETIK, Edisi Ketiga
Liang Chi Shen, Jin Au Kong

Judul Asli:
APPLIED ELECTROMAGNETISM, Third Edition
Liang Chi Shen, Jin Au Kong

Hak cipta © dalam Bahasa Inggris 1987 pada PWS Publishers. Hak cipta © 1995 pada PWS Publishing Company, sebuah divisi dari International Thomson Publishing Inc. Hak terjemahan dalam Bahasa Indonesia pada **Penerbit Erlangga**, berdasarkan perjanjian pada tahun 1996.

Alih Bahasa : **Ir. Iwa Garniwa, MK., M.T.**
Jurusan Elektro Fakultas Teknik Universitas Indonesia, Depok
Editor : **H. Wibi Hardani, S.T.**

Buku ini diset dan dilayout oleh Bagian Produksi **Penerbit Erlangga** dengan Power Mac G4 (Times 10)

05 04 03 02 01 9 8 7 6 5 4 3 2 1

Dicetak oleh : **PT. Gelora Aksara Pratama**

Dilarang keras mengutip, menjiplak, memperbanyak, memfotokopi, baik sebagian maupun keseluruhan isi buku ini serta memperjualbelikannya tanpa izin tertulis dari **Penerbit Erlangga**.

Untuk Orang tua kami:

*Bagaimana mungkin sepotong
rumput dapat membalas kehangatan
matahari musim semi*

-Meng Chio (751-814)

OPSI STUDI/APLIKASI ELEKTROMAGNETIK*

Vektor Kompleks, Bab 1

Persamaan Maxwell, Bab 2

Gelombang Bidang Seragam
(Datar Sejajar), Bab 3

Pantulan dan Transmisi
Gelombang, Bab 4

Pemandu gelombang dan Resonator,
Bab 5

Antena, Bab 7

Saluran Transmisi, Bab 6

Topik mengenai Gelombang, Bab 8

Medan Elektrostatik, Bab 9

Gaya dan Energi Listrik, Bab 10

Teknik-teknik Penyelesaian, Bab 11

Arus Listrik, Bab 12

Medan Magnetostatik, Bab 13

Medan Elektrokusistatik, Bab 15

Bahan Magnetik & Rangkaian
Magnetik, Bab 14

Medan Magnetokusistatik, Bab 16

*Sembilan bab di jalur utama (kolom tengah) diperuntukkan sebagai bahan kuliah satu semester.

DAFTAR ISI

Kata Pengantar Edisi Ketiga	ix
Kata Pengantar Edisi Kedua	x
Kata Pengantar Edisi Pertama	xi
Notasi, Simbol, dan Satuan	xiii

9 MEDAN LISTRIK

9.1 Potensial Elektrostatik	1
9.2 Medan Elektrostatik	7
9.3 Hukum Gauss dan Aplikasinya	12
9.4 Perhitungan Potensial dari Integral Garis	22
Soal-soal	32

10 GAYA DAN ENERGI LISTRIK

10.1 Gaya Listrik	36
10.2 Kerja dan Energi	48
10.3 Kapasitansi	60
Soal-soal	73

11 TEKNIK-TEKNIK PENYELESAIAN

11.1 Persamaan Poisson dan Persamaan Laplace	78
11.2 Metode Bayangan	86
11.3 Metode Pemisahan Variabel	102
Soal-soal	111

12 ARUS SEARAH

12.1 Hukum Ohm	116
12.2 Analogi antara Arus Searah dan Medan Elektrostatis	120
Soal-soal	129

13 MEDAN MAGNETOSTATIK

13.1 Medan Magnetostatik	134
13.2 Gaya dan Torsi Magnetik	148
13.3 Energi dan Induktansi Magnetik Tersimpan	159
Soal-soal	165

14 BAHAN MAGNETIK DAN RANGKAIAN MAGNETIK 171

- 14.1 Bahan Magnetik 171
- 14.2 Rangkaian Magnetik 186
 - Soal-soal 192

15 MEDAN ELEKTROKUASISTATIK 196

- 15.1 Pendekatan Kuasistatik 196
 - Soal-soal 208

16 MEDAN MAGNETOKUASISTATIK 211

- 16.1 Hukum Faraday 211
- 16.2 Transformator, Generator, dan Motor 228
 - Soal-soal 247

LAMPIRAN

- Lampiran A Simbol yang sering digunakan
- Lampiran B Simbol Matematika
- Lampiran C Awalan
- Lampiran D Konstanta Fisika

KATA PENGANTAR EDISI KETIGA

Pada edisi ketiga ini, kami memberikan lebih banyak contoh aplikasi dari medan dan gelombang elektromagnetik. Untuk meningkatkan kepedulian kita, sedikit diskusi pendahuluan mengenai keamanan pemakaian radiasi elektromagnetik bagi manusia telah ditambahkan pada topik penting ini. Kemajuan beberapa aplikasi yang digambarkan pada buku ini, seperti dalam hal luas memori cakra magnetik dan serat optik, telah diperbaharui.

Edisi ini menampilkan beberapa hal baru. Ringkasan telah ditambahkan pada bagian akhir setiap bab agar pembaca dapat mengulang kembali apa yang telah dibahas sebelumnya. Pada semua contoh soal telah ditambahkan komentar untuk menjelaskan kegunaan masing-masing contoh soal tersebut. Program komputer yang tersedia di pasaran kami rekomendasikan sebagai alat bantu studi dalam mempelajari materi yang dibahas di tiap-tiap bab di mana bahasa tersebut terpakai. Program komputer yang dimaksud adalah perangkat lunak CAEME, yang telah dikembangkan dengan dukungan dari National Science Foundation dan IEEE. Karena program tersebut terus menerus diperbarui, rekomendasi penggunaannya diberikan melalui Instructors' Manual (buku pegangan instruktur).

Pengarang berhutang budi kepada para koleganya, juga kepada para peninjau atas saran-saran yang mereka berikan dalam usaha penyempurnaan buku ini: David Jackson, Richard Liu, Stuart Long, Jeffrey Williams, dan Donald Wilton dari Universitas Houston; dan Hsiu Han, Kit Lai, Lifang Wang, Murat Veysoglu, dan Eric Yang dari Massachusetts Institute of Technology. Para peninjau edisi ketiga adalah:

I.M. Besieris
*Virginia Polytechnic Institute
and State University*
Lynn Carpenter
Pennsylvania State University
Hollace L. Cox, Jr.
University of Louisville
S. T. Hsieh
Tulane University
T. C. Poon
*Virginia Polytechnic Institute
dan State University*
Keith A. Ross
*South Dakota School of Mines
and Technology*
A. Safaai-Jazi

*Virginia Polytechnic Institute and
State University*
David R. Jackson
University of Houston
R. Janaswamy
U.S. Naval Postgraduate School
Hung-Mou Lee
U.S. Naval Postgraduate School
Stuart A. Long
The University of Houston
Surendra Singh
University of Tulsa
Glenn S. Smith
Georgia Institute of Technology
Robert D. Strattan
The University of Tulsa

KATA PENGANTAR EDISI KEDUA

Aplikasi Elektromagnetik merupakan sebuah topik yang menarik untuk kegiatan belajar dan mengajar. Aplikasi baru terus menerus dikembangkan. Kelihatannya ada kemungkinan yang tak terbatas bagi penemuan piranti elektromagnetik baru demi memenuhi tantangan teknologi modern. Buku ini telah direvisi untuk menyajikan lebih banyak contoh aplikasi yang menekankan kegunaan dan substansi topik elektromagnet yang, kami percaya, merupakan batu pijakan disiplin ilmu elektro.

Pada edisi baru ini terdapat penambahan sebuah bab yang membahas tentang daya radiasi elektromagnet dan tekanan radiasi. Seiring berkembangnya eksplorasi dan eksploitasi luar angkasa, pemahaman mengenai topik ini menjadi sangat dibutuhkan. Contoh aplikasi baru lainnya dalam edisi ini meliputi ekor komet, matriks yang *baseline*-nya sangat panjang, turboelektrisitas, pencetakan laser, pengkopian termomagnetik. Banyak problem baru telah ditambahkan dan jawaban untuk soal dengan nomor ganjil ada di Appendix E. Selain itu, banyak revisi kecil telah dibuat dan beberapa bagian telah ditulis ulang secara lengkap.

Pengarang berhutang budi kepada para rekan sejawat, mahasiswa, dan peninjau, yang menunjukkan berbagai kesalahan dan ketidakjelasan yang terdapat dalam naskah mentah edisi ini, dan telah melakukan penyempurnaan dengan memperjelas penyajian topik-topik tertentu. Rasa hormat kami sampaikan kepada mereka yang telah memberikan masukan yaitu David Jackson, Stuart Long, Soon Poh, Ann Tulintseff, Donald Wilton, Eric Yang, dan para peninjau edisi kedua ini: Donald Herrick, Environmental Research Institute of Michigan; Paul McIsaac, Cornell University; Paul Steffes, Georgia Institute of Technology; dan A. K. Chan, Texas A & M University.

PRAKATA EDISI PERTAMA

Buku ini dimaksudkan sebagai medium pengenalan aplikasi elektromagnetik bagi mahasiswa program sarjana, dengan materi untuk perkuliahan dua semester atau dua kuartal. Untuk kuliah satu semester, kami merekomendasikan 9 bab yang ditampilkan pada diagram alur pada hal vi.

APLIKASI ELEKTROMAGNETIK menyajikan teori elektromagnet dengan banyak contoh aplikasinya. Keistimewaan lain dari buku ini adalah bahwa medan elektromagnet dinamik disajikan sebelum pembahasan mengenai medan elektromagnet statik. Matematika lanjut dihindari. Dasar matematika yang diperlukan hanyalah pengetahuan tentang kalkulus dan pengetahuan dasar mengenai operator vektor del.

Teori Elektromagnetik yang umum diajarkan kepada mahasiswa biasanya disajikan dalam urutan sebagai berikut:

1. Pengenalan analisis vektor sebagai persiapan dalam penggunaan operator del dalam persamaan Maxwell.
2. Pembahasan medan statik, energi, gaya, dan—pada beberapa sekolah—juga medan kuasistatik.
3. Studi Gelombang Elektromagnet menggunakan persamaan Maxwell yang lengkap, dan diskusi mengenai saluran transmisi, tabung logam pemandu gelombang elektromagnetik yang berfrekuensi sangat tinggi, antena, dan dalam studi yang berorientasi fisika, dinamika partikel dalam medan elektromagnet.

Kami merasa urutan penyajian topik seperti ini kurang tepat. Peruntukan bab, dimulai dari listrik statik dan bergerak ke gelombang elektromagnetik, sebagian besar disebabkan oleh perkembangan dan aplikasi permesinan elektromagnetik. Pentingnya daya dan permesinan tetap ada walaupun era baru, yang berpusat pada aplikasi gelombang elektromagnetik pada laser, alat komunikasi, alat optik, dan penginderaan jauh, telah dimulai. Kami berpikir bahwa penyajian yang dimulai dengan gelombang dan dikhususkan pada statika dan kuasistatika adalah penyajian yang lebih logis dan lebih sederhana. Lebih logis, karena ketika suatu topik mencapai tingkat kedewasaan, pendekatan deduktif selalu lebih unggul daripada pendekatan induktif. Lebih sederhana, karena hukum gaya Lorentz tidak dibutuhkan dalam pembahasan gelombang. Selain itu, dengan penyajian seperti ini komplikasi koordinat silindris dan sferis dapat dihindari sampai tahap berikutnya, ketika mahasiswa sudah terbiasa dengan konsepnya.

Kemungkinan besar akibat pengaruh dari kebanyakan buku teks, teori elektromagnetik selama diajarkan dari sudut pandang kultural ketimbang dari sudut pandang yang menghubungkannya dengan sejumlah kemungkinan aplikasinya pada disiplin ilmu sains dan teknik lainnya. Tidak diragukan lagi bahwa teori elektromagnet, yang sangat elegan strukturnya dan sangat ketat formulasinya, merupakan topik dasar teknik elektro. Beberapa mahasiswa terpicat dengan keindahan teorinya dan memutuskan untuk mengabdikan

kehidupan profesionalnya pada topik ini. Namun, banyak mahasiswa lainnya, yang kepandaian dan selernya tidak cocok dengan abstraksi matematika, menjadi takut, dan mereka menghindari teori ini mereka tidak dapat melihat aplikasinya dalam bidang yang mereka minati. Jadi, kami merasa bahwa nilai kultural teori elektromagnetik ditingkatkan ketika mahasiswa mempelajari spektrum aplikasi elektromagnetik yang luas pada dunia sains dan teknik modern. Sebagaimana telah kami ungkapkan, urutan penyajian topik elektromagnet yang konvensional tidak harus mutlak dituruti. Dalam upaya memahami gelombang elektromagnetik, kita tidak perlu mempelajari statika. Sesungguhnya, setiap mahasiswa bisa menjadi sangat bergairah asalkan topik yang dipelajari relevan dengan pengalamannya sehari-hari dan sesuai dengan bidang yang dipilihnya. Dengan menimbang fakta ini, kami menghadirkan elektromagnet dalam sebuah buku teks yang bukan hanya menekankan pada aplikasi, tetapi sekaligus juga menjaga keistimewaan teori Maxwell yang unik dan koheren.

Bab 1 meninjau latar belakang matematika yang diperlukan. Bab 2 adalah dasar buku ini. Bab 3 dan 4 membahas aspek dasar gelombang elektromagnetik. Untuk kuliah satu semester, Bab 5, 6 dan 8 dapat mahasiswa abaikan. Misalnya, untuk mengerti bab 5 dan 6, mahasiswa harus menguasai bab 4. Namun demikian, Bab 7 juga merupakan sambungan dari bab 4, dan penghilangan bab 5 dan 6 tidak mempengaruhi kesinambungannya. Pembahasan kita tentang statika dimulai pada Bab 9. Selanjutnya, untuk kuliah satu semester, blok-blok diagram alir yang terletak di samping diagram aliran, yaitu bab 11, 12, 15, dan 16, dapat dihilangkan.

Penghargaan

Buku ini bertumpu pada catatan kuliah yang digunakan pengarang di University of Houston. Kami berhutang budi kepada para mahasiswa kami, dan rekan sejawat yang telah memberikan saran dan komentar yang bernilai, yang menghasilkan banyak perubahan berarti. Dalam kesempatan ini, kami juga sangat berterima kasih terutama kepada Profesor. Stuart A. Long dan Profesor Louis D. Smullin. Kami juga mengucapkan terima kasih yang tak ternilai untuk para peninjau naskah: Andrew Blanchard, Texas A & M University; Kenneth A. Connor, Rensselaer Polytechnic University; Henry Domingos, Clarkson College of Technology; Charles E. Smith, University of Mississippi; Glenn S. Smith, Georgia Institute of Technology; Sedki Riad, Virginia Polytechnic Institute and State University; Leung Tsang, Texas A & M University; dan Piergiorgio Uslenghi, University of Illinois at Chicago Circle. Pengoreksian naskah terakhir dikerjakan secara independen oleh Frank S. C. Huang, Sompongse Toomsawasdi, Soon Y. Poh, Tarek M. Habashi, Jay K. Lee dan S. L. Chuang. Naskah asli dan beberapa versi revisinya diketik oleh Cindy Kopf, Micki Maes, dan Diana Phillips. Akhirnya, dan yang paling penting, kami ingin mengungkapkan bahwa buku ini tidak mungkin dapat terwujud tanpa pengertian dan dorongan dari istri-istri kami, Wei Liu Shen dan Wen-yuan Yu Kong.

NOTASI, SIMBOL, DAN SATUAN

Skalar Real: Skalar real diindikasikan dengan jenis huruf miring (italic) atau huruf Yunani (Greek) - sebagai contohnya, a atau ρ .

Skalar Kompleks: Skalar kompleks diindikasikan dengan jenis huruf roman atau huruf Yunani tebal—sebagai contoh, r atau ρ_v .

Vektor Real: Vektor real diindikasikan dengan jenis huruf miring tebal - sebagai contohnya, \mathbf{B} .

Vektor Satuan: Vektor satuan—yaitu vektor yang magnitudonya sama dengan satu diindikasikan dengan simbol di atas jumlahnya dan jenis huruf tebal miring atau huruf Yunani—sebagai contoh, \hat{x}

Vektor Kompleks: vektor kompleks diindikasikan dengan jenis huruf tebal—sebagai contoh; \mathbf{J} .

Vektor dan Skalar Harmonik-Waktu: Besaran harmonik-waktu selalu dinyatakan dengan fungsi cosinus.

Sebagai contoh,

$$V(t) = a \cos(\omega t + \phi)$$

Notasi Fasor dari $V(t)$ yang telah diberikan di atas adalah

$$V = a \exp(j\phi) \exp(j\omega t).$$

Faktor $\exp(j\omega t)$ biasanya dihilangkan dalam penulisan. Ingat bahwa sebagian besar buku teknik elektro menggunakan $\exp(j\omega t)$.

Buku ini menggunakan satuan **SI** (Sistem Internasional). Appendiks A berisi daftar simbol yang sering digunakan beserta satuannya.

9 MEDAN ELEKTROSTATIK

Dalam buku ini, kita akan menyelidiki perilaku dan aplikasi medan elektromagnetik di mana ω mendekati nol sebagai sebuah limit. Di bawah limit $\omega = 0$, persamaan Maxwell akan terurai; satu kelompok membawahi medan elektrostatik, yang sumbernya adalah muatan statik, dan kelompok lainnya membawahi medan magnetostatik, yang sumbernya adalah arus tunak.

Muatan listrik dapat terdistribusi secara merata dalam sebuah volume bola, menghasilkan sebuah **muatan bola** (*spherical charge*); maupun terdistribusi secara merata sepanjang sebuah garis lurus, menghasilkan sebuah **muatan garis** (*line charge*); atau terdistribusi secara merata di atas sebuah bidang, menghasilkan sebuah **muatan bidang** (*plane charge*). Ketika jari-jari muatan bola mendekati nol sementara muatan total dalam volume tetap tidak berubah, kita menyebut muatan itu sebagai **muatan titik** (*point charge*). Dalam bab-bab awal kita melihat kegunaan sebuah muatan titik yang ideal seperti antena dipol Hertzian. Distribusi muatan yang disebut di atas memiliki fungsi yang sama. Dalam bab ini kami akan mengembangkan teknik menghitung medan listrik untuk sejumlah distribusi muatan ini. Kami juga mengembangkan konsep potensial elektrostatik yang bermanfaat.

9.1 POTENSIAL ELEKTROSTATIK

Pada Bab 7 kita telah melihat bagaimana arus dan muatan yang berosilasi membangkitkan gelombang elektromagnetik. Ketika $\omega = 0$, kita menduga semua medan tetap konstan terhadap waktu. Artinya, $\partial/\partial t$ adalah nol ketika dioperasikan pada \mathbf{B} atau \mathbf{D} . Jadi, keempat persamaan Maxwell akan menjadi sebagai berikut:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (9.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \quad (9.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (9.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (9.4)$$

Ingat bahwa dua persamaan pertama tidak mengandung medan magnet dan dua persamaan terakhir tidak mengandung medan listrik. Jadi, ketika medan elektromagnetik tidak berubah terhadap waktu, munculnya medan listrik tidak bergantung pada munculnya medan magnet, demikian pula sebaliknya. Dalam bab ini kita akan mempelajari medan elektrostatik yang dihasilkan oleh sebuah muatan tetap ρ_v . Secara matematis, kita akan mempelajari penyelesaian untuk dua persamaan Maxwell yang pertama, (9.1) dan (9.2). Bab 13 mempelajari medan magnetostatik.

Dalam media yang sederhana, D dan E dihubungkan oleh sebuah konstanta yang disebut permitivitas:

$$D = \epsilon E \quad (\text{definisi permitivitas}) \quad (9.5)$$

di mana ϵ adalah bilangan real.

Putaran (curl) sebuah gradien dari sebuah fungsi skalar dianggap nol menurut (2.11b). Jadi, (9.1) menegaskan bahwa E dapat dinyatakan sebagai gradien dari beberapa fungsi skalar. Oleh karena itu, kita menulis

$$E = -\nabla\Phi \quad (\text{definisi potensial skalar}) \quad (9.6)$$

yang sama dengan persamaan (7.3) dengan $\omega = 0$. Memasukkan (9.6) dan (9.5) ke dalam (9.2) akan menghasilkan

$$\nabla^2\Phi = \frac{-\rho_v}{\epsilon} \quad (\text{persamaan Poisson}) \quad (9.7)$$

yang sama dengan (7.6) dengan $k = 0$. Penyelesaian untuk (9.7) adalah (7.8) dengan k sama dengan nol:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_V \frac{\rho_v(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (\text{integral Poisson}) \quad (9.8)$$

Persamaan (9.7) dikenal sebagai **persamaan Poisson** (*Poisson equation*), yang merupakan persamaan diferensial parsial. Persamaan (9.8) dikenal sebagai **integral Poisson** (*Poisson integral*), yang melibatkan integrasi terhadap semua volume yang mengandung distribusi muatan $\rho_v(\mathbf{r}')$, di mana \mathbf{r} adalah koordinat dari titik yang diamati dan \mathbf{r}' adalah koordinat dari distribusi muatan.

Apabila distribusi muatan diketahui, kita dapat mensubstitusikannya dalam (9.8), melakukan integrasi, dan memperoleh potensial pada semua titik yang kita anggap penting. Setelah potensial dihitung, medan listrik langsung diperoleh dari (9.6). Dalam bagian ini kita akan mencari potensial yang dibentuk oleh beberapa muatan yang tipikal (umum)—yaitu, muatan titik, muatan garis, dan muatan bidang. Tetapi sebelumnya, mari kita perhatikan bahwa satuan potensial adalah **volt**. Sebagai contoh, untuk baterai 12 volt, potensial pada terminal positif adalah 12 volt lebih tinggi daripada potensial pada terminal negatif.

Potensial dari Muatan Titik

Distribusi muatan yang mendapat perhatian khusus adalah muatan titik, yang merupakan idealisasi dari sebuah partikel bermuatan, seperti elektron, proton, atau nukleus. Untuk sebuah muatan titik yang diletakkan pada titik asal sistem koordinat dan menempati sebuah volume diferensial $\Delta V'$, muatan total q diberikan oleh

$$q = \rho_v \Delta V' \quad (9.9)$$

Sebagai contoh, sebuah elektron membawa muatan $q = -1,6 \times 10^{-19}$ C. Dari integral Poisson (9.8), kita dapatkan bahwa potensial dari muatan titik diberikan oleh

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon r} \quad (\text{potensial skalar dari sebuah muatan titik dalam koordinat bola}) \quad (9.10)$$

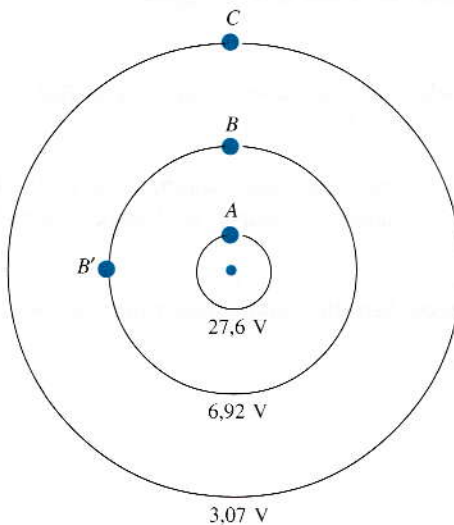
Kita melihat bahwa potensial hanya bergantung pada koordinat r , dan fakta ini adalah sebuah akibat langsung dari simetri distribusi muatan. Jadi, semua titik pada permukaan bola yang berpusat pada titik asal memiliki tegangan yang sama. Permukaan di mana semua titik memiliki nilai potensial yang sama disebut **permukaan ekipotensial** (*equipotential surface*).

Contoh 9.1 *Contoh ini menunjukkan bahwa permukaan ekipotensial yang ditimbulkan oleh sebuah muatan titik merupakan permukaan bola konsentris yang berpusat pada muatan tersebut.*

Atom hidrogen, menurut model Bohr, memiliki sebuah elektron yang berputar mengelilingi nukleus. Nukleus membawa muatan $q = 1,6 \times 10^{-19}$ C. Orbit terkuantisasi tempat elektron berputar ditetapkan sebagai 0,52 Å, 2,08 Å, 4,68 Å, dan seterusnya. Potensial yang dialami oleh elektron pada tiga permukaan ekipotensial ini dihitung dari (9.10)—yaitu,

$$\Phi(r) = \frac{1,6 \times 10^{-19}}{4\pi\epsilon r}$$

yang menghasilkan $\Phi(0,52 \text{ Å}) = 27,6 \text{ V}$, $\Phi(2,07 \text{ Å}) = 6,92 \text{ V}$, dan $\Phi(4,68 \text{ Å}) = 3,07 \text{ V}$. Gambar 9.1 menunjukkan tiga permukaan potensial ini.



Gambar 9.1 Permukaan ekipotensial dekat atom hidrogen (model Bohr).

Beda Potensial

Beda potensial V_{AB} antara titik A dan titik B dalam medan elektrostatis didefinisikan sebagai perbedaan nilai dari Φ di A dan di B—yaitu,

$$V_{AB} = \Phi(\text{di } A) - \Phi(\text{di } B) \text{ volt}$$

$$\text{(beda potensial antara titik A dan titik B)} \quad (9.11)$$

Jadi, dalam medan atom hidrogen yang ditunjukkan dalam Gambar 9.1, $V_{AB} = 20,68 \text{ volt}$, $V_{AC} = 24,53 \text{ volt}$, $V_{BB'} = 0$, $V_{BA} = -V_{AB} = -20,68 \text{ volt}$, dan $V_{AB'} = 20,68 \text{ volt}$.

Ingat bahwa jika kita menambahkan suatu konstanta pada fungsi potensial (9.8) atau (9.10), Persamaan (9.6) dan (9.7) tidak terpengaruh karena diferensiasi suatu konstanta selalu menghasilkan nol. Jadi, kita boleh saja menambahkan suatu konstanta pada semua nilai potensial di sembarang titik dalam ruang. Konstanta ini hanya mengubah titik referensi. Beda potensial antara dua titik sembarang tidak terpengaruh.

Untuk memanfaatkan fleksibilitas ini dalam pemilihan referensi potensial, nilai potensial bumi biasanya ditetapkan nol. Jadi, dalam sebuah rangkaian, titik dinyatakan “ditanahkan” jika tegangannya sama dengan nol.

Potensial Akibat N Muatan Titik

Potensial merupakan fungsi skalar. Dari persamaan Poisson (9.7) dan integral Poisson (9.8), kita melihat bahwa potensial adalah fungsi linear dari kerapatan muatan. Jadi, potensial akibat N muatan titik merupakan penjumlahan dari N potensial yang diakibatkan oleh tiap-tiap N muatan.

$$\Phi = \sum_{n=1}^N \frac{q_n}{4\pi\epsilon r_n}$$

(potensial akibat N muatan titik)

(9.12)

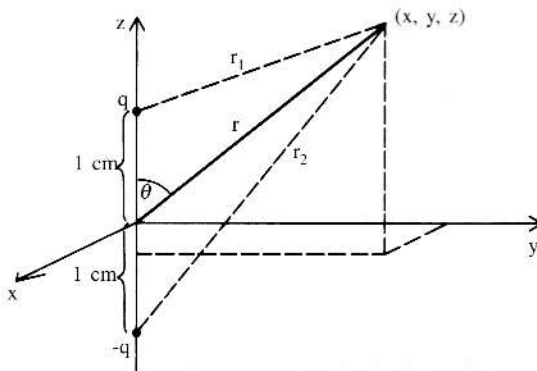
di mana r_n adalah jarak antara muatan ke- n dan titik pengamatan.

Contoh 9.2

Untuk menentukan potensial akibat dua muatan titik, kita dapat menggunakan rumus umum (9.12) dan memisalkan $N = 2$.

Dua buah muatan sebesar q dan $-q$ coulomb masing-masing terletak pada $(0, 0, 0,01)$ dan $(0, 0, -0,01)$, seperti yang ditunjukkan dalam Gambar 9.2a. Tentukan Φ pada (x, y, z) .

Gambar 9.2(a) Potensial yang disebabkan oleh suatu sistem dua-muatan.



Solusi

$$\Phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon r_1} + \frac{-q}{4\pi\epsilon r_2}$$

(9.13)

Karena

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - 0,01)^2}$$

dan

$$r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + 0,01)^2}$$

kita dapatkan

$$\Phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 0,01)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + 0,01)^2}} \right) \quad (9.14)$$

Ingat bahwa potensial bernilai nol pada bidang x - y , di mana $z = 0$.

Potensial Akibat Dipol Elektrostatik

Sebuah dipol elektrostatik dibentuk oleh dua muatan yang memiliki magnitudo yang sama tetapi berlainan tanda dan dipisahkan oleh sebuah jarak yang sangat pendek, seperti ditunjukkan dalam Gambar 9.2b. Distribusi muatan ini mirip dengan distribusi yang ditunjukkan dalam Gambar 9.2a kecuali bahwa pada kasus terakhir ini, pemisahan muatan positif dan negatif adalah terhingga.

Potensial dipol sangat mirip dengan yang diberikan oleh (9.13):

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (9.15)$$

kecuali bahwa potensial ini mengharuskan $d \ll r_1$, atau r_2 .

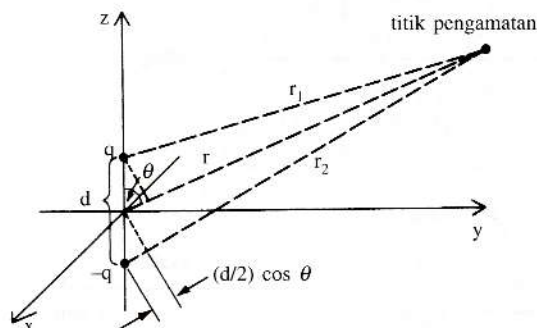
Dengan menggunakan koordinat bola, kita dapat melakukan pendekatan

$$\begin{aligned} r_1 &= \left[x^2 + y^2 + \left(z - \frac{d}{2} \right)^2 \right]^{1/2} = \left(r^2 - dz + \frac{d^2}{4} \right)^{1/2} \\ &\approx r \left(1 - \frac{dz}{r^2} \right)^{1/2} \approx r \left(1 - \frac{1}{2} \frac{d}{r} \cos \theta \right) = r - \frac{1}{2} d \cos \theta \end{aligned} \quad (9.16a)$$

Demikian pula,

$$r_2 \approx r + \frac{1}{2} d \cos \theta \quad (9.16b)$$

Gambar 9.2(b) Sebuah dipol elektrostatik untuk $d \rightarrow 0$.



Jadi,

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r - \frac{d \cos \theta}{2}} - \frac{1}{r + \frac{d \cos \theta}{2}} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{d \cos \theta}{r^2 - (d^2 \cos^2 \theta / 4)}$$

Sekarang, dengan mengabaikan suku yang mengandung d^2 dan mempertahankan suku d , kita dapatkan

$$\Phi(r, \theta) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon r^2} \quad (\text{potensial akibat sebuah dipol listrik}) \quad (9.17)$$

di mana $p = qd$, yang sering disebut sebagai **momen dipol** (*dipole moment*). Dengan membandingkan persamaan di atas dan (9.10), kita lihat bahwa bila jarak dari satu atau beberapa muatan bertambah, potensial turun menurut $1/r$ untuk muatan titik dan menurut $1/(r^2)$ untuk sebuah dipol.

Contoh 9.3 Contoh ini menunjukkan bagaimana menentukan permukaan ekuipotensial akibat sebuah dipol listrik.

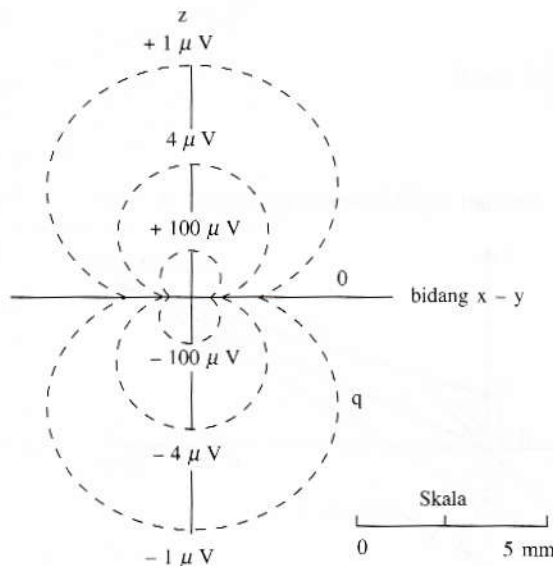
Anggap bahwa magnitudo muatan dari dipol elektrostatik adalah $10^6 |q_e|$, di mana q_e adalah muatan dari sebuah elektron dan $d = 10^{-6}$ m. Sketsa permukaan ekuipotensial.

Solusi Dengan mensubstitusikan nilai q dan d dalam persamaan (9.17), kita memperoleh persamaan permukaan ekuipotensial dari tegangan V ,

$$r = 10^{-5} \left(\frac{14,4 \cos \theta}{V} \right)^{1/2} \text{ meter}$$

Gambar 9.3 menunjukkan permukaan.

Gambar 9.3 Permukaan ekuipotensial dari sebuah dipol dengan $p = 1,6 \times 10^{-19}$ C-m.



9.2 MEDAN ELEKTROSTATIK

Medan elektrostatis E akibat sebuah muatan titik didapatkan dengan mensubstitusikan (9.10) ke dalam (9.6):

$$E = -\nabla\Phi = -\nabla \frac{q}{4\pi\epsilon r}$$

Jadi,

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{r} \quad (\text{medan listrik akibat sebuah muatan titik}) \quad (9.18)$$

Contoh 9.4 Medan listrik dapat diperoleh dengan menghitung gradien dari fungsi potensial.

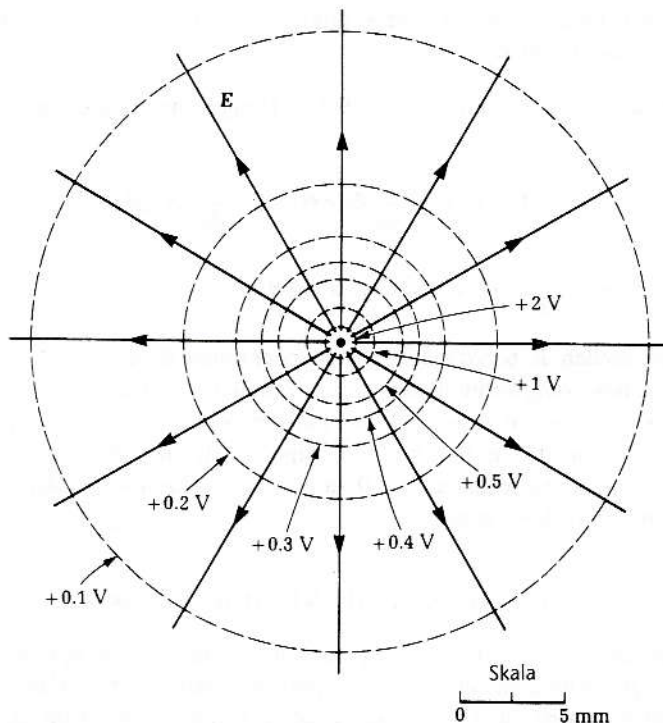
Tentukan medan E akibat sebuah muatan titik sebesar $10^6 |q_e|$ coulomb dalam udara.

Solusi

$$E = \frac{+1,44 \times 10^{-3}}{r^2} \hat{r}$$

Medan listrik sekarang digambarkan sebagai garis dengan arah tanda panah yang secara radial menjauhi muatan, seperti ditunjukkan dalam Gambar 9.4. Perhatikan bahwa tanda panah selalu mengarah dari permukaan potensial dengan tegangan yang lebih tinggi menuju tegangan yang lebih rendah.

Gambar 9.4 Permukaan ekipotensial dan garis medan E karena sebuah muatan titik dengan $10^6 |q_e|$ C.



Medan E Akibat N Muatan

Kita dapat memperoleh medan listrik akibat N muatan dengan dua metode. Pertama, kita dapat menentukan fungsi potensial dari sistem muatan ini dengan prinsip superposisi yang dinyatakan dalam (9.12). Kita kemudian mensubstitusikan potensial dalam (9.6) untuk memperoleh medan E .

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{n=1}^N \frac{q_n}{4\pi\epsilon r_n} \quad (9.19a)$$

$$E(x, y, z) = -\nabla \sum_{n=1}^N \frac{q_n}{4\pi\epsilon r_n} \quad (9.19b)$$

Metode kedua adalah aplikasi langsung prinsip superposisi pada persamaan medan (9.18):

$$E(x, y, z) = \sum_{n=1}^N \frac{q_n}{4\pi\epsilon r_n^2} \hat{r}_n \quad (\text{medan listrik akibat } N \text{ muatan titik}) \quad (9.19c)$$

di mana r_n adalah jarak antara titik pengamatan dan muatan ke- n di mana vektor satuan \hat{r}_n terletak pada arah dari muatan ke- n menuju titik pengamatan.

Contoh 9.5 Untuk menentukan medan listrik akibat N muatan titik, kita dapat menggunakan (9.19b) atau (9.19c). Yang terakhir merupakan sebuah persamaan vektor. Jika potensial skalar diketahui, akan lebih mudah menentukan medan E dengan menggunakan metode gradien.

Tentukan medan listrik E untuk dipol yang ditunjukkan dalam Gambar 9.2b, dan sketsa garis-garis medan E .

Solusi Potensial $\Phi(r, \theta)$ diperoleh dari (9.17). Dengan menggunakan sistem koordinat bola, kita dapatkan

$$\begin{aligned} E &= -\nabla\Phi(r, \theta) = -\hat{r} \frac{\partial}{\partial r} \Phi(r, \theta) - \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \Phi(r, \theta) \\ &= \frac{p}{4\pi\epsilon r^3} (\hat{r} 2 \cos \theta + \hat{\theta} \sin \theta) \end{aligned} \quad (9.20)$$

Vektor medan E berada dalam arah penurunan Φ dan tegak lurus terhadap permukaan ekuipotensial yang ditunjukkan dalam Gambar 9.5. Dari Gambar 9.5, kita melihat bahwa semua garis medan E berasal dari muatan positif dan berakhir pada muatan negatif.

Solusi medan E untuk antenna dipol Hertzian yang beresilasi dapat diturunkan dari (7.14) dengan menetapkan $\omega = 0$ karena, dalam limit statik, dipol Hertzian yang beresilasi akan menjadi dipol statis.

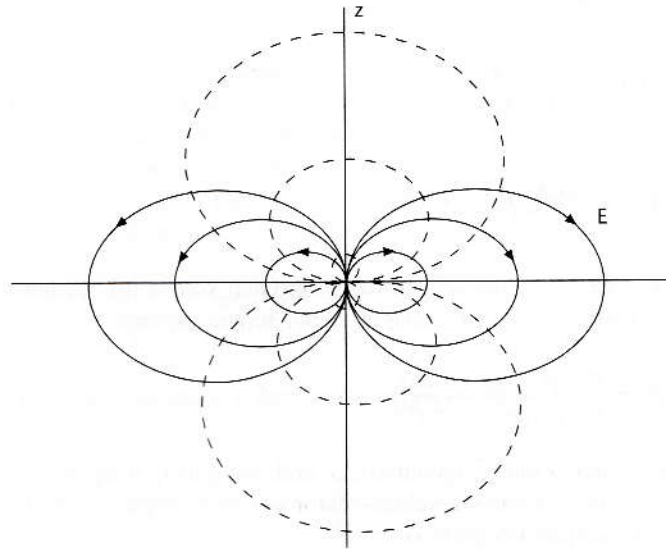
Medan E Akibat Sebuah Muatan Garis

Perhatikan sebuah garis tipis yang membawa muatan listrik ρ_ℓ coulomb per meter (perhatikan satuan ρ_ℓ). Kita menganggap bahwa garis tersebut terbentang dari $z = -h$ ke $z = h$ sepanjang sumbu z , seperti yang ditunjukkan dalam Gambar 9.6a. Kita akan menentukan medan E

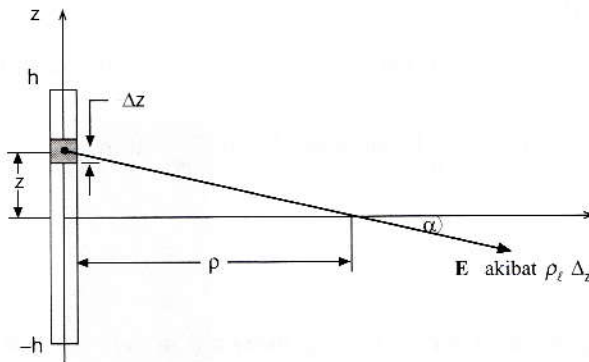
dalam bidang x - y . Dalam koordinat silinder, sebagai akibat simetri azimut, kita mencari pemecahan untuk medan E sepanjang sumbu ρ .

Untuk memulainya, muatan garis dibagi ke dalam segmen-segmen kecil dengan panjang Δz . Setiap segmen mengandung sebuah muatan $\rho_\ell \Delta z$ coulomb, dan masing-masing dapat

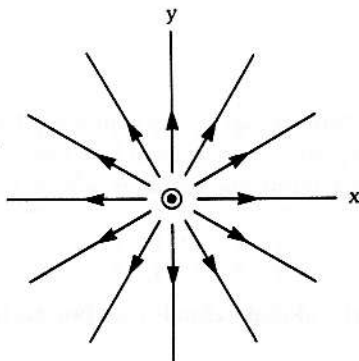
Gambar 9.5 Medan listrik (garis tak terputus) dan permukaan ekipotensial (garis putus-putus) dari suatu dipol elektrostatis.



Gambar 9.6(a) Medan sepanjang sumbu ρ akibat sebuah muatan garis.



Gambar 9.6(b) Garis-garis medan E dari sebuah muatan garis.



dianggap sebagai sebuah muatan titik. Medan listrik akibat sebuah segmen tertentu yang ditempatkan pada z diberikan oleh (9.18):

$$\Delta E = \frac{\rho_l \Delta z}{4\pi\epsilon(\rho^2 + z^2)} (\hat{\rho} \cos \alpha - \hat{z} \sin \alpha)$$

Mengacu pada Gambar 9.6a,

$$\cos \alpha = \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}}$$

$$\sin \alpha = \frac{z}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}}$$

Jadi,

$$\Delta E = \frac{\rho_l \Delta z (\hat{\rho} \rho - \hat{z} z)}{4\pi\epsilon(\rho^2 + z^2)^{3/2}}$$

Ingat bahwa ΔE bukan sebuah fungsi ϕ . Oleh karena itu, medan E merupakan jumlah dari masing-masing medan E sebagai akibat semua segmen:

$$E = \int_{-h}^h \frac{\rho_l \Delta z (\hat{\rho} \rho - \hat{z} z)}{4\pi\epsilon(\rho^2 + z^2)^{3/2}}$$

Vektor satuan $\hat{\rho}$ dan \hat{z} menunjuk ke arah yang tetap dengan z berubah dari $-h$ ke h dalam integrasi. Oleh karena itu, vektor-vektor satuan ini dapat dikeluarkan dari integral, sehingga integrasi menjadi integrasi skalar:

$$E = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon} \left[\hat{\rho} \int_{-h}^h \frac{dz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} - \hat{z} \int_{-h}^h \frac{z dz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \right]$$

Dengan menggunakan variabel $z = \rho \tan \alpha$, $dz = \rho \sec^2 \alpha d\alpha$, kita memiliki

$$E = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon} \left(\hat{\rho} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \cos \alpha d\alpha - \hat{z} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \sin \alpha d\alpha \right) = \hat{\rho} \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon\rho} \sin \alpha_0 \quad (9.21)$$

di mana

$$\alpha_0 = \tan^{-1} \frac{h}{\rho}$$

Kita melihat bahwa dalam limit $h/\rho \ll 1$, yang menyiratkan bahwa h sangat kecil atau bahwa ρ sangat besar, $\sin \alpha_0 \approx h/\rho$, dan kita peroleh

$$E = \hat{\rho} \frac{\rho_l (2h)}{4\pi\epsilon\rho^2}$$

yang merupakan hasil untuk sebuah muatan titik sebesar $\rho_l(2h)$ coulomb. Dengan kata lain, sebuah muatan garis yang pendek terlihat seperti sebuah muatan titik dari jarak yang jauh.

Untuk kasus kawat dengan panjang tak terhingga sehingga $h/\rho \gg 1$ dan $\alpha_0 = \tan^{-1}(h/\rho) \approx \pi/2$, kita dapatkan dari (9.21) bahwa

$$E = \hat{\rho} \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon\rho}$$

(medan listrik akibat sebuah muatan garis) (9.22)

Perhatikan bahwa E berbanding terbalik terhadap jarak untuk sebuah muatan garis, sementara untuk sebuah muatan titik, E akan berbanding terbalik terhadap kuadrat jarak. Gambar 9.6b memperlihatkan garis medan E dalam bidang x - y yang diakibatkan oleh muatan garis.

Medan E Akibat Sebuah Muatan Bidang

Perhatikan sebuah bidang dengan luas tak hingga yang mengandung sebuah rapat muatan seragam ρ_s coulomb per meter persegi (perhatikan satuan ρ_s), seperti ditunjukkan dalam Gambar 9.7a. Kita ingin menentukan medan E sepanjang sumbu x yang dihasilkan oleh muatan bidang ini.

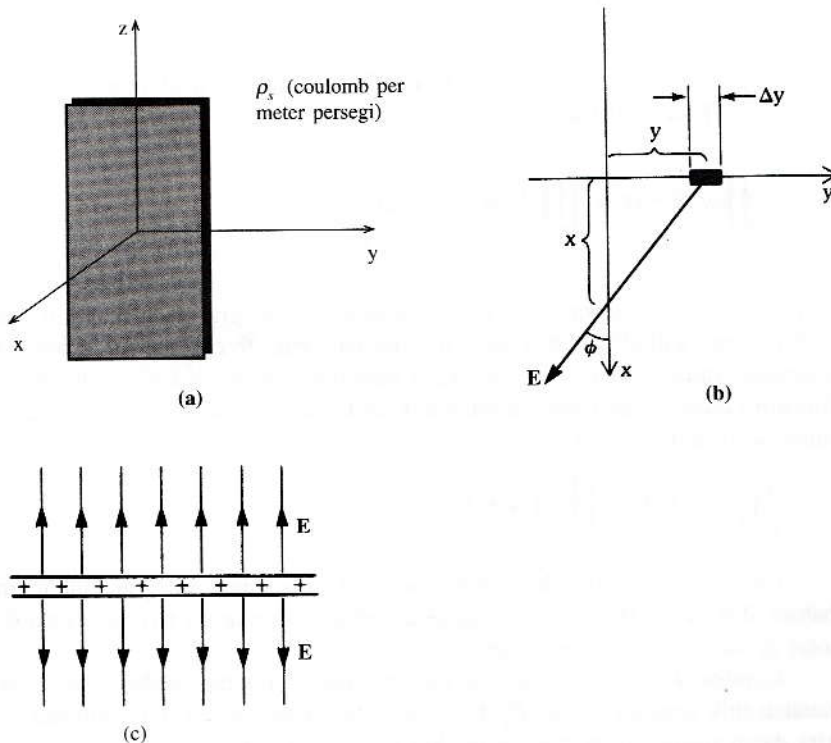
Karena kita mengetahui penyelesaian untuk sebuah muatan garis, kita membagi muatan bidang ini ke dalam banyak strip tipis yang masing-masing mempunyai lebar Δy . Gambar 9.7b menunjukkan sebuah strip yang umum dijumpai. Setiap strip dapat dianggap sebagai sebuah muatan garis panjang tak hingga dengan $\rho_\ell = \rho_s \Delta y$ coulomb per meter. Medan listrik pada $(x, 0, 0)$ akibat muatan garis tertentu yang ditunjukkan pada Gambar 9.7, berdasarkan (9.22), adalah

$$\Delta E = \frac{\rho_s \Delta y}{2\pi\epsilon \sqrt{x^2 + y^2}} \left(\frac{\hat{x}x - \hat{y}y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

Kemudian kita mengintegrasikan y dari $-\infty$ sampai $+\infty$ untuk mendapatkan kontribusi dari semua strip:

$$E(x) = \frac{\rho_s}{2\pi\epsilon} \left(\hat{x} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{x}{x^2 + y^2} - \hat{y} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \quad (9.23)$$

Gambar 9.7 (a) Sebuah muatan bidang. (b) Medan E akibat sebuah strip muatan yang terletak pada $(0, y)$. (c) Garis medan E dari sebuah muatan bidang.



Integral kedua bernilai nol karena integrand merupakan fungsi ganjil. Untuk menghitung integral yang pertama, kita anggap

$$\begin{aligned}y &= x \tan \phi \\ dy &= x \sec^2 \phi \, d\phi\end{aligned}\quad (9.24)$$

sehingga

$$E(x) = \frac{\hat{x}\rho_s}{2\pi\epsilon} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x^2 \sec \phi \, d\phi}{x^2(1 + \tan^2 \phi)} = \frac{\rho_s}{2\epsilon} \hat{x}$$

$E(x) = \frac{\rho_s}{2\epsilon} \hat{x}$

(medan listrik akibat sebuah muatan
bidang untuk $x > 0$)

(9.25a)

Jadi, medan E merupakan sebuah vektor konstan yang tidak bergantung pada koordinatnya. Untuk $x < 0$, kita memiliki

$E(x) = \frac{\rho_s}{2\epsilon} (-\hat{x})$

(medan listrik akibat sebuah muatan
bidang untuk $x < 0$)

(9.25b)

Hasil ini berlaku karena, sesuai dengan (9.24), jika $x < 0$, limit atas dari integral adalah $-\pi/2$, dan limit bawahnya adalah $\pi/2$, hasil sebaliknya diperoleh untuk $x > 0$.

Karena medan E tidak bergantung pada z , kita dapatkan sketsa garis-garis medan E sebagai akibat muatan bidang dengan luas tak hingga, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 9.7c. Medan E akibat sebuah muatan bidang yang tak hingga adalah vektor konstan dengan arah menjauhi bidang (diasumsikan ρ_s positif).

9.3 HUKUM GAUSS DAN APLIKASINYA

Sekarang kita mengintegrasi hukum Gauss (9.2) terhadap sebuah permukaan S yang menutupi volume V . Kita dapatkan

$$\oint_S d\mathbf{s} \cdot \hat{n} \cdot \mathbf{D} = \iiint_V dv \, \rho_v$$

(hukum Gauss)

(9.26)

di mana \hat{n} adalah normal luar dari permukaan S . Integral pada ruas kiri merupakan hasil dari teorema kalkulus vektor yang disebut **teorema divergensi** (*divergence theorem*) atau **teorema Gauss** (*Gauss theorem*), yang merupakan teorema matematika yang berbeda dari **hukum Gauss** (*Gauss law*), sebuah hukum fisika. Teorema divergensi menyatakan bahwa untuk sembarang vektor \mathbf{A} ,

$$\iiint_V dv \nabla \cdot \mathbf{A} = \oint_S d\mathbf{s} \cdot \hat{n} \cdot \mathbf{A} \quad (9.27)$$

Persamaan (9.26) disebut sebagai hukum Gauss bentuk integral. Hukum ini menyatakan bahwa fluks total \mathbf{D} yang meninggalkan sebuah permukaan tertutup sama dengan muatan total di dalam permukaan tersebut.

Gambar 9.8 mengilustrasikan hukum Gauss. Anggap medan total E akibat keempat muatan titik tersebut adalah E_r . Kemudian, tanpa memecahkan persamaan eksak untuk E_r , kita dapat memperoleh integral berikut melalui (9.26):

$$\oiint_{S_1} ds \hat{n} \cdot \mathbf{E}_t = \frac{Q}{\epsilon}$$

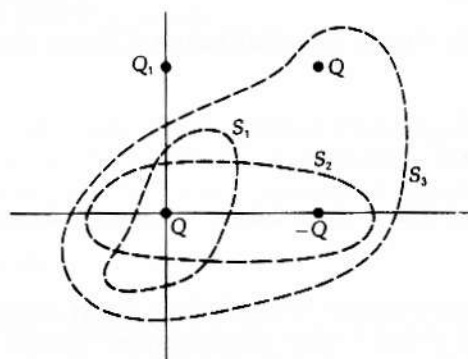
$$\oiint_{S_2} ds \hat{n} \cdot \mathbf{E}_t = 0$$

$$\oiint_{S_3} ds \hat{n} \cdot \mathbf{E}_t = \frac{Q}{\epsilon}$$

Ingat bahwa integrasi dari $\hat{n} \cdot \mathbf{E}_t$ terhadap S_1 , S_2 , atau S_3 tidak dipengaruhi oleh Q_1 karena, meskipun Q_1 mempengaruhi E_r , Q_1 tidak mempengaruhi integrasi $\hat{n} \cdot \mathbf{E}_t$ setiap permukaan yang tidak melingkupi Q_1 .

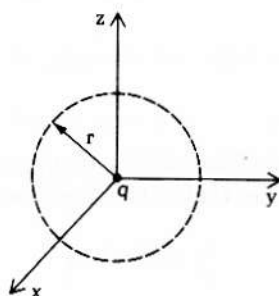
Hukum Gauss dalam bentuk (9.26) sangat berguna dalam menyelesaikan permasalahan yang melibatkan distribusi muatan simetri. Permukaan tertutup yang mengelilingi distribusi muatan disebut sebagai **permukaan Gauss**. Dalam contoh-contoh berikut, kami menunjukkan bahwa dengan memanfaatkan simetri dari sebuah distribusi muatan yang diberikan dan secara berhati-hati memilih permukaan Gauss, kita dapat menentukan medan \mathbf{E} lebih tepat dengan menggunakan (9.26).

Gambar 9.8 Hukum Gauss yang diterapkan pada permukaan-permukaan yang berbeda.



Contoh 9.6 Contoh ini menunjukkan bahwa kita dapat menghasilkan rumus untuk medan listrik akibat sebuah muatan titik dengan menggunakan hukum Gauss.

Tentukan medan \mathbf{E} akibat sebuah muatan titik q coulomb yang terletak pada titik asal, seperti ditunjukkan pada Gambar 9.9.



Gambar 9.9 Ruang bola yang melingkupi muatan q .

Solusi

Kita akan melingkupi muatan dengan permukaan Gauss berbentuk bola beradius r yang berpusat pada muatan. Sekarang dengan menggunakan hukum Gauss (9.26), kita dapatkan

$$\oiint \hat{r} \cdot E \, ds = \frac{1}{\epsilon} \iiint \rho_v \, dv = \frac{q}{\epsilon}$$

atau

$$\oiint E_r \, ds = \frac{q}{\epsilon}$$

di mana E_r adalah komponen r dari E dalam koordinat bola.

Berdasarkan simetri, kita lihat bahwa E_r seharusnya merupakan sebuah konstanta pada permukaan bola. Jadi, E_r dapat dikeluarkan dari tanda integrasi:

$$E_r \oiint ds = \frac{q}{\epsilon}$$

Integral pada ruas kiri semata-mata merupakan luas total dari permukaan $4\pi r^2$; jadi,

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon}$$

atau

$$E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2}$$

Selain itu, dari simetri, kita lihat bahwa E hanya dapat memiliki sebuah komponen \hat{r} sehingga

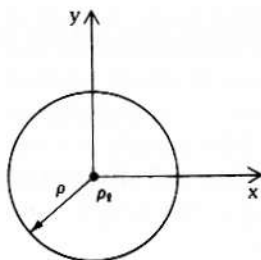
$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{r}$$

Hasil ini sesuai dengan yang didapat sebelumnya dalam (9.18).

Contoh 9.7

Contoh ini menunjukkan bahwa hukum Gauss dapat digunakan untuk memperoleh medan listrik akibat sebuah muatan garis. Rumus yang serupa telah diturunkan dengan metode integrasi, seperti yang diberikan oleh (9.22).

Tentukan medan E akibat sebuah muatan garis ρ_ℓ coulomb per meter yang terletak pada titik asal, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 9.10.



Gambar 9.10 Sebuah permukaan silinder melingkupi muatan garis ρ_ℓ (pandangan ujung)

Kita lingkupi muatan garis dengan sebuah permukaan Gauss silinder dengan jari-jari ρ dan tinggi $2h$ dengan $h \rightarrow \infty$. Dengan menerapkan hukum Gauss, kita dapatkan

$$\oiint \hat{\rho} \cdot E \, ds = \frac{\rho_\ell (2h)}{\epsilon}$$

Karena simetri, $E = \hat{\rho} E_\rho$. Jadi, kita memperoleh

$$E_\rho(2\pi\rho)(2h) = \frac{\rho_\ell(2h)}{\epsilon}$$

sehingga

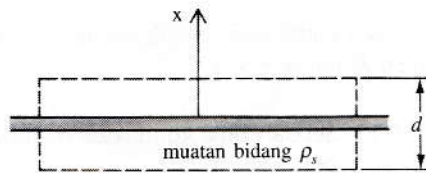
$$E_\rho = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon\rho}$$

yang sama dengan (9.22).

Contoh 9.8

Sekali lagi, contoh ini menunjukkan bahwa hukum Gauss langsung mengarah pada rumus untuk medan listrik akibat sebuah muatan bidang.

Tentukan medan E akibat sebuah muatan bidang yang terletak pada bidang y - z , seperti ditunjukkan pada Gambar 9.11.



Gambar 9.11 Suatu persegi panjang melingkupi muatan bidang ρ_s .

Solusi

Kita melingkupi muatan bidang dengan sebuah permukaan Gauss persegi panjang dengan tebal d dan luas A di mana $A \rightarrow \infty$. Berdasarkan simetri, E berada pada arah \hat{x} untuk $x > 0$ dan pada arah $-\hat{x}$ untuk $x < 0$. Dengan menerapkan hukum Gauss, kita dapatkan

$$\hat{x} \cdot (\hat{x}E_x)A + (-\hat{x}) \cdot (-\hat{x}E_x)A = \frac{\rho_s A}{\epsilon}$$

Perhatikan bahwa ketebalan d tidak masuk dalam ruas kiri karena E tidak memiliki komponen y ataupun z , artinya, $\hat{y} \cdot E = \hat{z} \cdot E = 0$. Dari persamaan di atas dihasilkan

$$E_x = \frac{\rho_s}{2\epsilon}$$

yang sama dengan yang telah kita dapatkan untuk muatan bidang ρ_s dalam (9.25).

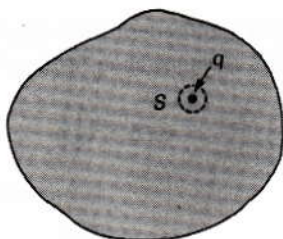
Contoh 9.9

Sebuah akibat yang sangat penting dari hukum Gauss adalah munculnya muatan listrik pada sebuah konduktor. Contoh ini menunjukkan bahwa muatan listrik hanya muncul pada permukaan sebuah konduktor, tidak di dalamnya.

Tunjukkan bahwa tidak ada muatan di dalam sebuah benda konduktor sempurna.

Anggap bahwa di salah satu tempat di dalam konduktor sempurna terdapat sebuah muatan q . Kemudian, kita buat gambar sebuah permukaan Gauss S mengelilingi muatan, seperti ditunjukkan pada Gambar 9.12. Dari (9.26), kita dapatkan

$$\oint_S \hat{n} \cdot E = \frac{q}{\epsilon}$$

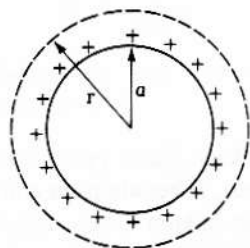


Gambar 9.12 Tidak boleh ada muatan di dalam sebuah benda konduktor sempurna—artinya, q selalu sama dengan nol.

Tetapi berdasarkan definisi, E sama dengan nol di dalam konduktor sempurna. Jadi, integrasi menghasilkan nol, menyebabkan $q = 0$ di semua tempat di dalam konduktor sempurna.

Contoh 9.10 Contoh sebelumnya (9.6 hingga 9.8) menunjukkan bagaimana untuk menggunakan hukum Gauss mendapatkan kembali hasil yang diperoleh dari metode integrasi. Contoh ini menunjukkan bahwa hukum Gauss dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan baru.

Sebuah bola konduktor pejal dengan radius a membawa sebuah muatan q coulomb, seperti ditunjukkan pada Gambar 9.13. Tentukan E untuk $r > a$.



Gambar 9.13 Sebuah bola konduktor membawa q pada permukaannya.

Solusi

Karena bola terbuat dari konduktor sempurna, $E = 0$, dan tidak ada muatan di dalam bola. Oleh karena itu, muatan q coulomb harus didistribusikan pada permukaan dari konduktor bola.

Gambar sebuah permukaan bola S dengan radius r (dengan $r > a$) konsentris dengan bola; kemudian gunakan hukum Gauss integral (9.26):

$$\oiint_S \hat{r} \cdot E ds = \frac{q}{\epsilon}$$

atau,

$$\oiint_S E_r ds = \frac{q}{\epsilon}$$

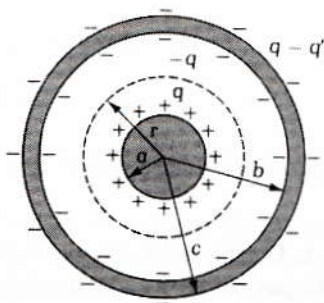
Dengan alasan simetri, kita sekali lagi melihat bahwa E_r adalah sebuah konstanta pada S , sehingga dapat dikeluarkan dari tanda integral dan integrasi hanya menghasilkan $4\pi r^2 E_r$. Hasil akhirnya adalah

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{r} \quad \text{untuk } r > a$$

Ingat bahwa untuk $r > a$, medan E seolah-olah mempunyai muatan yang terkonsentrasi pada pusat bola seperti sebuah muatan titik.

Contoh 9.11 Contoh ini mendemonstrasikan penggunaan hukum Gauss untuk mendapatkan medan listrik dalam sebuah sistem yang terdiri dari sebuah konduktor bola di dalam sebuah kulit konduktor bola. Meskipun geometrinya lebih kompleks dibandingkan dengan yang didiskusikan dalam Contoh 9.9, kita masih dapat memanfaatkan simetri sistem ini dan mencari pemecahan untuk medan listrik tanpa terlalu banyak kesulitan.

Perhatikan sebuah bola konduktor pejal dengan radius a di dalam sebuah kulit konduktor yang konsentris, seperti ditunjukkan pada Gambar 9.14. Kulit memiliki jari-jari dalam b dan jari-jari luar c . Sebuah muatan sebesar q coulomb ditempatkan pada konduktor pejal bagian dalam, dan muatan sebesar $-q'$ pada konduktor luar. Muatan-muatan tersebut didistribusikan secara merata pada permukaan bola. Tentukan E .



Gambar 9.14 Muatan dalam sebuah kulit konduktor yang konsentris dengan sebuah bola konduktor.

Solusi

Berdasarkan simetri, kita melihat bahwa medan listrik memiliki arah radial. Dari hukum Gauss yang diterapkan pada sebuah permukaan matematis beradius r dengan $a < r < b$ yang konsentris dengan bola konduktor, kita dapatkan

$$4\pi r^2 E_r = \frac{q}{\epsilon}$$

Jadi,

$$E = \hat{r} \frac{q}{4\pi\epsilon r^2}$$

yang sama dengan seandainya sebuah muatan titik q ditempatkan pada titik asal.

Sekarang jika permukaan digambar di dalam kulit konduktor luar—yaitu, jika $c > r > b$, kita peroleh

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \hat{n} \, ds = 0$$

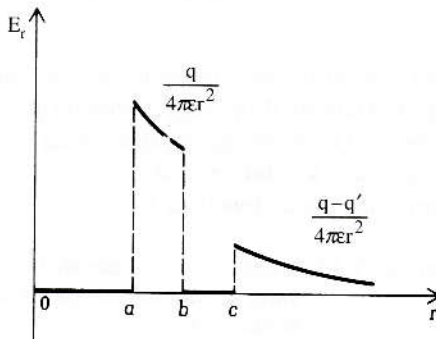
Hasil ini terjadi karena E adalah nol dalam konduktor. Persamaan di atas mengindikasikan bahwa muatan total adalah nol di dalam permukaan bola beradius r dengan $c > r > b$. Kita mengetahui bahwa terdapat q coulomb pada konduktor pejal. Oleh karena itu, kita menyimpulkan bahwa pasti terdapat $-q$ coulomb pada permukaan dalam kulit konduktor. Di luar bola sebelah luar—yaitu $r > c$ —diperoleh medan listrik

$$E = \hat{r} \frac{q - q'}{4\pi\epsilon r^2}$$

Karena muatan total pada permukaan konduktor sebelah dalam dengan radius $r = a$ adalah q dan muatan total pada permukaan dalam dari kulit bola terluar pada radius $r = b$ adalah $-q$, maka muatan total pada permukaan terluar dengan $r = c$ akan sama dengan $q - q'$.

Analisis di atas menunjukkan bahwa bagian luar kulit bola (dengan $r > c$) medan listriknya seolah-olah seperti sebuah muatan titik dengan magnitudo $(q - q')$ yang terletak pada titik asal.

Gambar 9.15 memplot medan listrik sebagai fungsi r .



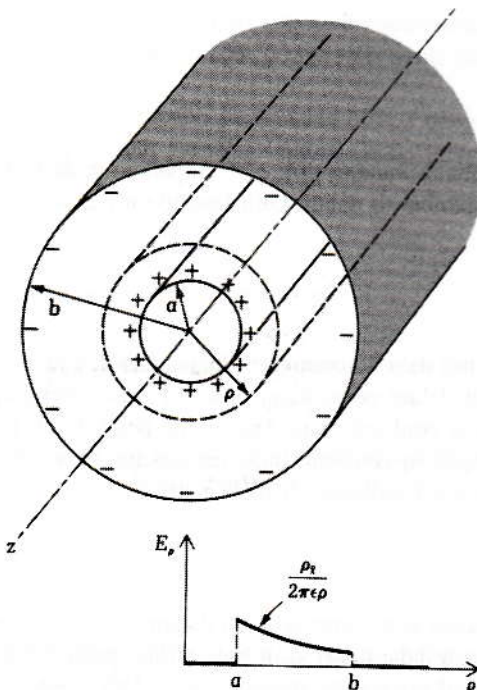
Gambar 9.15 Medan elektrostatik untuk sistem bola-dan-kulit konsentris yang ditunjukkan pada Gambar 9.14.

Contoh 9.12 *Contoh ini menunjukkan bagaimana menggunakan hukum Gauss dan menentukan medan listrik dalam sistem silindris.*

Perhatikan saluran koaksial yang ditunjukkan pada Gambar 9.16. Silinder konduktor dalam memiliki radius a , dan konduktor luar memiliki jari-jari b . Konduktor dalam membawa muatan sebesar ρ_ℓ coulomb per meter dan konduktor membawa muatan sebesar $-\rho_\ell$ coulomb per meter. Tentukan E .

Solusi

Anggap permukaan Gauss adalah permukaan silinder dengan jari-jari r yang konsentris dengan silinder konduktor. Pada saat $a < \rho < b$ (seperti ditunjukkan pada Gambar 9.16), hukum Gauss yang diterapkan untuk sebuah bagian garis koaksial dengan panjang h meter akan memberikan



Gambar 9.16 Muatan dan E_ρ dalam saluran koaksial.

$$\oiint_S \hat{n} \cdot \mathbf{E} \, ds = \frac{1}{\epsilon} \iiint_V \rho_v \, dv = \rho_\ell \frac{h}{\epsilon}$$

$$\underbrace{\iint_{\text{permukaan}}}_{\text{silinder}} \hat{\rho} \cdot \mathbf{E} \, ds + \underbrace{\iint_{\text{potongan silinder}}}_{\text{di } z = h} \hat{z} \cdot \mathbf{E} \, ds + \underbrace{\iint_{\text{potongan silinder}}}_{\text{di } z = 0} -\hat{z} \cdot \mathbf{E} \, ds = \rho_\ell \frac{h}{\epsilon}$$

Dari simetri, kita mengetahui bahwa \mathbf{E} memiliki arah radial. Karena itu, $\mathbf{E} \cdot \hat{n}$ adalah nol pada kedua ujung permukaan dari potongan silinder. Selain itu, E_ρ konstan pada permukaan silinder dengan jari-jari ρ . Jadi, E_ρ dapat dikeluarkan dari tanda integral, dan integrasi yang tersisa memberikan luas total dari permukaan silinder, yang sama dengan $2\pi\rho h$. Sehingga diperoleh

$$E_\rho 2\pi\rho h = \rho_\ell \frac{h}{\epsilon}$$

atau

$$E = \hat{\rho} \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon\rho}$$

Hasil ini tepat sama dengan yang diperoleh bila sebuah muatan garis membawa muatan sebesar ρ_ℓ coulomb per meter. Jadi, untuk $a < \rho < b$, medan \mathbf{E} akan sama dengan medan yang terjadi bila sebuah muatan garis dengan panjang tak hingga ρ_ℓ coulomb per meter terbentang sepanjang sumbu z [lihat (9.22)].

Untuk $\rho < a$, medan \mathbf{E} adalah nol karena mediumnya adalah konduktor sempurna. Untuk $\rho > b$, kita menerapkan hukum Gauss pada sebuah permukaan Gauss dengan $\rho > b$ dan mendapatkan

$$\oiint_S \hat{n} \cdot \mathbf{E} \, ds = \frac{1}{\epsilon} h[\rho_\ell + (-\rho_\ell)] = 0$$

Argumen mengenai simetri masih berlaku, tetapi sekarang muatan total dalam permukaan matematis adalah nol. Jadi,

$$\mathbf{E} = 0 \quad \text{untuk} \quad \rho > b$$

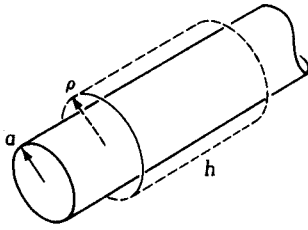
Gambar 9.16 merupakan plot E_r versus r .

Contoh 9.13 *Geometri dari soal yang diselesaikan dalam contoh ini sama dengan Contoh 9.12, kecuali bahwa muatannya didistribusikan dalam sebuah volume, bukan pada permukaan. Titik kuncinya adalah menunjukkan bagaimana mendapatkan dengan tepat ruas kanan dari hukum Gauss (9.26). Muatan total yang dilingkupi oleh permukaan Gauss. Hal yang terakhir ini bervariasi terhadap ρ , dan akibatnya juga terhadap muatan total di dalamnya.*

Sebuah berkas elektron silindris yang panjang dan bergerak di udara memiliki rapat muatan ρ_ℓ coulomb per meter. Jari-jari berkas adalah a , dan muatan didistribusikan dengan seragam. Tentukan \mathbf{E} .

Solusi

Untuk menghitung medan pada ρ jika ρ jauh lebih kecil daripada panjang berkas, pendekatan yang baik adalah dengan menganggap berkas tersebut mempunyai panjang tak hingga. Sekarang, gambar sebuah permukaan Gauss yang konsentris dengan berkas dengan $\rho > a$, seperti ditunjukkan pada Gambar 9.17a. Dengan menerapkan hukum Gauss pada sebuah potongan permukaan Gauss dengan panjang h , kita dapatkan



Gambar 9.17(a) Permukaan Gauss di luar berkas.

$$\oiint_S \hat{n} \cdot \mathbf{E} \, ds = \frac{1}{\epsilon} \iiint_V \rho_v \, dv = \frac{1}{\epsilon} h \rho_\ell$$

Dari simetri (argumen yang sama digunakan pada Contoh 9.12), kita dapatkan

$$2\pi\rho h E_\rho = \frac{1}{\epsilon} h \rho_\ell$$

yang menghasilkan

$$\mathbf{E} = \hat{\rho} \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon\rho} \quad \text{untuk } \rho \geq a$$

Untuk $\rho < a$, permukaan matematis hanya melingkupi sebuah bagian kecil dari muatan di dalam berkas, seperti diilustrasikan dalam Gambar 9.17d. Muatan total yang dilingkupi dalam permukaan matematis dengan panjang h adalah sebesar $h\rho_\ell (\pi\rho^2/\pi a^2)$. Hukum Gauss memberikan

$$\oiint_S \hat{n} \cdot \mathbf{E} \, ds = \frac{h}{\epsilon} \rho_\ell \frac{\rho^2}{a^2}$$

atau

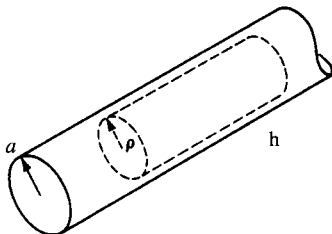
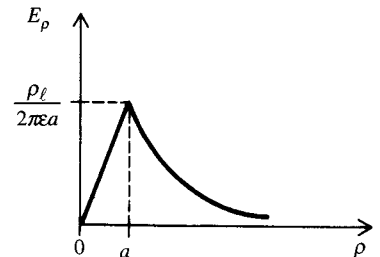
$$2\pi\rho h E_\rho = \frac{h}{\epsilon} \rho_\ell \frac{\rho^2}{a^2}$$

sehingga

$$\mathbf{E} = \hat{\rho} \frac{\rho_\ell \rho}{2\pi\epsilon a^2} \quad \text{untuk } \rho \leq a$$

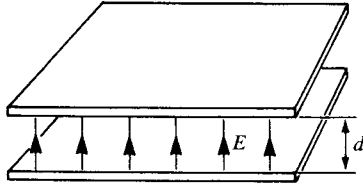
Gambar 9.17c menunjukkan sebuah plot dari E_r versus r . Ingat bahwa medan bernilai nol pada pusat berkas, bertambah menurut ρ , mencapai maksimum pada $\rho = a$, dan berkurang pada $1/\rho$ untuk $\rho > a$.

Gambar 9.17(b). Permukaan Gauss di dalam berkas.

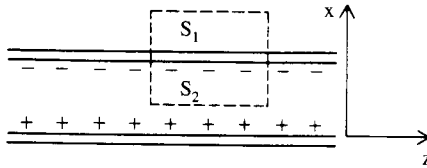
Gambar 9.17(c). Variasi dari E_ρ versus ρ .

Contoh 9.14 Pada contoh ini, hukum Gauss diterapkan terhadap sebuah sistem pada koordinat persegi panjang. Perhatikan perbedaan dan persamaan antara geometri ini dengan geometri yang terdapat pada Contoh 9.8.

Perhatikan keping sejajar dalam Gambar 9.18a. Muatan positif dan negatif yang berjumlah sama ditempatkan pada keping bawah dan keping atas dan terdistribusi seragam pada permukaan dalam dari kedua keping dengan kerapatan yang sama masing-masing sebesar ρ_s coulomb per meter persegi dan $-\rho_s$ coulomb per meter persegi. Tentukan E .



Gambar 9.18(a) Medan dalam suatu keping sejajar.



Gambar 9.18(b) Permukaan Gauss yang dipilih untuk mencari nilai medan E .

Solusi

Untuk menerapkan hukum Gauss, kita menggambar permukaan Gauss dalam bentuk sebuah kotak dengan S_1 dan S_2 sebagai permukaan atas dan bawah, seperti ditunjukkan pada Gambar 9.18b. Hukum Gauss memberikan

$$\oiint_S \hat{n} \cdot \mathbf{E} \, ds = \frac{1}{\epsilon} \iiint_V \rho_v \, dv = \frac{-1}{\epsilon} \rho_s A$$

di mana A adalah luas dari S_1 dan S_2 . Dengan menganggap bahwa keping memiliki luas tak hingga, sehingga E bukan merupakan fungsi koordinat y dan z , kemudian karena E hanya dapat diarahkan sesuai sumbu x (karena simetri dalam soal), kita peroleh

$$\iint_{S_1} E_x \, ds + \iint_{S_2} (-E_x) \, ds = -\frac{\rho_s A}{\epsilon}$$

Dengan memperhatikan bahwa tidak ada muatan listrik pada permukaan sebelah luar dari keping, kita dapat menetapkan $E = 0$ pada S_1 . E_x adalah sebuah konstanta pada S_2 , sehingga integral menjadi $-E_x A$, atau

$$-E_x A = -\frac{\rho_s A}{\epsilon}$$

Akhirnya,

$$E = \frac{\rho_s}{\epsilon} \hat{x}$$

$$\text{(medan listrik antara keping sejajar } 0 < x < d \text{)} \quad (9.28)$$

Medan listrik adalah nol di tempat lainnya.

Membandingkan hasil di atas dengan (9.25), kita lihat bahwa hasilnya berbeda dengan faktor 2. Perbedaan ini muncul karena dalam kasus ini kita memiliki dua keping, (9.25) adalah medan E untuk lembaran muatan yang tunggal.

9.4 PERHITUNGAN POTENSIAL DARI MEDAN E —INTEGRAL GARIS

Pada subbab 9.1 kita mendefinisikan perbedaan potensial elektrostatik V_{AB} antara dua titik A dan B dalam ruang sebagai selisih dari fungsi potensial $\Phi(\mathbf{r})$ pada titik-titik ini: $V_{AB} = \Phi_A - \Phi_B$. Bila medan listrik diketahui, potensial dapat ditentukan dari (9.6):

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi = -\hat{x}\frac{\partial\Phi}{\partial x} - \hat{y}\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \hat{z}\frac{\partial\Phi}{\partial z} \quad (9.29)$$

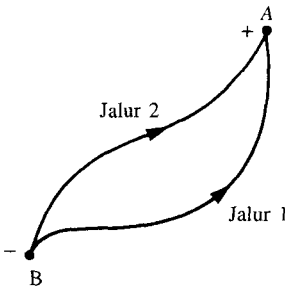
Perkalian titik dari persamaan ini dengan vektor diferensial posisi $d\mathbf{r} = \hat{x}dx + \hat{y}dy + \hat{z}dz$, akan menghasilkan

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z}dz\right) = -d\Phi \quad (9.30)$$

Jadi,

$$\boxed{V_{AB} = \Phi_A - \Phi_B = -\int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}} \quad \text{(perbedaan tegangan berbanding lurus dengan integral garis dari medan listrik)} \quad (9.31)$$

Integral ini dilakukan di sepanjang garis yang dibentuk oleh kenaikan $d\mathbf{r}$ antara dua titik A dan B (Gambar 9.19). Hasil bernilai nol jika di setiap tempat pada garis, medan listrik \mathbf{E} tegak lurus terhadap garis tersebut sehingga $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$. Hasilnya akan maksimum bila medan listrik di setiap tempat selalu sejajar dengan garis integrasi.



Gambar 9.19 Integral garis antara B dan A .

Perhatikan kasus khusus untuk garis lurus yang menghubungkan A dan B . Ingat bahwa V_{AB} potensial pada A dan B sebagai titik referensi, bernilai negatif jika \mathbf{E} mengarah ke A dan positif jika \mathbf{E} menjauhi A . Sebagai contoh, muatan titik dalam Gambar 9.4 memiliki medan listrik

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{r}} \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \quad (9.32)$$

dan

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon r} \quad (9.33)$$

Medan listrik berada dalam arah $\hat{\mathbf{r}}$, dan potensialnya akan lebih besar di dekat muatan dan menurun seiring bertambahnya r .

Jelas, persamaan (9.33) adalah sebuah akibat langsung dari persamaan (9.32) dalam integral garis (9.31).

$$\Phi(r) - \Phi(\infty) = - \int_{\infty}^r dr' \frac{q}{4\pi\epsilon r'^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon r}$$

Dalam (9.33), titik tak hingga diambil sebagai titik referensi di mana $\Phi = 0$.

Potensial dari Konduktor Sempurna

Sesuai dengan definisi, medan listrik bernilai nol di dalam sebuah konduktor yang sempurna. Dari (9.31), kita melihat bahwa beda potensial antara dua titik dalam konduktor sempurna adalah nol. Akibatnya, potensial Φ pasti merupakan sebuah konstanta di seluruh ruang yang ditempati oleh konduktor. Jadi, setiap konduktor sempurna memiliki potensial yang konstan. Meskipun demikian, konstanta ini dapat berbeda dari satu konduktor ke yang lain bila konduktor-konduktor tersebut tidak terhubung. Benda bersifat konduktor yang dihubungkan dengan kawat konduktor memiliki potensial yang sama. Jika sebuah konduktor dihubungkan oleh kawat ke bumi, kita katakan konduktor tersebut *ditanahkan* dan bahwa potensialnya adalah nol karena pada frekuensi rendah dan berarus dc, tanah merupakan konduktor yang baik dan potensial di semua tempat pada tanah mendekati konstan. Konstanta ini ditetapkan sama dengan nol.

Contoh 9.15 *Contoh ini menunjukkan sebuah cara langsung untuk mendapatkan potensial dari medan listrik.*

Perhatikan keping sejajar dalam Gambar 9.18. Tentukan potensial $\Phi(x)$ dengan mengasumsikan $\Phi(0) = 0$.

Solusi Dari Contoh 9.14, kita ketahui bahwa

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{\epsilon} \hat{\mathbf{x}}$$

Jadi,

$$\Phi(x) = - \int_0^x E_0 dx = -E_0 x \quad (9.34)$$

di mana $E_0 = \rho_s/\epsilon$.

Contoh 9.16 *Contoh ini menunjukkan bagaimana mendapatkan potensial dari medan listrik dalam koordinat silinder.*

Perhatikan garis koaksial yang ditunjukkan pada Gambar 9.16. Tentukan $\Phi(\rho)$, anggap $\Phi(b) = 0$.

Solusi Menurut hasil yang didapatkan pada Contoh 9.12, kita peroleh

$$\mathbf{E} = \hat{\rho} \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon\rho}$$

Jadi,

$$\Phi(\rho) = - \int_b^\rho \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon\rho'} d\rho' = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{b}{\rho}\right) \quad (9.35)$$

Contoh 9.17 Untuk mencari potensial dari medan listrik, kita harus berhati-hati dalam menggunakan rumus yang tepat untuk medan. Jika medan listrik dalam daerah yang berbeda memiliki ekspresi yang berbeda, maka integrasi harus dilakukan dari satu daerah ke daerah berikutnya dengan menggunakan persamaan yang sesuai.

Perhatikan berkas elektron yang dibahas dalam Contoh 9.13. Tentukan beda potensial antara $r = 0$ dan $\rho = 2a$.

Solusi

$$\begin{aligned}\Phi(2a) - \Phi(0) &= - \int_0^{2a} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_0^a \frac{\rho_\ell \rho}{2\pi\epsilon a^2} d\rho - \int_a^{2a} \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon \rho} d\rho \\ &= - \frac{\rho_\ell}{4\pi\epsilon} (1 + 2 \ln 2)\end{aligned}$$

Contoh 9.18 Jika sebuah konduktor yang membawa muatan memiliki ujung yang runcing, maka medan listrik pada ujung tersebut jauh lebih kuat daripada medan listrik di atas bagian benda yang lebih rata. Contoh ini menjelaskan mengapa demikian.

Dua bola konduktor dengan radius a dan b , dihubungkan dengan sebuah kawat konduktor tipis yang panjang, seperti ditunjukkan pada Gambar 9.20. Sebuah muatan q ditempatkan pada struktur ini. Tentukan muatan pada setiap bola dan medan \mathbf{E} pada permukaan dari setiap bola.

Solusi

Karena kedua bola konduktor terpisah jauh, kita dapat menganggap bahwa muatan terdistribusi secara seragam pada kedua bola seakan-akan terpisah dengan jarak yang tak terhingga. Misalkan q_a adalah muatan yang dibawa bola A dan q_b adalah muatan yang dibawa bola B. Misalkan tidak terdapat muatan pada kawat konduktor (karena kawat tipis); kemudian

$$q_a + q_b = q \quad (9.36)$$

Tegangan pada bola A adalah V_a , di mana

$$V_a = \frac{q_a}{4\pi\epsilon a}$$

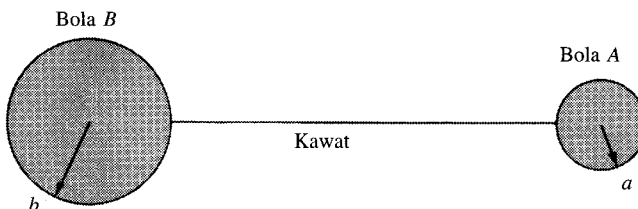
Demikian pula,

$$V_b = \frac{q_b}{4\pi\epsilon b}$$

Karena kedua konduktor ini dihubungkan dengan kawat konduktor, potensialnya pasti sama—yaitu, $V_a = V_b$. Atau,

$$\frac{q_a}{4\pi\epsilon a} = \frac{q_b}{4\pi\epsilon b} \quad (9.37)$$

Gambar 9.20 Dua bola konduktor dihubungkan dengan sebuah kawat konduktor tipis yang panjang.



Dengan menyelesaikan (9.36) dan (9.37), kita dapatkan

$$q_a = q \left(\frac{a}{a+b} \right)$$

$$q_b = q \left(\frac{b}{a+b} \right)$$

Medan E pada permukaan bola A dan B , masing-masing adalah

$$E_a = \frac{q_a}{4\pi\epsilon a^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon(a+b)a}$$

$$E_b = \frac{q_b}{4\pi\epsilon b^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon(a+b)b}$$

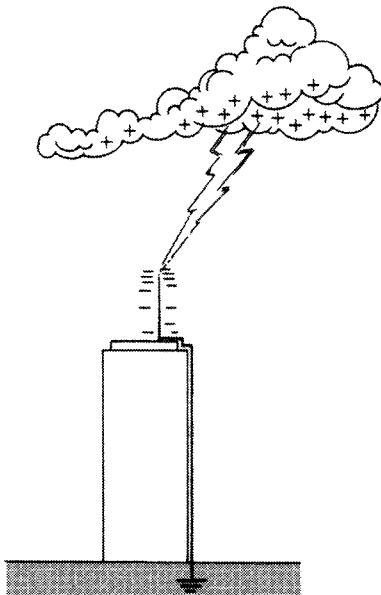
Ingat bahwa $E_a \gg E_b$ jika $b \gg a$.

Batang Penangkal Petir

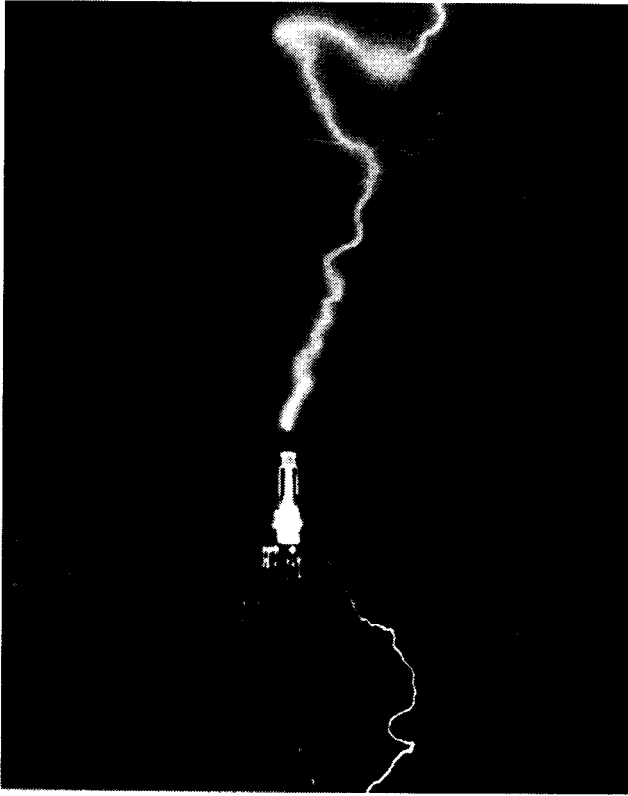
Hasil yang didapat dalam contoh sebelumnya mendukung pernyataan kualitatif berikut: Ketika sebuah konduktor memiliki ujung-ujung yang runcing, medan listrik pada titik-titik ini jauh lebih kuat daripada yang terdapat pada bagian konduktor yang halus. Kita dapat menerapkan hasil ini untuk menjelaskan bagaimana sebuah penangkal petir bekerja.

Penangkal petir adalah batang metal yang runcing dengan salah satu ujungnya ditempatkan pada bagian teratas dari sebuah struktur yang tinggi dan ujung lainnya dihubungkan dengan tanah, seperti ditunjukkan pada Gambar 9.21a. Ketika awan yang membawa muatan listrik mendekat, batang penangkal petir menarik muatan yang berlawanan dari tanah. Medan E pada ujung batang penangkal jauh lebih kuat daripada di bagian lainnya. Ketika medan E melampaui batas kegagalan, udara di dekat ujung batang akan terionisasi, menjadi penghantar, dan dengan demikian menyediakan jalur yang aman untuk listrik di awan mengalir ke tanah. Gambar 9.21b (hal. 26) menunjukkan sebuah batang penangkal petir yang sedang bekerja.

Gambar 9.21(a) Batang penangkal petir.



Gambar 9.21(b) Batang penangkal petir melindungi Gedung Empire State di New York City. (Foto UPI)



Integral Garis Untuk Potensial Elektrostatik

Kita sekarang akan melihat bahwa berdasarkan sifat alami medan elektrostatik, sepanjang dua ujung titiknya ditentukan, nilai V_{AB} seperti yang didefinisikan dalam (9.31) tidak bergantung pada jalur integrasi. Sifat ini, sangat unik untuk medan elektrostatik, diperoleh langsung dari (9.1). **Teorema Stokes** dalam kalkulus vektor menyatakan bahwa untuk setiap vektor medan A ,

$$\iint da \cdot (\nabla \times A) = \oint_C dr \cdot A \quad (9.38)$$

di mana integral luas dilakukan terhadap daerah yang dilingkupi oleh kontur tertutup C . Dengan melihat Gambar (9.19), kita melihat bahwa kontur tertutup C terbentuk dari jalur 1 dan jalur balik 2 dengan da yang mengarah keluar bidang kertas. Dengan menerapkan Teorema Stokes terhadap (9.1), kita dapatkan

$$\oint_C dr \cdot E = 0 \quad (9.39)$$

Persamaan di atas mengekspresikan sifat konservatif dari medan elektrostatik. Dengan menerapkan (9.39) terhadap kontur tertutup dalam Gambar 9.19, kita dapatkan bahwa

$$\int_{\text{jalur 1}} dr \cdot E - \int_{\text{jalur 2}} dr \cdot E = 0$$

Jadi,

$$\Phi_A - \Phi_B = - \int_{\text{jalur 1}} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} - \int_{\text{jalur 2}} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$$

Ingat bahwa jalur 1 dan 2 merupakan jalur sembarang yang menghubungkan B dan A . Ini menyebabkan nilai V_{AB} tidak bergantung pada jalur yang menghubungkan A dan B .

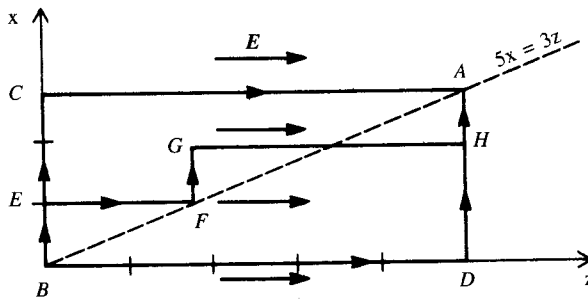
Hukum Tegangan Kirchhoff

Dalam teori rangkaian, Persamaan (9.39) dikenal sebagai hukum tegangan Kirchhoff. Ingat bahwa (9.39) diperoleh dari (9.1), yang hanya benar untuk medan statik. Jika terdapat sebuah medan magnet berubah terhadap waktu, maka (9.39) tidak dapat digunakan. Jadi, hukum tegangan Kirchhoff memiliki batasan: ketika medan magnet berubah terhadap waktu mengait magnet sebuah rangkaian, hukum tegangan Kirchhoff tidak akan berlaku kecuali jika pengaruh medan magnet yang berubah tersebut diikutsertakan.

Contoh 9.19 *Contoh ini menunjukkan bahwa untuk mendapatkan potensial dari medan listrik dengan metode integrasi, hasilnya tidak bergantung pada jalur integrasi.*

Misalkan \mathbf{E} terdapat di mana-mana dalam arah \hat{z} dan sama dengan 1 V/m . Tentukan potensial V_{AB} dengan A di $(3,0,5)$ dan B pada titik asal, seperti ditunjukkan pada Gambar 9.22.

Gambar 9.22 Integrasi dari medan \mathbf{E} di sepanjang jalur yang berbeda.



Solusi

Kita memilih untuk mengintegrasikan di sepanjang tiga jalur yang berbeda. Di sepanjang jalur $BECA$, \mathbf{E} tegak lurus terhadap BEC tetapi sejajar dengan CA . Jadi,

$$V_{AB} = -3 \times 0 - 5 \times 1 = -5 \text{ volt}$$

Di sepanjang jalur $BDHA$, \mathbf{E} sejajar dengan BD tetapi tegak lurus terhadap DHA ; jadi,

$$V_{AB} = -5 \times 1 - 3 \times 0 = -5 \text{ volt}$$

Di sepanjang lintasan $BEFGHA$, \mathbf{E} sejajar dengan EF dan GH tetapi tegak lurus terhadap BE , FG , dan HA . Jadi,

$$V_{AB} = -1 \times 0 - 2 \times 1 - 1 \times 0 - 3 \times 1 = -5 \text{ volt}$$

Pembaca dapat mencoba lintasan lainnya dan akan menemukan jawaban yang sama untuk V_{AB} karena medan listrik yang diberikan adalah sebuah medan statik yang memenuhi $\nabla \times \mathbf{E} = 0$.

Contoh 9.20 *Contoh ini menunjukkan bahwa jika potensial bergantung pada jalur integrasi, maka medan listrik tersebut bukanlah sebuah medan elektrostatik.*

Jika medan listrik adalah $E = \hat{z}(x + 2)$ V/m, yang menunjuk arah \hat{z} tetapi tidak seragam, tentukan integrasi sepanjang BECA yang ditunjukkan pada Gambar 9.22. Bandingkan ini dengan hasil integrasi sepanjang BDHA.

Solusi Di sepanjang BC, E adalah normal terhadap jalur, dan oleh karena itu, perkalian titik adalah nol, dan di sepanjang CA $x = 3$, dan karena itu $E = 5\hat{z}$. Jadi,

$$V_{AB} = 0 - 5 \times 5 = -25 \text{ volt}$$

Di sepanjang BDHA, kita dapatkan

$$V_{AB} = -5 \times 2 - 0 = -10 \text{ volt}$$

Dua nilai tersebut berbeda karena $\nabla \times E$ tidak identik nol dalam daerah di mana integrasi garis dilakukan. Medan yang diberikan bukanlah sebuah medan elektrostatik.

Contoh 9.21 *Contoh ini menunjukkan bagaimana mengintegrasikan medan listrik di sepanjang sebuah garis lurus yang dimiringkan.*

Diketahui sebuah medan listrik $E = \hat{z}(x + 2)$, tentukan integral garis dari $E \cdot d\mathbf{r}$ dari B ke A yang ditunjukkan dalam Gambar 9.22 di sepanjang garis lurus $5x = 3z$, $y = 0$.

Solusi Karena $\nabla \times E \neq 0$, integrasi bergantung pada jalur.

$$U = \int E \cdot d\mathbf{r} = \int (x + 2)dz$$

Tetapi di sepanjang garis lurus, $5 dx = 3 dz$, oleh karena itu,

$$U = \frac{5}{3} \int_0^3 (x + 2)dx = 17,5$$

Contoh 9.22 *Contoh 9.9 menunjukkan bahwa tidak boleh ada muatan listrik dalam sebuah konduktor pejal. Contoh ini menunjukkan bahwa tidak boleh ada medan listrik pada permukaan dalam dari sebuah konduktor yang memiliki sebuah lubang yang kosong.*

Perhatikan sebuah konduktor berbentuk sembarang dengan lubang *kosong* di dalamnya, seperti ditunjukkan dalam Gambar 9.23. Tunjukkan bahwa medan E dalam lubang adalah nol dan tidak terdapat muatan pada permukaan lubang.

Solusi Dari Contoh 9.9, kita mempelajari bahwa $E = 0$ dan $\rho_v = 0$ dalam konduktor. Gunakan hukum integral Gauss (9.26) pada permukaan S' , yang terletak pada di dalam konduktor. Kita dapatkan

$$\oint_{S'} E \cdot \hat{n} ds = q/\epsilon = 0$$

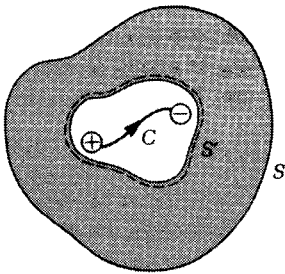
Kita menyimpulkan bahwa muatan total di dalam S' adalah nol. Karena lubangnya kosong, kita akan menyimpulkan bahwa muatan total pada permukaan konduktor sama dengan nol. Pada titik ini, kita tidak dapat menyimpulkan bahwa muatan pada permukaan sebelah dalam adalah nol karena mungkin saja terdapat jumlah muatan positif dan negatif yang sama pada

permukaan dalam, yang muatan totalnya adalah nol. Kita akan meneliti apakah hal tersebut dapat terjadi. Jika kita memiliki sebuah muatan positif yang terpisah dari sebuah muatan negatif pada permukaan sebelah dalam, maka kita akan memiliki sebuah garis medan E , yaitu C , yang berasal dari muatan positif dan berakhir pada muatan negatif. Jadi, jika kita mengintegrasikan $E \cdot dr$ sepanjang garis medan E , yaitu C , kita dapatkan sebuah bilangan yang positif karena E dan dr sejajar di setiap tempat:

$$\int_C E \cdot dr = V_{AB} > 0 \quad (9.40)$$

Tetapi kita juga mengetahui bahwa konduktor merupakan sebuah benda ekipotensial dan $V_{AB} = 0$ untuk dua titik A dan B pada konduktor. Pengetahuan ini bertolak belakang dengan hasil di atas. Jadi, kita menyimpulkan bahwa muatan pada permukaan dari sebuah lubang pada sebuah konduktor harus bertanda sama. Kesimpulan ini benar apakah lubang kosong atau apakah lubang terdiri atas beberapa muatan.

Sekarang kita akan menempatkan kedua pernyataan tersebut bersama-sama: (a) menurut hukum Gauss muatan total di dalam S' sama dengan nol karena lubang adalah kosong, dan (b) tanda dari muatan pada permukaan sebelah dalam dari sebuah konduktor berongga bisa semuanya positif atau semuanya negatif. Kita menyimpulkan bahwa tidak ada muatan pada seluruh permukaan sebelah dalam dari konduktor yang berongga. Selain itu, medan E identik dengan nol dalam lubang karena ia harus berasal dari sebuah muatan positif dan berakhir pada sebuah muatan negatif.



Gambar 9.23 Sebuah konduktor yang berongga tidak dapat memiliki muatan yang berlainan tanda pada permukaan dalam S' .

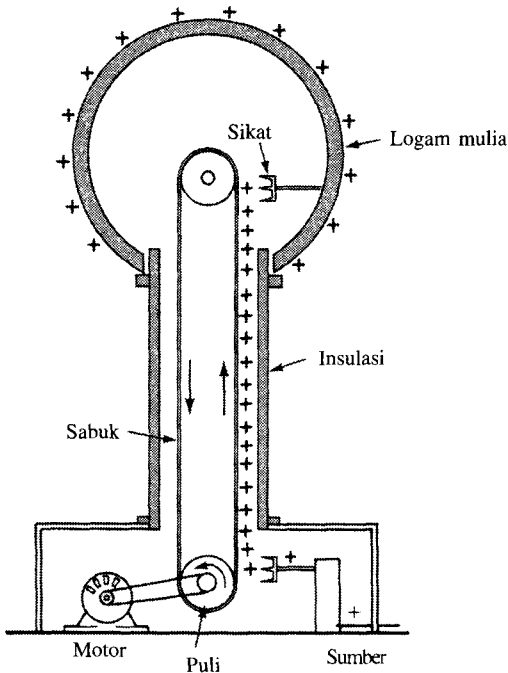
Generator Van de Graaff

Generator Van de Graaff adalah sebuah piranti yang ditemukan oleh Robert Van de Graaff (1901-1967). Generator ini dapat membawa muatan ke sebuah konduktor berbentuk kubah untuk membangkitkan sebuah tegangan elektrostatik yang dapat mencapai beberapa juta volt. Gambar 9.24a mengilustrasikan prinsip operasinya, dan Gambar 9.24b menunjukkan sebuah model awalnya.

Sabuk isolator, terbuat dari sutera atau karet, akan lewat di dekat sebuah sumber muatan sebesar beberapa kilovolt, dan sumber ini menyebarkan muatan pada sabuk. Sabuk digerakkan oleh dua buah katrol. Pada saat muatan dibawa ke sebuah kubah metal dengan diameter kira-kira satu meter, sebuah sikat logam akan menghisap muatan-muatan ini. Langkah ini mungkin terjadi karena menurut contoh sebelumnya, medan pada sebuah lubang di dalam konduktor adalah nol. Meskipun dalam kasus ini logam tidak seluruhnya tertutup, medan di dalamnya sangatlah lemah. Karena muatan tidak dapat muncul di dalam sebuah konduktor, penangkapan oleh sikat tersebut dengan cepat akan keluar dari kubah logam. Pada saat muatan dibangkitkan, tegangan juga meningkat. Sebuah kubah dengan diameter kira-kira satu meter dapat mencapai tegangan beberapa juta volt. Batasnya adalah kegagalan udara di bawah medan E intens yang dihasilkan.

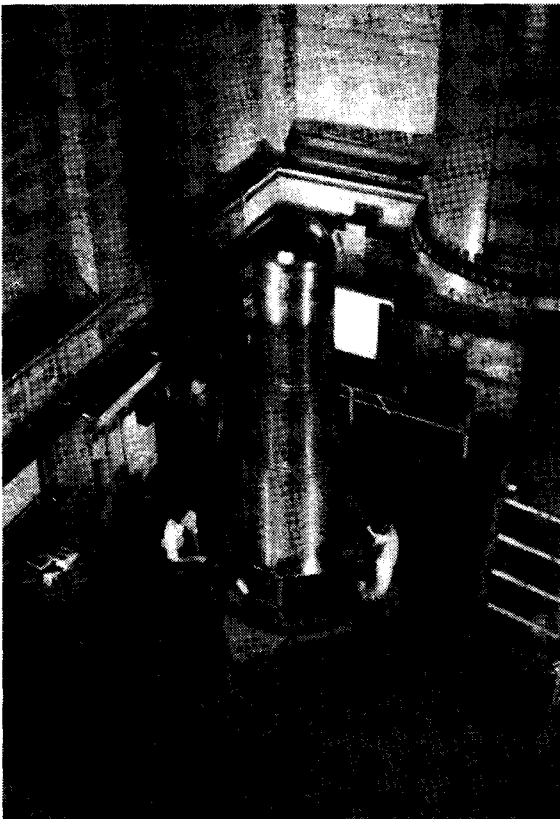
Generator Van de Graaff yang besar digunakan untuk mempercepat partikel bermuatan dalam penelitian fisika nuklir. Miniatur generator Van de Graaff juga digunakan dalam

Gambar 9.24(a) Prinsip operasi dari Generator Van de Graaff.



instrumen berskala kecil untuk menghasilkan tegangan tinggi yang diperlukan untuk membangkitkan neutron. Salah satu instrumennya adalah *“nuclear logging sonde”*.

Dalam sebuah peralatan batang neutron, Generator Van de Graaff menghasilkan tegangan tinggi untuk mempercepat partikel bermuatan deuterium. Neutron-neutron dihasilkan ketika



Gambar 9.24(b) Model awal dari generator Van de Graaf (seizin Museum dan Koleksi Sejarah MIT).

partikel-partikel ini membombardir sebuah sasaran tritium. Ketika peralatan batang diturunkan ke dalam sumur minyak, netron-netron ini diserap oleh susunan batuan di sekitarnya. Penyerapan ini membangkitkan sinar gamma, yang dideteksi oleh detektor sinar gamma yang dipasang pada peralatan. Susunan batuan menyerap netron-netron dengan cepat bila susunan batuan tersebut mengandung air garam. Jika batuan tersebut mengandung minyak, penyerapannya akan lambat. Oleh karena itu, dengan mengukur tingkat penurunan dari intensitas sinar gamma, seseorang dapat mengatakan apakah peralatan tersebut berada di dalam sebuah daerah yang mengandung minyak atau berada di dalam daerah yang mengandung air.*

Triboelektrisitas

Triboelektrisitas adalah listrik yang dibangkitkan oleh gesekan. Muatan-muatan listrik statis dibangkitkan ketika dua bahan yang berhubungan dipisahkan dengan tiba-tiba atau bersama-sama digosokkan. Sebagai contoh, dengan menggosok sebuah batang gelas dengan sutera, sejumlah kecil muatan akan berpindah. Gelas akan bermuatan positif dan sutera bermuatan negatif. Meskipun muatan yang dibangkitkan dengan cara ini kecil, tegangan akibat muatannya bisa cukup tinggi. Berjalan melewati sebuah lantai vinil/plastik dapat membangkitkan sebanyak 12.000 volt ketika kelembabannya rendah. Berjalan melewati sebuah karpet sintesis dapat menghasilkan tegangan statis 1.500 hingga 35.000 volt pada seseorang. Pelepasan triboelektrisitas melalui jari-jari seseorang kadang-kadang dapat menimbulkan sedikit efek kejutan.

Pelepasan elektrostatik dari triboelektrisitas dapat merusak komponen-komponen elektronik ketika seorang pekerja yang telah bermuatan memegangnya. Sebuah sumber di industri elektronik memperkirakan bahwa sebanyak 10 milyar dollar (data 1983) hilang setiap tahun akibat pelepasan elektrostatik. Sebuah perusahaan elektronik terkemuka melaporkan bahwa salah satu divisi komputernya memiliki tingkat kerusakan di lapangan sebesar 23 persen pada sebuah rangkaian perakitan tertentu. Kerusakan ini diakibatkan oleh pelepasan elektrostatik. Setelah sebuah program pencegahan yang benar-benar diterapkan, tingkat kerusakan turun menjadi kurang dari 3 persen. Pencegahan dari kerusakan pelepasan elektrostatik meliputi penempatan sebuah keset meja konduktor dan keset lantai di pabrik untuk mengalirkan listrik ke tanah.**

RINGKASAN

1. Apabila frekuensi nol, persamaan Maxwell akan terpisah; satu kelompok menerangkan medan elektrostatik, dan yang lainnya medan magnetostatik.
2. Medan E elektrostatik dapat diperoleh dari potensial skalar Φ dengan mengambil gradiennya [Persamaan (9.6)]
3. Potensial skalar Φ akibat sebuah muatan titik diberikan oleh (9.10). Kita dapat menggunakan penjumlahan atau integrasi untuk mendapatkan Φ akibat muatan-muatan yang banyak atau sebuah distribusi muatan yang kontinu.
4. Medan elektrostatik E akibat sebuah muatan titik diberikan oleh persamaan (9.18).
5. Medan elektrostatik E akibat muatan yang banyak atau sebuah distribusi muatan yang kontinu dapat diperoleh dengan prinsip superposisi. Medan E akibat sebuah muatan garis dengan panjang tak hingga diberikan oleh (9.22) dalam koordinat silindris. Medan E akibat sebuah muatan bidang diberikan oleh (9.25) dalam koordinat persegi panjang.

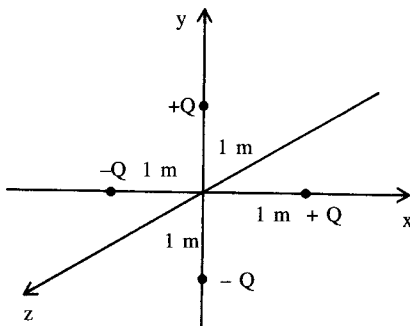
* D. A. Bronley, "The development of electrostatic accelerators," *Nuclear Instruments and Methods* 122 (1974): 1–34. D.W. Hilchie, "Neutron lifetime log," *Log Review* 1, Bagian 11 (Houston: Dresser-Atlas, 1974).

** J. Bechtold, editor *Bench Briefs*, Hewlett-Packard Co., Mt. View, CA, Maret-Mei, 1983, hal. 1–7.

6. Ingat bahwa ketika kita menghitung potensial skalar Φ akibat muatan, kita dapat menyederhanakan potensial-potensial tambahan akibat masing-masing muatan. Tetapi ketika kita menghitung medan E , kita harus menjumlahkan medan E akibat masing-masing muatan dengan menggunakan notasi vektor.
7. Hukum Gauss dalam bentuk integral diberikan oleh (9.26). Ingat bahwa permukaan S pada sisi sebelah kiri dapat berupa semua permukaan yang tertutup secara matematis, disebut dengan permukaan Gauss, dalam ruang; dan sisi sebelah kanan adalah muatan total di dalam permukaan Gauss.
8. Hukum Gauss dapat digunakan untuk menentukan medan E akibat beberapa distribusi muatan simetris seperti sebuah muatan titik, sebuah distribusi muatan bola yang seragam, sebuah berkas bermuatan, dan sebagainya.
9. Medan E elektrostatik dapat ditentukan dari potensial skalar Φ , demikian pula sebaliknya: perbedaan Φ antara dua titik dapat ditentukan dari E [Persamaan (9.31)].
10. Kita telah membuktikan bahwa muatan listrik tidak dapat muncul di dalam sebuah konduktor pejal dan muatan dapat muncul hanya pada permukaannya saja. Muatan tidak dapat muncul di dalam sebuah konduktor berongga atau pada permukaan dalamnya jika tidak ada muatan di dalam lubang.
11. Kita telah membuktikan bahwa sebuah konduktor yang membawa muatan dengan bentuk yang tidak beraturan merupakan sebuah benda ekipotensial; artinya, potensial pada semua titik di dalam atau pada permukaannya adalah sama. Meskipun demikian, muatan lebih banyak terdistribusi pada tepi-tepi runcing atau ujung-ujung runcing dari konduktor dan bukan pada bagian yang halus. Akibatnya, medan listrik juga akan lebih besar pada tepi dan ujung yang runcing.

Soal-soal

- 9.1 Perhatikan susunan dipol yang ditunjukkan pada Gambar 9.2a. $q = 1,6 \times 10^{-19} \text{C}$. Tentukan Φ pada:
 - (a) $x = 0,1$ $y = 0,1$ $z = 0,1$
 - (b) $x = 1$ $y = 1$ $z = 1$
 Pertama gunakan persamaan eksak (9.14). Kemudian gunakan pendekatan persamaan (9.17), dan tentukan ketelitian dari yang terakhir. Mediumnya adalah udara.
- 9.2 Dua muatan titik $q_1 = +2q$ dan $q_2 = -q$ masing-masing terletak pada $(-1, 0, 0)$ dan $(1, 0, 0)$ dalam koordinat persegipanjang. Tunjukkan bahwa permukaan ekipotensial untuk $\Phi = 0$ adalah sebuah permukaan berbentuk bola. Tentukan pusat dan radius dari permukaan ini.
- 9.3 Empat muatan titik terpisah dengan jarak yang sama seperti ditunjukkan pada Gambar P9.3. Untuk menyederhanakan proses aljabarnya, misalkan $Q = 4\pi\epsilon$.



Gambar P9.3

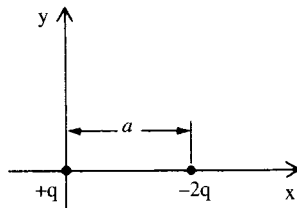
- (a) Tentukan pernyataan eksplisit dari $\Phi(x, y, z)$ akibat muatan-muatan ini pada sebuah titik yang sembarang. Anggap potensial pada jarak tak hingga adalah nol.
- (b) Tentukan $\Phi(0, 0, 0)$.

9.4 Dua muatan titik terpisah a meter di udara, seperti ditunjukkan pada Gambar P9.4.

- (a) Tentukan fungsi potensial $\Phi(x, y, z)$.
- (b) Hitung Φ pada $x = 100a, y = 100a, z = 0$.
- (c) Tunjukkan bahwa untuk jarak yang sangat besar dibandingkan dengan a dari muatan-muatan ini, potensialnya dapat diberikan oleh

$$\Phi \approx \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$$

di mana $(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \gg a$. Gunakan rumus pendekatan ini untuk menghitung $\Phi(100a, 100a, 0)$, dan bandingkan hasil ini dengan hasil yang didapat dalam (b).



Gambar P9.4

- 9.5** Tentukan medan E di udara akibat sebuah titik bermuatan $10^6 q_e (q_e = -1,6 \times 10^{-19} \text{ C})$. Sketsa sebuah diagram yang sama dengan Gambar 9.4.
- 9.6** Untuk distribusi muatan dalam Soal 9.2, tentukan medan E di dua titik pada sumbu x di mana $\Phi = 0$.
- 9.7** Untuk distribusi muatan dalam Soal 9.3, tentukan pertama kali $E_y(x, y, z)$ pada sebuah titik sembarang (x, y, z) dan kemudian tentukan $E_y(0,0,0)$.
- 9.8** Untuk distribusi muatan yang ditunjukkan pada Gambar 9.2a, tunjukkan bahwa medan E pada titik asal adalah $E = -\hat{z}(5000q/\pi\epsilon)$.
- 9.9** Sketsa garis medan E untuk distribusi muatan yang ditunjukkan pada Soal 9.2
- 9.10** Sebuah muatan garis dengan panjang $2h$ meter terletak di sepanjang sumbu z , seperti ditunjukkan pada Gambar 9.6a. Rapat muatannya adalah ρ_l coulomb per meter.
 - (a) Hitung medan listrik pada $\rho = 0, 1h, \phi = 0$ dan $z = 0$ dengan menggunakan rumus eksak (9.21).
 - (b) Hitung medan listrik pada titik yang sama dengan menggunakan anggapan bahwa garis memiliki panjang tak hingga.
 - (c) Tentukan galat persentase dari nilai yang didapat pada (b) jika dibandingkan dengan nilai eksaknya.
- 9.11** Untuk muatan garis serupa yang dijelaskan dalam Soal 9.10,
 - (a) Hitung medan listrik pada $\rho = 20h, \phi = 0$, dan $z = 0$ dengan menggunakan rumus eksak.
 - (b) Lakukan hal yang sama dengan menggunakan anggapan bahwa garis adalah sebuah muatan titik pada titik asal.
 - (c) Tentukan galat persentase dari nilai yang didapat pada (b).

- 9.12** Tentukan medan listrik pada $(0, 0, z)$ dalam koordinat persegi panjang akibat sebuah distribusi muatan berbentuk cincin lingkaran tipis yang didefinisikan oleh $x^2 + y^2 = 1$. Muatan total pada cincin adalah q dan muatan terdistribusi seragam pada cincin tersebut.
- 9.13** Sebuah muatan bidang sebesar ρ_s coulomb per meter persegi ditempatkan pada bidang $x = 0$, dan sebuah muatan bidang lain sebesar $-\rho_s$ coulomb per meter persegi diletakkan pada bidang $x = 1$. Tentukan medan listrik total dalam daerah (a) $x > 1$, (b) $x > 0$, dan (c) $x < 0$.
- 9.14** Muatan total q coulomb terdistribusi seragam pada sebuah daerah bola yang ditentukan oleh $r \leq a$. Tunjukkan bahwa medan listrik akan diberikan oleh

$$E_r = \begin{cases} \frac{qr}{4\pi\epsilon a^3} & \text{untuk } r \leq a \\ \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} & \text{untuk } r \geq a \end{cases}$$

- 9.15** Sebuah distribusi muatan dengan bentuk berikut terdapat di udara:

$$\rho_v = 10^{-6} \cdot e^{-r} \text{ coulomb per meter kubik}$$

Gunakan hukum Gauss untuk menentukan medan E di semua tempat. Petunjuk: Untuk menentukan muatan total dalam sebuah permukaan Gauss, Anda harus melakukan integrasi karena muatan tidak terdistribusi seragam. Meskipun demikian, simetri masih tetap muncul sehubungan dengan ϕ dan θ .

- 9.16** Muatan listrik terdistribusi seragam pada daerah $-0,1 < x < +0,1$ dengan kerapatan $\rho_v = 10^{-6} \text{ C/m}^3$. Di tempat lainnya, kerapatan sama dengan nol. Tentukan medan E di semua tempat. Plot E_x versus z . Tentukan beda potensial $V_x - V_0$ untuk sebuah titik x pada titik asal.
- 9.17** Tentukan beda potensial $V_A - V_B$ untuk dua titik A dan B yang terletak pada $r = 0$ dan $r = 1$ dalam medan E yang didapat dalam Soal 9.15.
- 9.18** Penyelesaian untuk medan listrik dari sebuah dipol Hertzian yang berosilasi dengan frekuensi angular ω diberikan dalam (7.14) sebagai berikut:

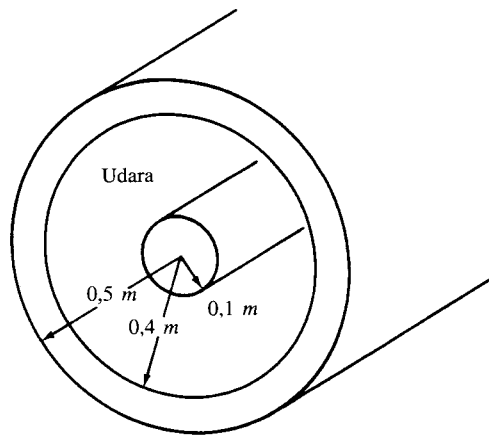
$$E = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{jk\mathbf{I} \Delta z e^{-jkr}}{4\pi r} \left\{ \hat{r} \left[\frac{1}{jkr} + \frac{1}{(jkr)^2} \right] 2 \cos \theta + \hat{\theta} \left[1 + \frac{1}{jkr} + \frac{1}{(jkr)^2} \right] \sin \theta \right\}$$

Turunkan penyelesaian (9.20) untuk dipol statik dengan menggunakan $\omega = 0$. Ingat bahwa $k = \omega(\mu\epsilon)^{1/2}$ dan $\mathbf{I} \Delta z = \partial p / \partial t = j\omega p$.

- 9.19** Dalam medan listrik $E = 3\hat{x} + 4\hat{y} - 5\hat{z}$, tentukan $V_A - V_B$ jika A ditempatkan pada $(1, 1, 2)$ dan B pada titik asal. Apakah selisih potensial ini bergantung pada jalur integrasi?
- 9.20** Perhatikan kulit bola yang ditunjukkan pada Gambar 9.14. Tentukan potensial $\Phi(r)$ pada
- $r = c$;
 - $b < r < c$;
 - $b > r > a$, dan
 - $r = a$.

Anggap $\Phi = 0$ pada jarak tak hingga. Plot $\Phi(r)$ versus r .

- 9.21** Ulangi soal sebelumnya untuk kasus di mana muatan total dari kulit konduktor tersebut sama dengan nol bila semua kondisi tetap tak berubah
- 9.22** Perhatikan saluran koaksial yang ditunjukkan pada Gambar P9.22. Konduktor dalam adalah sebuah silinder konduktor pejal dengan radius 0,1 meter. Konduktor luar memiliki radius dalam 0,4 meter dan radius luar 0,5 meter. Medium antara konduktor dalam dan konduktor luar adalah udara. Konduktor dalam membawa muatan bersih $-3\epsilon_0$ C/m dan konduktor luar membawa muatan bersih $-15\epsilon_0$ C/m. Simbol ϵ_0 di gunakan di sini untuk mewakili konstanta yang besarnya adalah $8,854 \times 10^{-12}$.
- Tentukan E_ρ dalam daerah $0,1 \text{ m} < r < 0,4 \text{ m}$
 - Tentukan E_ρ dalam daerah $0,4 \text{ m} < r < 0,5 \text{ m}$
 - Tentukan E_ρ dalam daerah $\rho > 0,5 \text{ m}$
 - Tentukan Φ pada $\rho = 0,2 \text{ m}$, apabila diketahui $\Phi = 0$ pada $r = 1 \text{ m}$
 - Skel E_ρ sebagai fungsi ρ untuk $0 < \rho < 1 \text{ m}$. Tandai skala untuk E_ρ dan ρ .



Gambar P9.22

- 9.23** Modelkan kubah generator Van de Graaff sebagai sebuah bola konduktor. Kubah dimuati untuk mempertahankan jumlah muatan listrik maksimum Q_m sebelum udara di sekitar kubah mengalami kegagalan. Gunakan data berikut:

radius kubah = 0,11 m,

kegagalan E udara = 3×10^6 V/m

- Hitung Q_m maksimum yang dikumpulkan pada kubah sesaat setelah kegagalan.
- Hitung tegangan kubah dengan memandang potensial pada tak hingga sesaat sebelum kegagalan terjadi.
- Ketika kubah dimuati dengan muatan maksimum Q_m , seseorang menggunakan batang konduktor untuk melepaskan listrik. Dengan menganggap bahwa pelepasan akan selesai dalam waktu 0,01 detik, berapa kekuatan arus pelepasan (harga rata-rata)?

10 GAYA LISTRIK DAN ENERGI LISTRIK

Bab sebelumnya mendiskusikan beberapa metode untuk menghitung medan elektrostatik dari sebuah distribusi muatan yang bervariasi. Kita ingin tahu medan elektrostatik yang benar karena dalam banyak aplikasi, partikel bermuatan dapat melakukan sejumlah fungsi yang berguna selama berada di bawah pengaruh medan elektrostatik. Sebagai contoh, suatu medan elektrostatik memancarkan berkas elektron pada sebuah televisi atau tabung sinar katoda ke berbagai tempat pada layar untuk menampilkan gambar atau informasi lainnya. Bab sebelumnya menunjukkan cara membangkitkan sebuah medan listrik dan menghitung nilainya. Kita juga perlu mengukur interaksi dari medan listrik dan partikel bermuatan, dan kita akan melakukannya pada bab ini. Pertama-tama kita mempelajari gaya yang dikerahkan oleh medan E pada partikel bermuatan dan kemudian menguji akibat dari interaksi ini. Energi kinetik dan energi tersimpan juga akan didiskusikan. Banyak aplikasi menarik—misalnya printer laser, CRT, dan pemancar ion—lain juga akan dibahas.

10.1 GAYA LISTRIK

Hukum Gaya Lorentz menyatakan bahwa sebuah medan elektromagnetik mengerahkan sebuah gaya F pada sebuah partikel bermuatan yang bergerak dengan kecepatan v dan membawa sebuah muatan q .

$$F = q(E + v \times B) \text{ Newton} \quad (10.1)$$

Hukum ini berlaku baik untuk medan statik maupun untuk medan yang berubah terhadap waktu.

Dalam bab ini kita akan menganggap medan elektrostatik terjadi tanpa keberadaan medan magnet. Jadi,

$F = qE$

$$(\text{gaya pada } q \text{ dalam medan elektrostatik}) \quad (10.2)$$

Ingat bahwa persamaan di atas merupakan sebuah persamaan vektor. Gaya pada persamaan tersebut searah dengan medan E jika muatannya positif, dan akan terdapat sebuah gaya pada sebuah muatan negatif yang berlawanan arah dengan medan E yang diterapkan.

Ingat bahwa medan E dalam (10.1) dan (10.2) adalah medan E eksternal, atau medan yang dihasilkan oleh semua muatan yang lain terkecuali medan di mana gaya ditinjau.

Hukum Coulomb

Perhatikan dua partikel yang terpisah r meter dan masing-masing membawa q_1 dan q_2 coulomb. Gaya pada q_2 dinyatakan oleh

$$F_2 = q_2 E$$

di mana E adalah medan listrik karena semua muatan kecuali q_2 . Dalam kasus ini hanya ada satu muatan di luar q_2 . Anggap q_1 terletak pada titik asal dari koordinat bola. Dengan menggunakan persamaan (9.18), kita peroleh

$$E = \hat{r} \frac{q_1}{4\pi\epsilon r^2}$$

Jadi,

$$F_2 = \hat{r} \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon r^2} \quad \text{(Hukum Coulomb)} \quad (10.3)$$

Kita melihat bahwa gaya listrik antara dua partikel bermuatan sebanding dengan perkalian antara dua muatan dan berbanding terbalik dengan kuadrat jaraknya. Arah gayanya berada di sepanjang garis yang menghubungkan kedua muatan. Jika tanda q_1 dan q_2 berlawanan, maka gayanya akan tarik menarik; jika sebaliknya, maka gayanya tolak menolak.

Fakta-fakta ini pertama kali ditemukan dengan eksperimen oleh Charles Coulomb pada tahun 1785. Persamaan (10.3) dikenal dengan **Hukum Coulomb**.

Contoh 10.1 *Ketika meninjau gaya antara partikel bermuatan, gaya gravitasi antara mereka juga harus diperhatikan. Dalam contoh ini, gaya gravitasi dapat diabaikan karena gaya listriknya sangat besar.*

Dua elektron terpisah di udara dengan jarak 1 mm. Hitung gaya Lorentz dan gaya gravitasi di antara mereka. Bandingkan magnitudo dari kedua gaya ini.

Solusi Kita mensubstitusikan $q_1 = q_2 = -1,60 \times 10^{-19}$ C dalam (10.3) dan mendapatkan gaya tolak menolak antara dua elektron ini:

$$F = 2,3 \times 10^{-22} \text{ N}$$

Gaya gravitasi antara dua massa adalah tarik-menarik dan magnitudonya dinyatakan oleh

$$F_g = \frac{m_1 m_2}{r^2} \times 6,67 \times 10^{-11}$$

Mensubstitusikan $m_1 = m_2 = 9,11 \times 10^{-31}$ kg ke dalam persamaan di atas, kita dapatkan

$$F_g = 5,5 \times 10^{-65} \text{ N}$$

Jadi, untuk semua penggunaan praktis, gaya gravitasi antar elektron sangat kecil dibandingkan gaya Lorentz.

Model Atom Thomson

Pada tahap awal perkembangan teori atom, J. J. Thomson mengemukakan bahwa sebuah atom terdiri dari sebuah muatan positif Ze , di mana Z adalah bilangan bulat, yang terdistribusi

secara merata di atas sebuah bola dengan jari-jari a . Ia menganggap elektron-elektron, masing-masing bermuatan $-e$, adalah muatan titik yang menempel pada muatan positif.

Kita akan melihat bahwa dengan model ini, berlawanan dengan fakta-fakta eksperimen, elektron akan berosilasi dan beradiasi.

Rapat muatan positif dari bola adalah

$$\rho_v = \frac{Ze}{\frac{4\pi}{3}a^3} \quad (10.4)$$

Medan listrik di dalam bola didapatkan dari hukum Gauss (lihat Soal 9.14),

$$E_r = \frac{Zer}{4\pi\epsilon_0 a^3} \quad (10.5)$$

Masing-masing elektron mengalami sebuah gaya F_r , dalam arah radial.

$$F_r = -e(E_r) = -\frac{Ze^2 r}{4\pi\epsilon_0 a^3} \quad (10.6)$$

Anggap massa elektron adalah m , maka dengan hukum Newton,

$$F_r = m \frac{d^2 r}{dt^2} \quad (10.7)$$

Jadi, kita akan menemukan bahwa persamaan gerak untuk elektron tersebut adalah

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = (-\omega_0^2)r \quad (10.8)$$

di mana

$$\omega_0^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 a^3 m} \quad (10.9)$$

Jelaslah bahwa penyelesaian untuk r adalah fungsi harmonik-waktu dengan frekuensi angular ω_0 atau frekuensi f , di mana

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{e}{2\pi} \sqrt{\frac{Z}{4\pi\epsilon_0 m a^3}}$$

Untuk $Z = 1$, $a = 10^{-10}$ m, kita dapatkan $f = 2,5 \times 10^{15}$ Hz, yang akan terletak pada daerah ultraviolet dari spektrum elektromagnetik. Dalam Bab 7 kita sudah mempelajari bahwa arus osilasi meradiasikan daya elektromagnetik. Jadi, model atom Thomson akan kehilangan daya dan akan menjadi tidak stabil.

Model Atom Bohr

Sesuai dengan model atom Bohr, elektron berputar mengelilingi sebuah nukleus dengan muatan positif Ze . Orbit elektron ditentukan menurut postulat

$$mrv = \frac{nh}{2\pi}$$

di mana m adalah massa elektron, v adalah kecepatan elektron, n adalah bilangan bulat, dan $h = 6,62 \times 10^{-34}$ J-s adalah konstanta Planck. Gaya sentrifugal mv^2/r yang dialami oleh elektron akan diimbangi oleh gaya Lorentz $Ze^2/4\pi\epsilon r^2$. Kita dapatkan

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon r^2}$$

Mencari r dari dua persamaan di atas, kita dapatkan bahwa untuk atom hidrogen dengan $Z = 1$,

$$r = \epsilon \frac{n^2 h^2}{me^2 \pi} = 0,52 n^2 \times 10^{-10} m \quad (10.10)$$

Jari-jari orbit terdalam dari elektron hidrogen tersebut akan sama dengan $0,52 \text{ \AA}$.

Gerakan Partikel Bermuatan Dalam Medan E Yang Seragam

Perhatikan kasus di mana sebuah partikel bermuatan dengan massa m dan muatan q memasuki sebuah medan E yang seragam. Anggap bahwa pada $t = 0$, kecepatan awal dari partikel bermuatan ini adalah $v_0 = v_{0x} \hat{x} + v_{0y} \hat{y} + v_{0z} \hat{z}$ dan bahwa medan E adalah $E = E_0 \hat{z}$. Kita ingin menghitung kecepatan dan posisi partikel pada waktu t .

Sesuai dengan (10.2), partikel bermuatan mengalami sebuah gaya F , di mana

$$F = qE_0 \hat{z} \quad (10.11)$$

Karena gaya dalam arah \hat{z} , hanya kecepatan dalam arah tersebut sajalah yang berubah. Dari hukum Newton, kita dapatkan

$$F_z = m \frac{dv_z}{dt} \quad (10.12)$$

Penggabungan (10.11) dan (10.12) menghasilkan

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{q}{m} E_0 \quad (10.13)$$

Mengintegrasikan (10.13) sekali, kita dapatkan

$$v_z(t) = \left(\frac{q}{m} E_0 \right) t + C \quad (10.14)$$

Ingat bahwa kondisi awal adalah:

$$v_z(0) = v_{0z}$$

Konstanta C dalam (10.14) dapat ditentukan kemudian dengan hasil ini:

$$v_z(t) = v_{0z} + \frac{qE_0}{m} t$$

Kecepatan totalnya menjadi

$$\mathbf{v}(t) = \hat{x}v_{0x} + \hat{y}v_{0y} + \hat{z}\left(v_{0z} + \frac{qE_0}{m} t\right) \quad (10.15)$$

Posisi dari partikel pada waktu t adalah

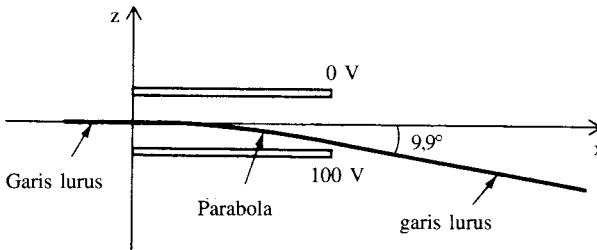
$$\mathbf{r} = \hat{x}(v_{0x}t + x_0) + \hat{y}(v_{0y}t + y_0) + \hat{z}\left(v_{0z}t + z_0 + \frac{qE_0}{2m} t^2\right) \quad (10.16)$$

di mana (x_0, y_0, z_0) mengindikasikan posisi awal dari partikel pada $t = 0$.

Contoh 10.2 Dalam contoh ini kita menggunakan hukum Newton dan gaya Lorentz untuk memperkirakan lintasan partikel bermuatan yang bergerak dalam medan listrik.

Sebuah elektron dengan kecepatan awal $v_0 = 2 \times 10^7 \hat{x}$ m/s memasuki sebuah kapasitor keping sejajar yang bermuatan dengan tegangan 100 V, seperti ditunjukkan pada Gambar 10.1. Jarak antar keping kapasitor adalah 1 cm, dan keping memiliki panjang 4 cm dalam arah \hat{x} . Tentukan lintasan elektron ini.

Gambar 10.1 Lintasan dari sebuah elektron yang melewati sebuah medan elektrostatis (Contoh 10.2).



Solusi

Medan E dalam daerah keping sejajar tersebut dinyatakan oleh:

$$E = \frac{V_0}{d} \hat{z} = 10^4 \text{ V/m } \hat{z}$$

Karena medan E terletak di sepanjang \hat{z} , komponen x dari kecepatan elektron tidak akan dipengaruhi oleh medan. Posisi awal dari elektron adalah $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, dan kecepatan awalnya adalah $v_{0x} = 2 \times 10^7$ m/s dan $v_{0y} = v_{0z} = 0$. Dengan menggunakan (10.16), kita menemukan bahwa pada waktu t posisi dari elektron adalah

$$x = 2 \times 10^7 t$$

$$z = \frac{-1,6 \times 10^{-19} \times 10^4}{2 \times 9,1 \times 10^{-31}} t^2 = -8,8 \times 10^{14} t^2$$

Menghilangkan waktu t dari dua persamaan di atas, kita temukan bahwa lintasan dari elektron tersebut adalah

$$z = -2,2x^2 \quad (10.17)$$

yang merupakan sebuah parabola. Elektron akan keluar dari daerah keping t_0 detik setelah ia memasuki daerah tersebut dengan

$$t_0 = \frac{4 \times 10^{-2}}{2 \times 10^7} = 2 \times 10^{-9} \text{ s}$$

Kita temukan bahwa titik keluarnya adalah pada (x_e, z_e) , di mana

$$x_e = 0,04 \text{ m}$$

$$z_e = -0,0035 \text{ m}$$

Setelah elektron tersebut meninggalkan daerah keping sejajar, ia bergerak mengikuti sebuah garis lurus yang membuat sebuah sudut θ terhadap sumbu x , dengan

$$\theta = \tan^{-1} \frac{v_z(t_0)}{v_x(t_0)} = -9,9^\circ$$

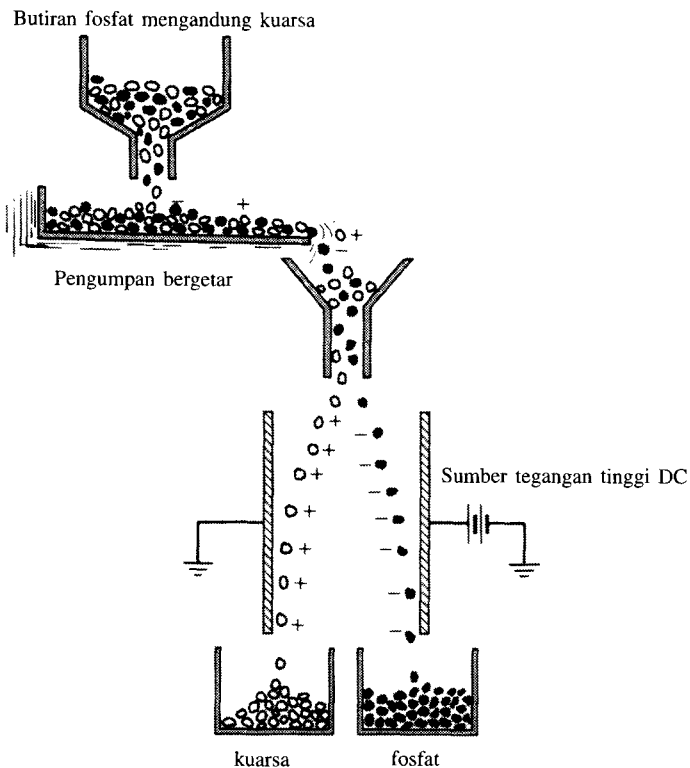
Gambar 10.1 menunjukkan lintasan keseluruhannya.

Pemisahan Elektrostatik

Gaya elektrostatik digunakan untuk memisahkan dua bahan granular yang berbeda. Mesin-mesin pemisah ini banyak digunakan dalam industri untuk memilih mineral. Gambar 10.2 mengilustrasikan prinsip operasi dasarnya.

Campuran dua mineral, sebagai contoh, bijih fosfat yang tersusun dari partikel kuarsa dan batuan fosfat, ditempatkan dalam sebuah pengumpan yang bergetar. Getaran ini menyebabkan friksi antara butiran kuarsa dan fosfat, dan sebagai hasilnya butiran kuarsa akan bermuatan positif dan butiran fosfat bermuatan negatif. Proses pemuatan dengan friksi ini sama dengan yang terjadi ketika seseorang menyisir rambutnya dan menemukan bahwa rambut dan sisir akan bermuatan dengan polaritas yang berbeda. Dalam kasus ini, penyisiran rambut lebih lama lagi akan menyebabkan dua-duanya saling menetralkan satu sama lain sambil menghasilkan percikan listrik, yang dapat dilihat dalam kegelapan.

Gambar 10.2 Pemisah elektrostatik. Butiran fosfat dan butiran kuarsa dimuati dengan polaritas yang berbeda ketika mereka melewati pengumpan bergetar, yang menghasilkan friksi di antara butiran-butiran ini.



Pengumpan yang bergetar dapat menghasilkan kira-kira 10^{-5} C/kg muatan pada butiran-butiran mineral,* yang kemudian dimasukkan ke dalam sebuah peluncur dan dilewatkan di antara sebuah keping sejajar yang bermuatan. Akibat gaya elektrostatik, butiran kuarsa ditarik ke arah keping negatif, dan butiran fosfat bergerak ke arah keping positif. Wadah yang terpisah dapat ditempatkan di bawah keping sejajar ini untuk menerima kuarsa dan fosfat secara terpisah, seperti ditunjukkan pada Gambar 10.2.

* J. E. Lawver dan W.P. Dyrenforth, "Electrostatic separation," dalam *Electrostatics and Its Applications*. ed. A. D. Moore, New York: Wiley, 1973, hal. 229.

Contoh 10.3 Ini adalah contoh numerik dari sistem pemisahan elektrostatik.

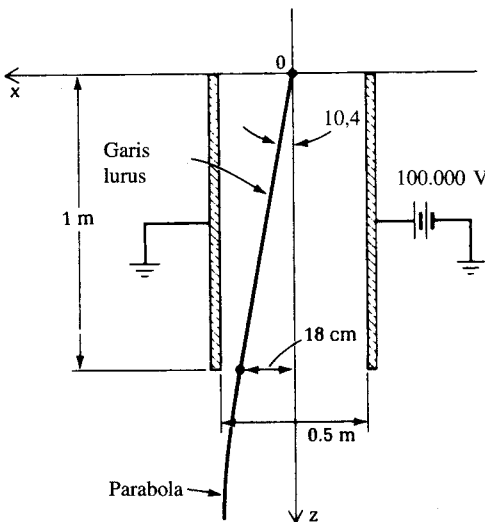
Anggap dalam Gambar 10.2 tegangan antara keping sejajar adalah 100 kV, jarak antar keping adalah 0,5 m, dan ukuran vertikal dari keping sejajar adalah 1 m. Rasio muatan terhadap massa dari partikel kuarsa adalah 9×10^{-6} C/kg. Partikel tersebut mulai jatuh bebas di pertengahan sisi atas keping sejajar. Tentukan posisi partikel pada titik keluar keping tersebut.

Solusi

Kita menyusun sistem koordinat seperti ditunjukkan dalam Gambar 10.3. Kecepatan dalam arah \hat{z} dinyatakan dengan gaya gravitasi—artinya,

$$\frac{d^2z}{dt^2} = g = 9,8 \text{ m/s}^2$$

Gambar 10.3 Perhitungan dari lintasan sebuah butiran kuarsa



Dengan mengintegrasikan persamaan di atas terhadap t dan menggunakan kondisi awal $(dz/dt) = 0$ pada $t = 0$, kita dapatkan

$$\frac{dz}{dt} = 9,8t \text{ m/s}$$

Melakukan integrasi sekali lagi dengan kondisi awal $z = 0$ pada $t = 0$, kita dapatkan

$$z = 4,9 t^2 \text{ m}$$

Jadi, butiran kuarsa akan keluar dari keping pada t_0 , dengan

$$t_0 = \sqrt{\frac{1}{4,9}} = 0,45 \text{ s}$$

Sekarang, kecepatan butiran kuarsa dalam arah \hat{x} dikendalikan oleh medan elektrostatik—artinya,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} \hat{x} = qE$$

Berdasarkan Contoh 9.15,

$$E = \frac{V}{d} \hat{x} = 2 \times 10^5 \hat{x} \text{ V/m}$$

Jadi,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{q}{m} \times 2 \times 10^5 \\ &= 9 \times 10^{-6} \times 2 \times 10^5 \\ &= 1,8 \end{aligned}$$

Kita mengintegrasikan dua kali dan mensubstitusikan kondisi awal $dx/dt = 0$ dan $x = 0$ pada $t = 0$, sehingga kita dapatkan

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 1,8t \\ x &= 0,9t^2 \end{aligned}$$

Pada $t = t_0 = 0,45$ detik, partikel akan keluar dari keping pada $x = 0,9 \times (0,45)^2 \approx 0,18$ m. Ingat bahwa variabel t dapat dihilangkan dari pernyataan untuk z dan x agar mendapatkan sebuah persamaan untuk z dan x :

$$z = 5,44x$$

Jadi, di dalam keping sejajar, lintasan partikel kuarsa merupakan sebuah garis lurus. Medan E adalah nol di luar keping, tetapi gaya gravitasi tetap ada; jadi, lintasan kuarsa setelah keluar dari keping sejajar tersebut akan berbentuk parabola.

Korona Listrik

Dalam cuaca berkabut atau hujan, tetesan-tetesan air akan membentuk saluran transmisi tegangan tinggi. Tetesan-tetesan air ini akan menghasilkan titik-titik runcing pada konduktor yang halus. Dari Contoh 9.18, kita sudah mempelajari bahwa medan E terkuat akan terjadi pada titik-titik runcing konduktor. Jadi, di dekat tetesan air, medan listrik lebih tinggi daripada normalnya dan sering cukup tinggi untuk mengionisasi udara di sekitarnya. Sebagai akibatnya, udara akan menjadi panas, dan sebuah cahaya tipis akan muncul pada kegelapan. Cahaya ini disebut dengan **pelepasan korona** (*corona discharge*). Korona adalah sebuah plasma yang dihasilkan melalui pelepasan gas yang disebabkan oleh medan listrik yang sangat tinggi.

Medan listrik ini biasanya tidak seragam dan hanya muncul di dekat titik-titik runcing sebuah konduktor atau di dekat kawat yang tipis. Medan listrik menjauh dari daerah ini biasanya jauh lebih lemah. Jadi, pelepasan gas yang terjadi hanya terbatas pada daerah tertentu. Pencahayaan samar-samar ini biasanya berbentuk seperti sebuah cincin yang mengelilingi sebuah kawat tipis atau cahaya dengan kanal yang menyerupai sebuah mahkota atau korona.*

Terjadinya korona di sekeliling saluran transmisi tenaga listrik menunjukkan terjadinya suatu rugi daya. Namun demikian, pembangkitan korona dapat dimanfaatkan dalam beberapa aplikasi yang akan kita diskusikan kemudian. Untuk sementara ini, marilah kita perhatikan fisika dari pembangkitan korona.

* A. D. Moore, *Electrostatics*, Garden City, N.Y.: Doubleday, 1968. L. B. Loeb, *Electrical Coronas*, Berkeley, Calif.: University of California Press, 1965, hal. 171.

Perhatikan sebuah saluran koaksial seperti yang ditunjukkan dalam Gambar 10.4. Kita nyatakan tegangan antara konduktor dalam dan luar dengan V_0 . Dari Contoh 9.12, kita dapatkan

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon\rho} \hat{\rho} \quad (10.18)$$

dan

$$V(\rho) = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{b}{\rho}\right) \quad (10.19)$$

di mana ρ_ℓ adalah rapat muatan pada konduktor sebelah dalam, yang dinyatakan dalam coulomb per meter. Mengingat bahwa $V(a) = V_0$, kita dapatkan

$$V_0 = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (10.20)$$

Jadi,

$$E_\rho = \frac{V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \frac{1}{\rho} \quad (10.21)$$

Kenyataannya, intensitas medan listrik maksimum akan terjadi pada permukaan konduktor sebelah dalam di mana $\rho = a$. Jika a kecil, E_ρ dapat memiliki nilai yang besar.

Sebuah rumus empiris menyatakan bahwa kekuatan medan listrik yang diperlukan untuk menghasilkan sebuah korona di udara adalah:*

$$E_c = 3 \times 10^6 m \left(\delta + 3 \times 10^{-2} \sqrt{\frac{\delta}{a}} \right) \text{ V/m} \quad (10.22)$$

di mana

m = faktor kekasaran kawat, berkisar dari 0,5 hingga 0,9, $m = 1$ untuk kawat halus

δ = rapat udara relatif $= (T_0/T)(P/P_0)$

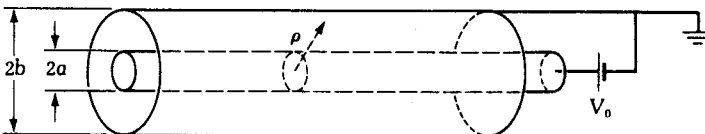
P = tekanan udara (dalam atmosfer)

T = temperatur udara, K

$T_0 = 298 \text{ K}$

P_0 = tekanan 1 atmosfer

Gambar 10.4 Sebuah tabung korona. Kawat metal di bagian tengah sangat tipis dan dijaga pada tegangan yang lebih tinggi daripada tegangan tabung metal di sebelah luar. Sebuah medan elektrostatik yang tinggi di dekat kawat tipis akan menghasilkan sebuah korona positif. Jika polaritas dari baterai dibalik, sebuah korona negatif akan tereksitasi di dekat kawat yang tipis.



* F. W. Peek, *Dielectric Phenomena in High-Voltage Engineering*, New York: McGraw-Hill, 1929, hal. 53.

Dengan menggunakan persamaan (10.22), kita dapat menghitung tegangan minimum V_0 yang akan menghasilkan sebuah korona dalam saluran koaksial yang ditunjukkan pada Gambar 10.4. Kita anggap bahwa $b = 10$ cm, $a = 0,5$ cm, $m = 0,9$, pada temperatur kamar (20°C) dan kondisi atmosfer standar ($P = 1$ atm). Dengan data-data ini, (10.22) menghasilkan

$$E_c = 3,9 \times 10^6 \text{ V/m}$$

Dari (10.21), kita mendapatkan tegangan korona V_0

$$V_0 = E_c a \ln\left(\frac{b}{a}\right) = 58,4 \text{ kV}$$

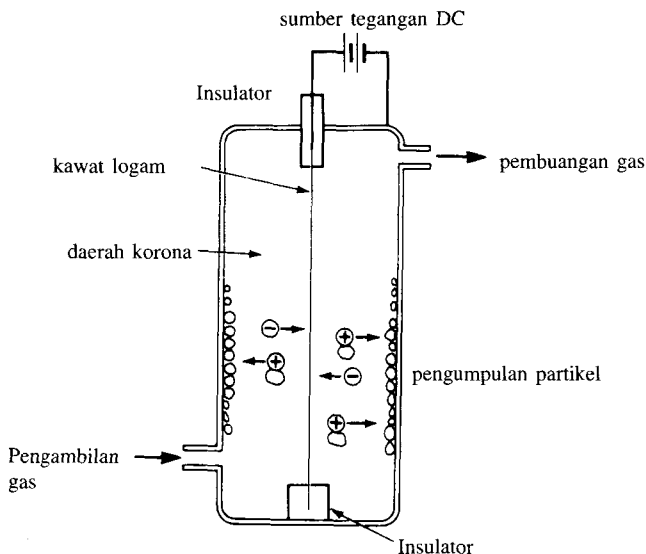
Akibat radiasi alam, beberapa molekul udara akan terionisasi. Persentase udara yang terionisasi secara alami sangatlah rendah. Meskipun demikian, dalam medan listrik yang besar, elektron-elektron ini akan dipercepat sampai mencapai kecepatan yang tinggi. Ketika elektron-elektron ini bertumbukan dengan sebuah molekul udara, molekul udara tersebut akan melepas sebuah elektron, jadi menambah jumlah elektron yang bergerak cepat dalam udara. Proses ini berlanjut, menghasilkan sebuah banjir elektron dalam medan listrik yang tinggi sehingga membentuk korona.

Filter Elektrostatik

Filter elektrostatik (pengendap elektrostatik) banyak digunakan dalam industri untuk menghilangkan partikel-partikel yang tidak diinginkan dari gas sebelum dibuang ke atmosfer. Filter ini juga digunakan di rumah-rumah untuk menyaring serbuk dan debu untuk seseorang yang memiliki alergi.

Gambar 10.5 mengilustrasikan proses dasar dari penyaringan elektrostatik. Gas atau udara yang akan dibersihkan ditekan ke dalam sebuah daerah silinder metal koaksial. Konduktor tengah adalah kawat yang tipis, sehingga intensitas medan listrik di dekat kawat tersebut cukup tinggi untuk menghasilkan sebuah korona. Ion-ion positif yang dihasilkan

Gambar 10.5 Filter elektrostatik. Ion-ion positif yang dihasilkan dalam korona bergerak menuju keping pengumpul negatif dan akan tertempel pada partikel-partikel gas. Keduanya terkumpul pada dinding pengumpul negatif.

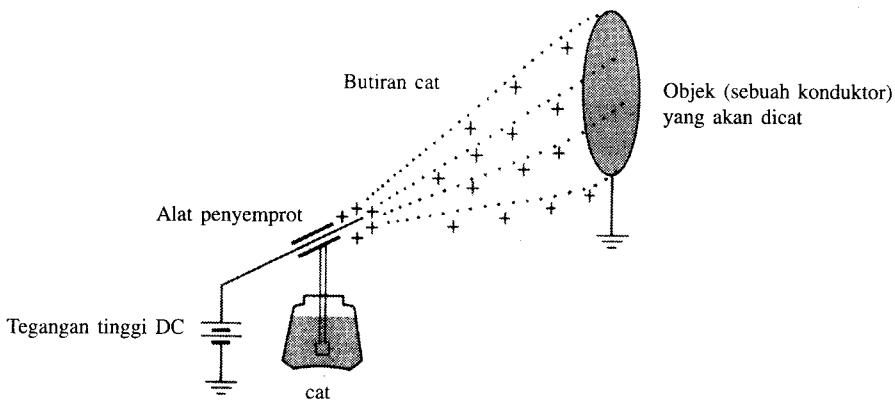


dalam korona akan berpindah ke elektroda negatif dan dalam pergerakannya bisa bertumbukan dengan partikel-partikel dalam gas atau udara. Ion-ion menempel pada partikel-partikel, yang kemudian ditarik ke elektroda pengumpul oleh medan listrik.*

Cat Semprot Elektrostatik

Dengan prinsip operasi yang menyerupai dengan filter elektrostatik, cat yang disemprotkan dari sebuah pistol penyemprot dapat dimuati oleh sebuah korona dan diarahkan menuju sebuah sasaran yang dijaga pada potensial yang lebih rendah daripada potensial elektroda korona. Jadi, partikel-partikel cat akan diarahkan oleh gaya elektrostatik agar menempel tepat pada sasaran. Metode ini dapat meningkatkan efisiensi pengecatan dari 40% dengan metode biasa menjadi 70%.** Gambar 10.6 mengilustrasikan satu dari beberapa susunan yang mungkin dilakukan untuk penyemprotan cat elektrostatik.

Gambar 10.6 Cat semprot elektrostatik. Beberapa dari butiran-butiran cat yang mungkin bisa meleset dari sasaran ditarik ke arah sasaran.



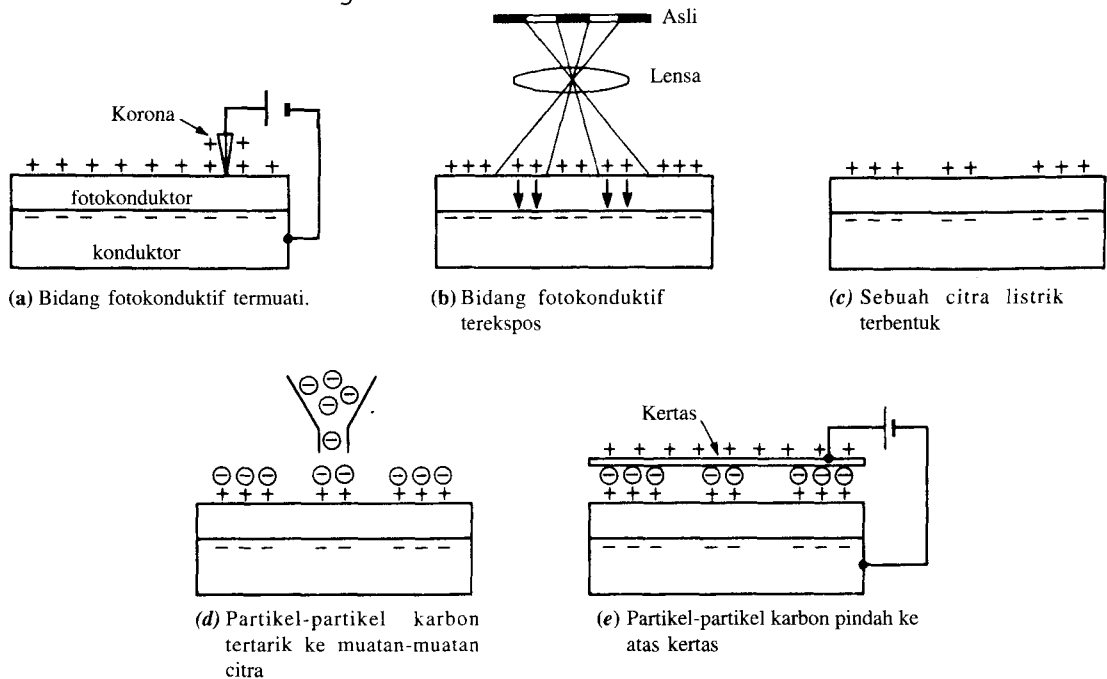
Xerografi

Xerografi adalah teknik yang menggunakan listrik statik dan bahan fotokonduktif untuk merekam gambar. Pertama kali ditemukan sekitar tahun 1930-an dan disebarluaskan pada tahun 1950-an. Mesin xerografi kini menjadi peralatan yang wajib ada di kantor-kantor untuk meng-copy, melebarkan mikrofilm, mencetak faksimile, dan mencetak data komputer. Proses fotografi elektrostatik, berbeda dari proses fotografi biasa, tidak memerlukan negatif kimia fotosentitif. Kenyataannya, negatif digantikan dengan bahan fotosensitif, dan bahan-bahan kimianya diganti dengan elektron, dan keduanya digunakan berulang-ulang, seperti akan dijelaskan di bawah ini.

Dalam Gambar 10.7a (hal. 47), bahan fotokonduktif yang tipis, seperti selenium amorf setebal 20 hingga 100 nm, telah dilapiskan pada sebuah konduktor metal. Fotokonduktif memiliki sebuah sifat yang berguna yaitu titik yang apabila terkena cahaya akan menjadi sebuah konduktor, sedangkan daerah gelap tetap menjadi sebuah isolator. Pada langkah pertama dari proses xerografi, fotokonduktif dimuati dengan pelepasan korona. Prosedur ini dilakukan dalam gelap, sehingga muatan yang berlawanan akan terdistribusi secara

* S. Oglesby, Jr., dan G.B. Nichols, *Electrostatic Precipitation*, New York: Marcel Dekker, Inc., 1978, hal. 4.

** E. P. Miller, "Electrostatic coating," dalam *Electrostatics and Its Applications*, ed. A.D. Moore, New York: Wiley, 1973, hal. 250.

Gambar 10.7 Xerografi

seragam di atas permukaan di seberang fotokonduktor, seperti ditunjukkan pada Gambar 10.7a.

Tahap berikutnya adalah meletakkan sebuah citra cahaya pada fotokonduktor. Daerah yang terekspos akan menjadi konduktif, dan muatan-muatan dalam daerah itu akan terkelupas keluar, sedangkan pada daerah yang gelap, muatan-muatan tetap tidak berubah, seperti ditunjukkan pada Gambar 10.7b. Jumlah muatan yang terkonduksi keluar dalam sebuah daerah yang diberikan akan sebanding dengan intensitas cahaya pada daerah tersebut sehingga akan membentuk sebuah citra elektrostatik yang tersembunyi, seperti ditunjukkan pada Gambar 10.7c. Kemudian, partikel-partikel karbon yang bermuatan negatif disebarkan di atas permukaan citra elektrostatik, seperti ditunjukkan pada Gambar 10.7d. Daerah dengan muatan yang lebih banyak akan menarik partikel-partikel karbon yang lebih banyak. Akhirnya, selembar kertas bermuatan positif ditempatkan di dekat bidang citra tersebut, sehingga partikel-partikel karbon akan tertarik dan menempel pada kertas, seperti ditunjukkan pada Gambar 10.7e. Jadi, citra pada keping fotokonduktif akan dipindahkan ke kertas. Bidang tersebut kemudian dapat dibersihkan dan dimuati kembali untuk siklus xerografi berikutnya.*

Printer Laser

Laser kini digunakan sebagai printer dan menghasilkan kecepatan produksi dan kualitas yang lebih baik daripada printer **dot-matriks** (*dot-matrix*) biasa dan printer *daisy-wheel*. Prinsip operasi printer laser sama dengan xerografi. Perbedaan utamanya adalah pada pembentukan citra bayangan, sebuah proses yang diilustrasikan dalam Citra 10.7b. Dalam xerografi, citra dari salinan asal difokuskan oleh sebuah lensa pada bidang fotokonduktif. Dalam printer laser, citra dibentuk di atas keping fotokonduktif oleh sebuah berkas cahaya yang dipancarkan dari sebuah laser keadaan solid. Keping fotokonduktif tersebut biasanya digulung dalam bentuk silinder dan dinamakan drum. Laser berkedap-kedip ribuan kali per

* Untuk bacaan lanjut, lihat R. M Schaffert, *Electro-Photography*, New York: The Focal Press, 1965, dan J.H. Dessauer dan H. E. Clark, eds, *Xerography and Related Processes*, New York: The Focal Press, 1965.

detik seiring pancaran berkas cahaya ke seluruh drum. Alih-alih menggerakkan laser secara langsung, sebuah cermin majemuk yang berputar kira-kira 100 putaran per detik, digunakan untuk memantulkan berkas cahaya tersebut. Di manapun berkas laser yang terfokus dengan baik menimpa permukaan peka cahaya tersebut, bintang menjadi konduktif dan muatan pada daerah itu akan terlepas. Setelah pemindahan lengkap sebuah halaman, sebuah citra yang tersusun dari muatan kemudian akan terbentuk pada drum fotosensitif. Setelah tahap ini, tahap berikutnya sama dengan tahap pada xerografi.

Printer laser menggabungkan prinsip dari printer dot-matriks dan mesin fotokopi. Tidak seperti printer dot-matriks biasa, printer laser tidak berisik dan mencetak lebih cepat. Printer ini dapat mencetak satu halaman penuh dalam beberapa detik dan memiliki resolusi 14.000 dot per sentimeter persegi.

10.2 KERJA DAN ENERGI

Dalam sebuah medan elektrostatik E , sebuah partikel bermuatan q coulomb mengalami sebuah gaya yang dinyatakan oleh (10.2)

$$F = qE$$

Kerja yang diperlukan untuk memindahkan partikel dari titik A ke titik B adalah

$$W = - \int_A^B qE \cdot dr \quad \text{(kerja yang diperlukan untuk memindahkan } q \text{ dari } A \text{ ke } B\text{)} \quad (10.23)$$

Perhatikan tanda minus dalam (10.23). Jika partikel bergerak ke arah yang berlawanan dengan arah gaya, maka hasil kali dot dari E dan dr akan negatif, menghasilkan W positif. Jadi, energi luar memang diperlukan untuk memindahkan muatan dalam arah itu. Di sisi lain, jika E dan dr memiliki arah yang sama, hasil kali dot-nya positif, menghasilkan W negatif. Kerja negatif ini menandakan bahwa, alih-alih membutuhkan kerja luar, muatan akan menyediakan kerja untuk sistem luar, atau akan mendapatkan energi kinetik jika ia tidak terkait pada sistem luar manapun.

Persamaan (10.23) dapat dituliskan sebagai berikut

$$W = -q \int_A^B E \cdot dr$$

Dari (9.31), kita menyadari bahwa integral di atas (dengan tanda minus) semata-mata mendefinisikan beda potensial antara B dan A :

$$W = q(\Phi_B - \Phi_A) \quad \text{(kerja yang diperlukan untuk memindahkan } q \text{ dari potensial } \Phi_A \text{ ke potensial } \Phi_B\text{)} \quad (10.24)$$

Dengan kata lain, kerja luar diperlukan untuk memindahkan sebuah muatan q dari titik potensial rendah—sebagai contoh, titik A —ke titik potensial tinggi—sebagai contoh titik B . Keadaan ini analog dengan potensial dalam medan gravitasi: kerja luar diperlukan untuk memindahkan sebuah batu dari tanah ke ketinggian tertentu di atas tanah.

Kerja yang dilakukan untuk memindahkan sebuah batu ke suatu ketinggian tertentu tidaklah percuma. Batu tersebut akan memiliki “energi tersimpan (*stored energy*)” karena ketika dilepaskan, batu akan jatuh dan mencapai energi kinetik sebesar kerja yang dialaminya.

Demikian pula, muatan yang dipindahkan ke titik potensial yang lebih tinggi sudah memperoleh energi tersimpan yang sama dengan kerja yang dilakukan oleh gaya luar. Muatan ini akan jatuh lagi ke potensial yang lebih rendah dan pada saat yang sama mendapatkan energi kinetik, ketika ia dilepaskan.

Ingat bahwa rumus kerja (10.23), seperti halnya perhitungan potensial elektrostatik dari medan yang didiskusikan dalam Subbab 9.4, yang tidak bergantung pada lintasan gerakan dan semata-mata merupakan fungsi dari titik akhir **A** dan **B**. Fakta ini adalah akibat langsung dari persamaan (9.39), yang sah untuk sebuah medan elektrostatik. Tidak perlu dikatakan lagi, pernyataan di atas tidak berlaku untuk medan listrik.

Perhatikan sebagai contoh, sebuah partikel bermuatan q coulomb pada titik **A**, di mana potensialnya adalah Φ_A . Partikel bergerak dari **A** ke **B**, di mana potensialnya adalah Φ_B . Anggap bahwa kecepatan awal partikel di **A** adalah v_0 , kemudian kecepatan di **B** adalah v , di mana v memenuhi persamaan berikut:

$$\boxed{\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + q(\Phi_A - \Phi_B)} \quad \begin{array}{l} \text{(energi kinetik di B bila } q \\ \text{berjalan dari A ke B)} \end{array} \quad (10.25)$$

Ingat bahwa (10.25) diperoleh berdasarkan prinsip kekekalan energi. Kecepatan v dapat diperoleh dari persamaan ini tanpa perlu mengetahui rincian gaya pada partikel bermuatan. Dalam Subbab 10.1, kita menghitung gaya Lorentz dan kemudian menggunakan hukum Newton untuk mencari lintasan dari partikel bermuatan. Diskusi yang akan mengarah ke (10.25) ini menunjukkan bahwa, jika fungsi potensial diketahui dari medan E dan jika perhitungan lintasan diperlukan, kecepatan dari sebuah partikel bermuatan dapat diperkirakan secara langsung dari (10.25).

Contoh 10.4 *Partikel bermuatan dipercepat oleh medan listrik. Contoh ini menunjukkan cara mendapatkan kecepatan akhir ketika sebuah partikel bermuatan bergerak melalui sebuah beda potensial V volt.*

Anggap bahwa sebuah muatan q coulomb yang semula diam dalam sebuah medan listrik dipercepat oleh medan tersebut dan mulai bergerak di sepanjang arah medan. Tentukan kecepatan muatan setelah ia bergerak dari **B** ke **A**. V menyatakan beda potensial antara **B** dan **A**.

Solusi Energi kinetik dari partikel bermuatan di titik **A** sama dengan energi potensial qV di mana partikel berhenti agar dapat mencapai kecepatan akhirnya v . Jadi,

$$\frac{1}{2}mv^2 = qV$$

yang menghasilkan

$$v = \sqrt{\frac{2qV}{m}} \quad (10.26)$$

Untuk sebuah elektron dengan muatan $q = -1,6 \times 10^{-19}$ C dan massa $m = 9,11 \times 10^{-31}$ kg yang bergerak melalui beda potensial $V = -100$ volt, kecepatan elektronnya akan menjadi

$$v = 5,93 \times 10^6 \text{ m/s}$$

Kita juga harus mengingat bahwa, jika v mendekati kecepatan cahaya, kita harus memperhitungkan efek relativitas. Massa elektron akan menjadi $m(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, di mana c adalah kecepatan cahaya.

Elektron Volt

Dalam satuan SI, energi dinyatakan dalam Joule. Satuan ini terlalu besar untuk diterapkan dalam fisika atom. Sebagai gantinya, energi kadang-kadang diukur dalam elektronvolt. Satu elektronvolt adalah satu satuan energi yang didapatkan oleh sebuah elektron setelah melintasi sebuah potensial sebesar satu volt.

Dari persamaan (10.24), kita ketahui bahwa

$$1 \text{ eV} = -1,6 \times 10^{-19} \times (-1) = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Jadi, sebuah partikel 1-BeV (satu milyar volt) memiliki energi kinetik $1,6 \times 10^{-10} \text{ J}$.

Contoh 10.5 *Contoh ini memperlihatkan energi potensial dan energi kinetik sebuah elektron pada orbit terdalam suatu atom hidrogen.*

Tentukan energi potensial, energi kinetik, dan energi total untuk elektron atom hidrogen pada orbitnya dengan jari-jari r .

Solusi

Potensial karena nukleus hidrogen di tak terhingga adalah nol, dan potensial pada r adalah $q/4\pi\epsilon r$, di mana muatan nukleus adalah $q = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$. Energi potensial (EP) elektron adalah

$$\text{E.P.} = -\frac{q}{4\pi\epsilon r}$$

Ingat bahwa energi potensial negatif menandakan bahwa kerja negatif harus dilakukan untuk memindahkan elektron dari tak hingga ke r dan elektron akan semakin stabil apabila r semakin kecil. Dari (10.23), kita menghitung kerja yang dilakukan dengan memperhatikan $E = \hat{r} \cdot q/4\pi\epsilon r^2$ dan bahwa muatan elektronnya adalah $-q$.

$$W = -\int_{\infty}^r (-q) \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} dr = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon r}$$

Yang sama dengan energi potensial. Ingat juga bahwa elektron di dalam orbitnya mengalami sebuah gaya listrik $-q^2/4\pi\epsilon r^2$, yang akan diseimbangi oleh gaya sentrifugal mv^2/r .

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon r^2}$$

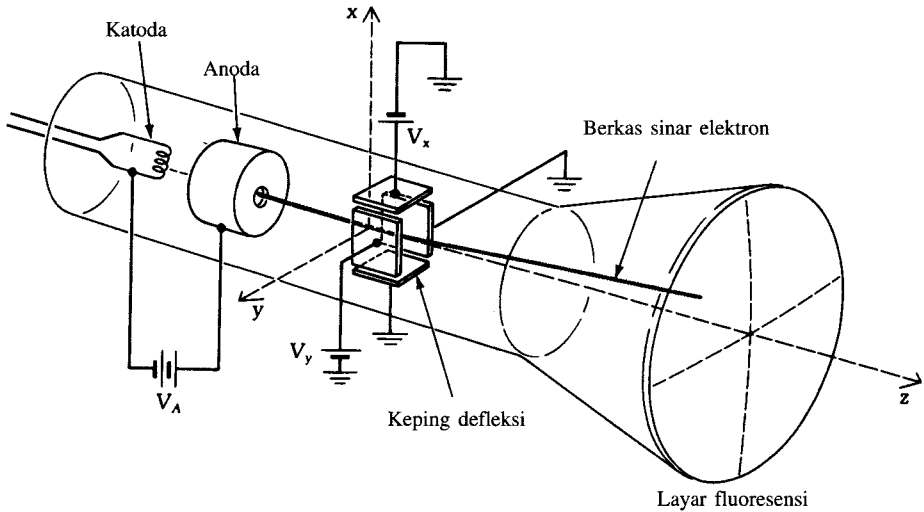
Energi kinetik (EK) dinyatakan oleh

$$\text{E.K.} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon r}$$

yang merupakan setengah dari magnitudo energi potensial. Jadi energi total dari atom hidrogen akan sama dengan $\text{EP} + \text{EK} = -(1/2)(q^2/4\pi\epsilon r)$, yang sama dengan 13,8 eV pada orbit paling dalam, dengan $r = 0,52 \text{ \AA}$. Untuk mengionisasi elektron dari atomnya, seseorang harus menggunakan energi minimum 13,8 eV.

Tabung Sinar Katoda

Tabung sinar katoda, biasanya disebut dengan CRT, secara luas digunakan sebagai alat tampilan pada terminal komputer dan osiloskop. Gambar 10.8 menunjukkan operasi dasar dari sebuah CRT.

Gambar 10.8 Tabung sinar katode (CRT)

Sebuah berkas elektron dipancarkan dari katoda dan dipercepat oleh anoda. Berkas tersebut melalui sebuah tempat terbuka dalam anoda dan masuk ke dalam daerah yang terdiri dari dua pasang keping sejajar ortogonal. Tegangan pada dua keping ini menentukan pembelokan (defleksi) dari berkas elektron dan posisi di mana berkas akan menumbuk layar fluoresensi untuk menghasilkan sebuah titik terang. Dengan mengubah tegangan V_x dan V_y dengan cepat, akan dihasilkan sebuah pola titik pada layar fluoresensi.

Dari (10.25), kita dapat menghitung kecepatan elektron pada anoda:

$$v_z = \sqrt{\frac{2q_e V_A}{m_e}}$$

di mana $-q_e$ dan m_e masing-masing adalah muatan dan massa elektron. Untuk tegangan anoda 1 kV, kita dapatkan

$$v_z = 1,87 \times 10^7 \text{ m/s, merupakan}$$

kecepatan sebuah elektron ketika memasuki daerah keping defleksi. Elektron akan mengalami dua komponen gaya elektrostatik, f_x dan f_y , di mana

$$\begin{aligned} f_x &= m_e \frac{d^2 x}{dt^2} = q_e \frac{V_x}{d_1} \\ f_y &= m_e \frac{d^2 y}{dt^2} = q_e \frac{V_y}{d_2} \\ z &= v_z t \end{aligned}$$

di mana x , y , z adalah koordinat dari elektron pada waktu t ($t = 0$ bersesuaian dengan waktu ketika elektron memasuki daerah keping sejajar) dan d_1 dan d_2 adalah pemisahan keping defleksi x dan keping defleksi y . Jika keping defleksi memiliki panjang ℓ meter, maka waktu ketika elektron meninggalkan daerah adalah t_0 , di mana

$$t_0 = \frac{\ell}{v_z}$$

Konstanta waktu ini sangat penting karena ia menentukan limit atas untuk seberapa cepat tegangan defleksi V_x dan V_y dapat diubah-ubah untuk mengarahkan berkas elektron tersebut ke titik-titik yang berbeda pada layar. Dalam contoh ini, anggap $\ell = 3 \text{ cm}$, dan kita memiliki $t_0 = 1,60 \times 10^{-9} \text{ detik}$.

Pada titik keluar, kecepatan elektron dan posisinya dapat dinyatakan dalam t_0 :

$$v_x = \frac{q_e V_x}{m_e d_1} t_0$$

$$v_y = \frac{q_e V_y}{m_e d_2} t_0$$

$$v_z = v_z$$

$$x = \frac{q_e V_x}{2m_e d_1} t_0^2$$

$$y = \frac{q_e V_y}{2m_e d_2} t_0^2$$

$$z = v_z t_0$$

Ingat bahwa elektron bergerak pada kecepatan konstan dari saat ia meninggalkan daerah keping defleksi hingga ia menumbuk layar. Dalam contoh sekarang, anggap bahwa jarak antara layar fluoresensi dan titik keluar dari daerah defleksi adalah 15 cm. Kita akan menghitung posisi sebenarnya di mana berkas elektron akan menumbuk layar.

Ambil $V_x = V_y = 100$ volt, dan $d_1 = d_2 = 1$ cm. Pada $t = 1,6 \times 10^{-9}$ detik (waktu elektron meninggalkan daerah defleksi),

$$V_{x0} = v_{y0} = 2,81 \times 10^6 \text{ m/s}$$

$$x_0 = y_0 = 0,22 \text{ cm}$$

Setelah waktu itu,

$$x = x_0 + v_{x0}(t - t_0)$$

$$y = y_0 + v_{y0}(t - t_0)$$

$$z = z_0 + v_z(t - t_0)$$

Elektron akan menumbuk layar pada $t = t_1$ dan $x = x_1$, $y = y_1$, di mana

$$t_1 = t_0 + \frac{0,15}{v_z} = t_0 + 8,02 \times 10^{-9} \text{ s}$$

$$x_1 = y_1 = 2,47 \text{ cm}$$

Pendorong Ion

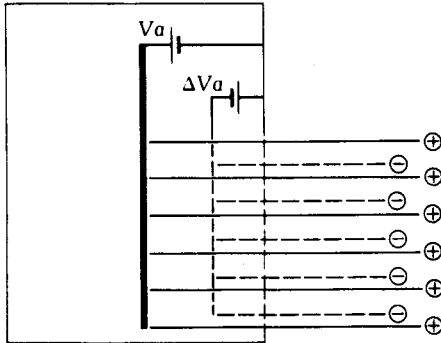
Sebuah mesin roket biasa mendorong roket ke depan dengan mengeluarkan bahan bakar ke belakang. F (gaya) tolak yang terjadi dinyatakan oleh

$$F = \frac{d}{dt}(mv) = v \frac{dm}{dt}$$

di mana dm/dt adalah laju keluaran bahan bakar dan v adalah kecepatan keluaran, yang merupakan konstanta. Untuk bahan bakar kimia, kecepatan keluaran dapat mencapai kecepatan supersonik, dengan orde 10^3 m/s. Sangat sulit untuk mencapai kecepatan yang jauh lebih tinggi dengan menggunakan bahan bakar kimia.

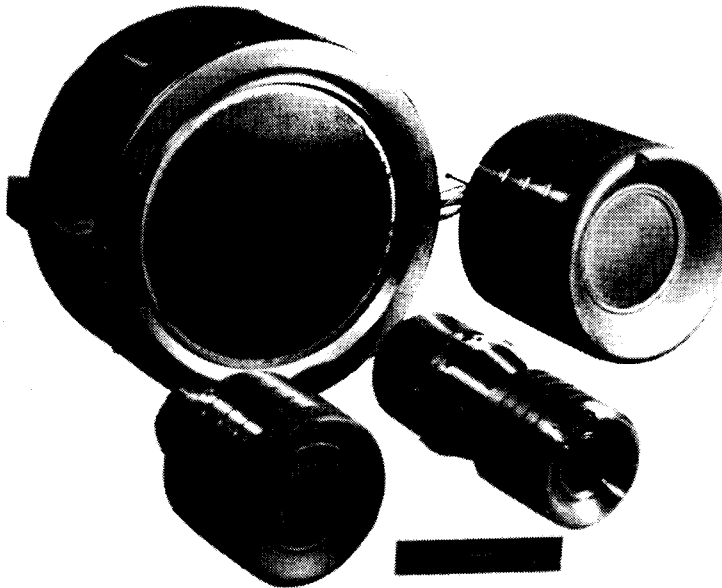
Pendorong ion menggunakan partikel terionisasi sebagai bahan bakar. Partikel-partikel tersebut dipercepat dengan gaya elektrostatik hingga mencapai kecepatan yang jauh lebih tinggi. Jadi, untuk dorongan yang sama, diperlukan massa yang lebih kecil daripada yang dibutuhkan oleh sebuah mesin kimia.

Gambar 10.9a mengilustrasikan prinsip operasi dasar dari pendorong ion. Bahan bakar memasuki ruang ionisasi, kemudian ia akan diionisasi baik itu oleh panas atau oleh hamburan



Gambar 10.9(a) Sebuah pendorong ion.

Gambar 10.9(b) Beberapa pendorong ion satelit. Bentuk terbesarnya memiliki diameter 30 cm dan mampu menghasilkan 129 milinewton daya dorong. Yang paling kecil menghasilkan kira-kira 5 milinewton daya dorong (seizin Hughes Aircraft Company).



elektron.* Ion-ion positif dipercepat dan dikeluarkan melalui layar. Elektron diserap oleh anoda. Elektron-elektron ini juga harus dikeluarkan bersama dengan ion positif pada kecepatan yang sama. Jika tidak, roket semakin negatif, dan ion-ion positif yang dikeluarkan terpaksa tertarik kembali ke pendorong. Keluarnya elektron tersebut dilakukan oleh katoda dan sebuah filamen yang dipanaskan bertindak sebagai sumber elektron.

Kecepatan ion positif v_i diberikan oleh

$$v_i = \left(\frac{2q}{m_i} V_a \right)^{1/2}$$

di mana q adalah muatan pada ion positif dan m_i adalah massanya.

* D. B. Langmuir, E. Stuhlinger, dan J.M. Sellen, Jr., *Electrostatic Propulsion*, New York: Academic Press, 1961, hal. 3 – 20.

Kecepatan elektron v_e diberikan oleh

$$v_e = \left(\frac{2q_e \Delta V_a}{m_e} \right)^{1/2}$$

di mana q_e sama dengan $1,60 \times 10^{-19}$ C dan $m_e = 9,11 \times 10^{-31}$ kg. Untuk menetralkan ion yang dikeluarkan, v_e haruslah sama dengan v_i . Jadi, tegangan V_a dan ΔV_a harus dihubungkan dengan persamaan berikut:

$$\frac{V_a}{m_i} = \frac{\Delta V_a}{m_e}$$

Ingat bahwa kita telah menganggap bahwa ion-ion ini membawa sebuah muatan positif tunggal. Karena $m_i \gg m_e$, kita dapatkan $V_a \gg \Delta V_a$.

Untuk memperkirakan kecepatan campuran ion dan elektron yang dikeluarkan, kita menggunakan data berikut:

$$V_a = 2500 \text{ volt}$$

$$m_i = 133 \times 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg (sebanding dengan massa cesium yang memiliki berat atom 133)}$$

$$q = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$$

Kita dapatkan

$$v_i = 0,6 \times 10^5 \text{ m/s}$$

Sebuah mesin roket dengan bahan bakar kimia tidak dapat mencapai kecepatan ini.

Untuk memperkirakan magnitudo daya dorong yang dihasilkan oleh sebuah pendorong ion, kita anggap bahwa arus ion 0,1 A. Dengan anggapan selanjutnya bahwa setiap ion cesium membawa satu muatan positif, kita dapat menghitung jumlah ion per volume untuk menghasilkan arus 0,1 A:

$$I = nv_i qA$$

di mana A adalah penampang berkas ion. Tingkat semburan massa adalah

$$\frac{dm}{dt} = nv_i m_i A$$

Jadi,

$$F = v_i \frac{dm}{dt} = \frac{v_i m_i I}{q}$$

Dengan menggunakan data yang diberikan di atas, kita dapatkan

$$F = 8,3 \times 10^{-3} \text{ N}$$

sebuah angka kecil yang sama dengan $1,9 \times 10^{-3}$ lb gaya. Pendorong ion digunakan pada satelit bersama untuk mengatur posisinya dan untuk mengatur arah antenna. Selain itu mereka juga dapat digunakan untuk menjelajahi ruang angkasa karena rasio daya dorong terhadap massa bahan bakarnya lebih besar apabila dibandingkan terhadap mesin kimia. Gambar 10.9b memperlihatkan sejumlah pendorong ion satelit.

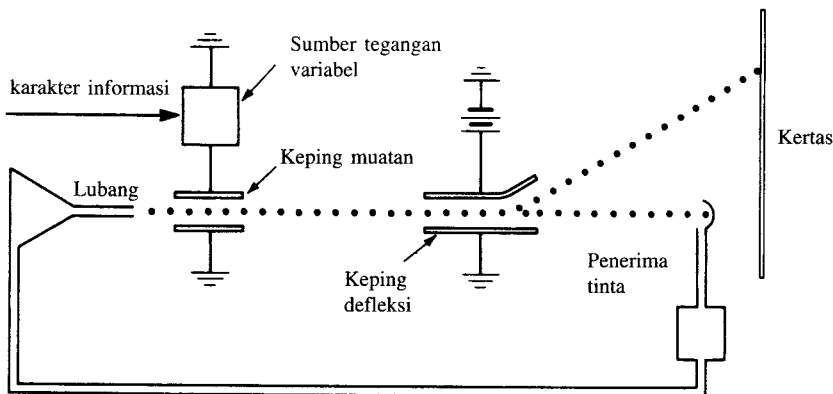
Printer Tinta (Ink Jet)

Kebanyakan mesin ketik dan printer yang dihubungkan ke komputer menggunakan apa yang disebut cetakan tumbuk – artinya, karakter dibuat dalam bentuk logam, yang kemudian akan menumbuk pita tinta untuk menghasilkan cetakan pada kertas. Persyaratan yang baru akan unjuk kerja dan kecepatan yang handal telah melebihi batas kemampuan teknologi cetakan tumbuk. Printer tinta adalah salah satu metode alternatif. Gambar 10.10a menunjukkan diagram skema dari sistem.

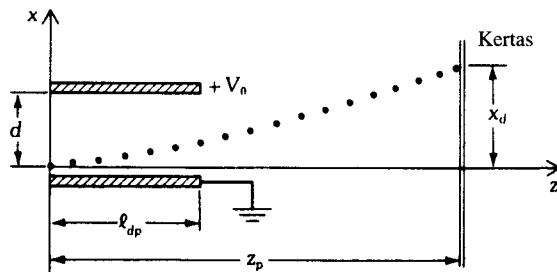
Pertama, butiran tinta disemprotkan dari sebuah lubang. Lubang bergetar pada frekuensi ultrasonik untuk memberikan tekanan pada tinta sehingga ketika tinta meninggalkan lubang, akan terbentuk butiran dengan ukuran dan jarak yang sama. Butiran yang jatuh ini kemudian melewati sebuah elektroda muatan, yang akan memberikan muatan kepadanya dengan besar listrik yang dapat diubah-ubah. Selanjutnya, mereka akan melalui sepasang keping sejajar yang dimuati pada suatu tegangan yang tetap. Butiran tinta yang jatuh dibelokkan secara vertikal, dengan perpindahan yang sebanding dengan jumlah listrik yang dibawahnya. Sebagai contoh, butiran yang dibiarkan jatuh tanpa dimuati akan menghasilkan titik kosong. Tinta yang jatuh ini tidak dibelokkan dan justru akan langsung bergerak menuju pengumpul tinta. Sebaliknya, apabila dimuati, tinta akan jatuh pada kertas di titik yang telah ditentukan sebelumnya. Kepala printer bergerak secara horisontal dengan kecepatan tetap dan kemudian menghasilkan sebuah pola (karakter atau simbol) pada kertas.

Pada proses dengan printer tinta, butiran tinta dapat terbentuk pada kecepatan kira-kira 10^5 butiran per detik.* Agar kualitas cetakan tinggi, diperlukan butiran sebanyak 10^3 untuk

Gambar 10.10(a) Printer tinta (ink jet)



Gambar 10.10(b) Sistem koordinat untuk menghitung perpindahan tetesan tinta.



* W.L. Buehner, J.D. Hill, T.H. Williams, dan J.W. Woods, "Application of ink jet technology to a word processing output printer," *IBM J. Res. Develop.*, January 1977, hal. 2-9.

mencetak sebuah karakter. Jadi, karakter dapat dihasilkan dengan kecepatan 100 karakter per detik! Printer tinta (ink jet) memiliki bagian bergerak yang lebih sedikit daripada printer tumbuk dan oleh karena itu lebih terjamin. Di luar itu semua, printer ini lebih tidak berisik.

Contoh 10.6 Berikut ini adalah contoh numerik dari sistem printer tinta.

Anggap bahwa sebuah butiran tinta dengan diameter 0,033 mm dimuati sebesar -100×10^{-15} C. Kerapatan tinta adalah 2 g/cc. Keping defleksi dimuati 3300 V dengan jarak antar keping 1,6 mm. Panjang keping defleksi ini adalah 1,3 cm, dan jarak dari tempat keluar keping defleksi tersebut ke kertas adalah 1,0 cm. Kecepatan butiran tinta diasumsikan 20 m/s. Tentukan perpindahan vertikal butiran tinta.

Solusi

Titik asal koordinat dianggap sebagai tempat masuk dari keping defleksi, seperti ditunjukkan pada Gambar 10.10b. Di dalam keping defleksi, dapat diperoleh persamaan berikut:

$$\begin{aligned}v_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{qV_0}{md}t \\x &= \frac{qV_0}{2md}t^2 \\z &= v_z t\end{aligned}$$

Untuk $z > 1,3$ cm di luar daerah keping defleksi,

$$\begin{aligned}z &= v_z t \\x &= x_0 + v_{x0}(t - t_0)\end{aligned}$$

di mana t_0 adalah waktu ketika butiran tinta melewati keping defleksi, x_0 dan v_{x0} adalah posisi dan kecepatannya pada titik keluar dari keping defleksi.

Untuk mendapatkan sebuah penyelesaian numerik, pertama-tama kita akan menghitung massa butiran.

$$\begin{aligned}m &= \frac{4\pi}{3} \left(\frac{1}{2} \times 0,033 \times 10^{-1} \text{ cm} \right)^3 \times (2 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3) \\&= 3,76 \times 10^{-11} \text{ kg}\end{aligned}$$

Kecepatan dalam arah z tidak akan terpengaruh oleh tegangan defleksi. Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}t_0 &= \frac{1,3 \times 10^{-2}}{20} = 6,5 \times 10^{-4} \text{ s} \\v_{x0} &= \frac{1 \times 10^{-13} \times 3300}{3,76 \times 10^{-11} \times 1,6 \times 10^{-3}} \times 6,5 \times 10^{-4} = 3,6 \text{ m/s} \\x_0 &= 1,2 \text{ mm} \\t_1 &= \frac{2,3 \times 10^{-2}}{20} = 1,15 \times 10^{-3} \text{ s} \\x_1 &= 1,2 \times 10^{-3} + 3,6 \times (11,5 - 6,5) \times 10^{-4} = 3 \text{ mm}\end{aligned}$$

Ingat bahwa karena $x_0 = 1,2$ mm, yang lebih besar daripada jarak antar keping defleksi, keping-keping tersebut harus dilengkungkan keluar pada ujung titik keluarnya sehingga mereka tidak akan menghalangi butiran tinta.

Energi Listrik Tersimpan dalam Sebuah Sistem Dua-Muatan

Perhatikan sebuah muatan q_1 yang terletak pada titik asal, dan bawalah muatan lain q_2 coulomb dari tempat tak hingga ke r meter dari q_1 . Anggap bahwa q_1 dan q_2 bertanda sama; maka akan ada gaya tolak yang melawan gerakan q_2 untuk mendekati ke q_1 . Gaya ini diberikan oleh (10.3):

$$f_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon r^2} \hat{r}$$

Jadi, kerja total yang diperlukan untuk membawa q_2 ke r sambil melawan gaya ini, menurut (10.23), diberikan sebagai berikut:

$$W = - \int_{\infty}^r \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon r^2} dr = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon r}$$

Seperti telah disebutkan sebelumnya dalam bagian ini, kerja ini tidaklah percuma. Kerja akan menjadi energi listrik yang tersimpan dalam sistem dua-muatan. Anggap U_E menyatakan energi listrik tersimpan dalam sistem ini. Kita akan melihat bahwa

$U_E = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon r}$	(energi listrik tersimpan dalam sebuah sistem dua-muatan)	(10.27)
--	---	---------

Energi Listrik Tersimpan dalam Sebuah Sistem N-Muatan

Sekarang kita perhatikan sebuah sistem yang terdiri atas N muatan: q_1, q_2, \dots, q_N . Bagaimanakah energi listrik tersimpan dalam sistem ini?

Untuk menjawab pertanyaan di atas, kita akan mencoba melihat berapa besar kerja yang diperlukan untuk meletakkan N muatan dalam tempatnya yang sekarang. Kerja ini sama dengan energi listrik tersimpan. Untuk memulainya, kita meletakkan q_1 pada posisinya, sedangkan semua muatan lain terletak pada tempat tak hingga. Sistem awal ini tidak menyimpan energi listrik. Sekarang, kita bawa q_2 dari tempat tak hingga ke posisinya, dan kerja yang dilakukan untuk gerakan ini diberikan oleh (10.27):

$$W_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon r_{12}} \quad (10.28)$$

Selanjutnya, kita membawa q_3 dari tempat tak hingga. Untuk melakukannya, kita harus mengatasi gaya Lorentz yang diakibatkan oleh kedua muatan q_1 dan q_2 . Dengan kata lain, q_1 dan q_2 telah menghasilkan medan potensial Φ_{12} , yang sesuai dengan (9.12), diberikan oleh:

$$\Phi_{12} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon r_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon r_2}$$

di mana r_1 dan r_2 adalah jarak terhadap q_1 dan q_2 . Untuk meletakkan q_3 , diperlukan kerja sebesar $\Phi_{12} q_3$, seperti yang dapat kita lihat dari (10.24). Jadi, kerja total yang diperlukan untuk meletakkan sebuah sistem tiga muatan diberikan sebagai berikut:

$$W_{123} = \left(\frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon r_{23}} \right) + \left(\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon r_{12}} \right) \quad (10.29)$$

Penulisan kembali persamaan di atas dalam bentuk penjumlahan akan menghasilkan:

$$W_{123} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^3 \sum_{\substack{n=1 \\ m \neq n}}^3 \frac{q_m q_n}{4\pi\epsilon r_{mn}} \quad (10.30)$$

Dalam (10.30), penjumlahan kedua menjumlahkan semua m dari 1 hingga 3 kecuali $n = m$. Faktor $1/2$ muncul karena kenyataan bahwa penjumlahan tersebut menghasilkan enam suku karena setiap suku dalam (10.29) dihitung dua kali.

Melanjutkan proses ini untuk N muatan akan mendapatkan hasil akhir sebagai berikut:

$$W = U_E = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^3 \sum_{\substack{n=1 \\ m \neq n}}^3 \frac{q_m q_n}{4\pi\epsilon r_{mn}} \quad \text{(energi listrik tersimpan dalam sistem } N\text{-muatan)} \quad (10.31)$$

Energi Listrik Tersimpan dalam Sebuah Sistem Dengan Distribusi Muatan Kontinu

Apabila distribusi muatan diberikan dalam rapat muatan ρ_v (coulomb per meter kubik) dan bukan dalam muatan diskrit, energi listrik tersimpan dapat ditentukan dengan membagi volume yang terdiri atas ρ_v menjadi volume-volume yang sangat kecil dan kemudian menggunakan (10.31).

Kita menyadari bahwa penjumlahan pertama terhadap m dalam (10.31) ini semata-mata merupakan fungsi potensial $N - 1$ muatan tanpa menyertakan muatan ke- n . Dalam kasus ini, kita dapat menggantikan penjumlahan yang pertama dengan Φ , potensial skalar akibat ρ_v :

$$U_E = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi q_n \quad (10.32)$$

Karena q_n sangat kecil, apakah Φ termasuk atau tidak, tidak akan berpengaruh dalam kasus terbatas ini.* Penjumlahan dalam (10.32) dapat digantikan dengan sebuah integral:

$$U_E = \frac{1}{2} \int_v \Phi \rho_v \, dv \quad (10.33)$$

di mana integrasi dilakukan terhadap volume V yang mengandung muatan tersebut. Persamaan di atas dapat ditulis dengan bentuk lain. Ingat bahwa

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$$

Maka,

$$U_E = \frac{1}{2} \int_{\text{ruang keseluruhan}} \Phi \nabla \cdot \mathbf{D} \, dv \quad (10.34)$$

Agar mudah secara matematis, integrasi diperluas dalam ruang keseluruhan. Perluasan ini diperbolehkan karena $\nabla \cdot \mathbf{D}$ akan nol di luar V . Sekarang kita akan menggunakan identitas vektor berikut:

$$\nabla \cdot (\Phi \mathbf{D}) = \nabla \Phi \cdot \mathbf{D} + \Phi \nabla \cdot \mathbf{D} \quad (10.35)$$

Substitusi ke dalam (10.35) menghasilkan

$$U_E = \frac{1}{2} \int_{\text{ruang keseluruhan}} \nabla \cdot (\Phi \mathbf{D}) \, dv + \frac{1}{2} \int_{\text{ruang keseluruhan}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \, dv \quad (10.36)$$

Dalam usaha mendapatkan (10.36) ini kita menggunakan fakta bahwa $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$. Integral yang pertama dapat diubah menjadi sebuah integral permukaan dengan menggunakan teorema divergensi (9.27):

* Tidak diperhitungkan selama ρ_v adalah fungsi dari ruang, tidak seperti fungsi delta.

$$\frac{1}{2} \int_{\text{ruang keseluruhan}} \nabla \cdot (\Phi \mathbf{D}) dv = \frac{1}{2} \int_{\text{permukaan di } \infty} \Phi \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \quad (10.37)$$

Ingat bahwa sebuah distribusi muatan yang terhingga akan tampak seperti sebuah muatan titik terhadap seorang pengamat pada jarak tak hingga. Oleh karena itu,

$$\Phi \rightarrow \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r} \quad (\text{pada } r \rightarrow \infty)$$

$$D_r \rightarrow \frac{Q}{4\pi r^2} \quad (\text{pada } r \rightarrow \infty)$$

di mana Q adalah muatan total dalam volume tersebut.

Jadi, pada saat r mendekati tak hingga, hasil kali $\Phi \mathbf{D}$ pada integran dalam (10.37) menurun menurut $1/r^3$. Permukaan pada tak hingga naik dengan r^2 , yang tidak cukup cepat untuk mengimbangi kecepatan penurunan integran. Akibatnya, integral dalam (10.37) akan sama dengan nol. Dengan melihat fakta ini, kita sekarang dapat menyatakan energi listrik tersimpan hanya dalam integral kedua pada (10.36)—artinya,

$$U_E = \frac{1}{2} \int_{\text{ruang keseluruhan}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dv = \frac{\epsilon}{2} \int_{\text{ruang keseluruhan}} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) dv \quad \begin{array}{l} \text{(energi listrik} \\ \text{yang tersimpan} \\ \text{pada ruang)} \end{array} \quad (10.38)$$

di mana kita menggunakan hubungan konstitutif $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$.

Contoh 10.7 Sebuah sistem yang tersusun atas muatan listrik bertanda sama akan mengandung energi listrik tersimpan. Contoh ini menunjukkan konversi energi kinetik ke energi potensial ketika dua muatan dengan tanda yang sama saling bergerak mendekati. Energi listrik yang tersimpan dihitung dari (10.31).

Sebuah elektron bergerak dalam udara dengan kecepatan 10^5 m/s dan bergerak langsung menuju elektron diam di kejauhan. Seberapa jauh jarak yang dapat dicapai elektron yang bergerak ke elektron diam ini sebelum gaya tolak membalikkannya kembali?

Solusi Semakin dekat jarak antara kedua elektron, semakin tinggi energi tersimpan dalam sistem. Gaya tolak akan memperlambat gerakan elektron. Apabila kecepatan menurun, energi kinetik akan dikonversi ke dalam energi listrik tersimpan. Pada jarak pertemuan terdekat, seluruh energi kinetik akan dikonversi menjadi energi tersimpan.

Anggap jarak pertemuan terdekat dinyatakan dalam r_0 . Sesuai dengan (10.28), kita dapatkan

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon r_0} \quad (10.39)$$

Mensubstitusikan $m = 9,11 \times 10^{-31}$ kg, $v_0 = 10^5$ m/s, $q_1 = q_2 = -1,60 \times 10^{-19}$ C, $\epsilon_0 = 1/36\pi \times 10^{-9}$ F/m, kita dapatkan $r_0 = 5,1 \times 10^{-8}$ m.

Contoh 10.8 Contoh ini menunjukkan bahwa kapasitor keping sejajar dapat dianggap sebagai sebuah piranti untuk menyimpan energi listrik karena di dalamnya terdapat medan listrik. Energi listrik tersimpannya dihitung dari (10.38).

Sebuah kapasitor keping sejajar dimuati sampai 100 V. Anggap jarak pemisah antara dua keping adalah 1 cm, luas tiap keping adalah 100 cm^2 , dan medianya adalah udara. Tentukan energi listrik total yang tersimpan pada kapasitor.

Solusi

Kita dapat menggunakan (10.38) untuk menghitung energi listrik tersimpan. Medan listrik dalam keping sejajar dinyatakan oleh

$$E_0 = \frac{V_0}{d} = 10^4 \text{ volt/m}$$

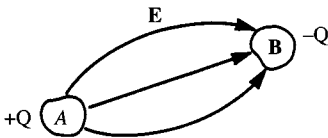
$$U_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{\text{keping sejajar}} (10^8) dv = 4,42 \times 10^{-8} \text{ J} \quad (10.40)$$

10.3 KAPASITANSI

Seperti yang telah kita pelajari pada Subbab 9.4, potensial dari konduktor sempurna adalah sebuah konstanta. Antara dua konduktor sempurna A dan B , dua konstanta dapat berbeda dan dapat menghasilkan beda potensial, $V = \Phi_A - \Phi_B$. Beda potensial ini menunjukkan keberadaan medan listrik di antara kedua konduktor, seperti ditunjukkan pada Gambar 10.11. Semua garis medan listriknya akan tegak lurus terhadap permukaan konduktor karena kondisi batas (4.4) mensyaratkan medan listrik tangensial adalah nol. Anggap kedua konduktor tersebut membawa muatan total yang sama dan berlawanan.

Misalkan muatan pada setiap konduktor adalah Q . Kapasitansi didefinisikan oleh

$$C \equiv \frac{Q}{V} \quad (\text{definisi kapasitansi}) \quad (10.41)$$



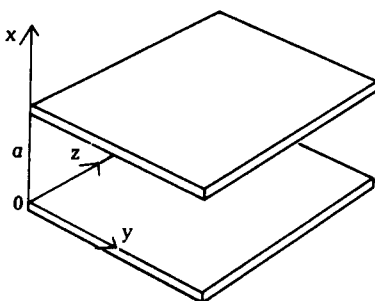
Gambar 10.11 Dua konduktor yang masing-masing membawa muatan $+Q$ dan $-Q$ membentuk sebuah kapasitor.

Karena tegangan V sebanding dengan Q (persamaan Maxwell adalah persamaan linier terhadap sumber), kapasitansi yang didefinisikan dalam (10.41) adalah sebuah konstanta yang ditentukan berdasarkan konfigurasi geometri dari kedua konduktor.

Kapasitor Keping Sejajar

Sebuah kapasitor keping sejajar terdiri atas dua konduktor datar seluas A yang terpisah sejauh a , seperti ditunjukkan dalam Gambar 10.12. Dengan mengabaikan medan yang di tepi, medan listrik antara keping merupakan sebuah vektor konstan dalam arah \hat{x}

$$E = \hat{x} E_0$$



Gambar 10.12 Sebuah kapasitor keping sejajar.

Persamaan ini sebenarnya adalah Persamaan (5.13) dengan $k = 0$ dan $\mathbf{H} = 0$. Beda potensial antar keping adalah

$$V = \int_0^a dx E_0 = E_0 a$$

Muatan total pada keping di $x = 0$, menurut kondisi batas (4.5), adalah

$$Q = \epsilon E_0 A$$

Jadi,

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon A}{a} \quad (10.42)$$

Ingat bahwa kapasitansi bergantung pada geometri kapasitor dan pada dielektrik antara kedua konduktor. Kapasitansi tidak bergantung pada kuat medan atau jumlah muatan pada konduktor.

Contoh 10.9 *Ini adalah contoh numerik untuk menghitung kapasitansi dari kapasitor keping sejajar.*

Tentukan kapasitansi kapasitor keping sejajar dengan $A = 1 \text{ m}^2$, $a = 1 \text{ mm}$, dan $\epsilon = 9\epsilon_0$.

Solusi $C = 7,96 \times 10^{-8} \text{ F}$

Ingat bahwa kapasitansi merupakan bilangan yang kecil bila dinyatakan dalam Farad.

Kapasitor Bola

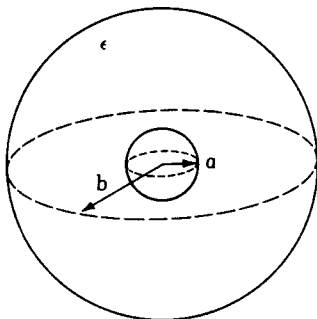
Sebuah kapasitor yang terbuat dari dua konduktor konsentris (sepusat) dengan jari-jari a dan b , seperti ditunjukkan pada Gambar 10.13. Anggap muatan total pada bola bagian dalam dengan jari-jari a adalah Q . Garis medan listrik adalah radial dengan besar

$$E = \hat{r} \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}$$

Beda potensialnya adalah

$$V = \int_a^b dr \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

Gambar 10.13 Sebuah kapasitor bola konsentris.



Kapasitansi dengan mudah ditentukan dari dua persamaan di atas

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \quad (10.43)$$

Kita lihat bahwa apabila jari-jari bola terluar mendekati tak hingga, maka

$$C = 4\pi\epsilon a \quad (10.44)$$

Kapasitansi dari kubah generator Van de Graaff (lihat Subbab 9.4) dengan $a = 0,5$ m dapat dihitung dengan menggunakan persamaan (10.44), yang menghasilkan $C = 55,6 \times 10^{-12}$ C. Ingat bahwa dalam kasus ini konduktor terluar sebenarnya adalah struktur dari ruangan atau permukaan tanah.

Contoh 10.10 *Contoh ini menunjukkan bahwa bumi dapat dianggap sebagai sebuah kapasitor dan kapasitansinya merupakan bilangan yang kecil bila dinyatakan dalam Farad meskipun ukuran fisiknya besar.*

Berapakah kapasitansi “konduktor” bola yang disebut dengan bumi?

Solusi

Kita menggunakan (10.44). Dalam kasus ini, ϵ adalah media yang mengelilingi bumi dengan besar, sama dengan ϵ_0 . “Konduktor terluar” terletak pada jarak tak hingga, $a = 6,5 \times 10^6$ m; jadi,

$$C = 7,2 \times 10^{-4} \text{ F.}$$

Kapasitor Silinder-Koaksial

Sebuah kapasitor silinder-koaksial terdiri atas dua silinder konduktor konsentris dengan jari-jari dalam a dan jari-jari luar b , seperti ditunjukkan pada Gambar 10.14. Kita anggap panjangnya h dan permitivitas dielektriknya ϵ . Medan listrik diberikan oleh (9.22):

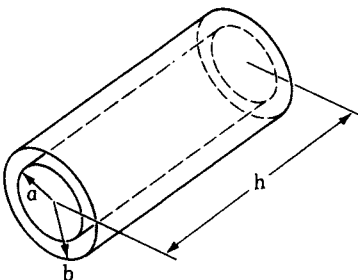
$$\hat{E} = \hat{\rho} \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon\rho} \quad (\text{koordinat silinder})$$

Beda potensialnya adalah

$$V = \int_a^b d\rho \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon\rho} = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Muatan total pada konduktor bagian dalam adalah

$$Q = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} a d\phi \frac{\rho_\ell}{2\pi a} = \rho_\ell h$$



Gambar 10.14 Sebuah kapasitor silinder-koaksial.

Jadi, kapasitansinya adalah

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\epsilon h}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad (10.45)$$

Saluran koaksial yang didiskusikan dalam Bab 5 memiliki kapasitansi $2\pi\epsilon/\ln(b/a)$ farad per meter.

Energi Tersimpan dalam sebuah Kapasitor

Kapasitor dapat dipandang sebagai piranti untuk menyimpan muatan listrik. Pandangan ini kadangkala menyesatkan karena muatan total dalam sebuah kapasitor sebenarnya nol. Definisi yang lebih baik dari kapasitor adalah bahwa kapasitor merupakan piranti untuk menyimpan energi listrik. Dari persamaan (10.33) dan Gambar 10.11, kita melihat bahwa energi listrik yang tersimpan pada sebuah kapasitor adalah

$$U_E = \frac{1}{2} \int \Phi \rho_v dv$$

Merujuk pada Gambar 10.11 dan mengingat bahwa Φ sama dengan Φ_A pada A dan sama dengan Φ_B pada B , kita lihat bahwa

$$U_E = \frac{1}{2} \left(\Phi_A \int_A \rho_v dv + \Phi_B \int_B \rho_v dv \right) = \frac{1}{2} (\Phi_A Q_A + \Phi_B Q_B)$$

Dari sebuah kapasitor, $Q_A = Q$, $Q_B = Q$; oleh karena itu,

$$U_E = \frac{1}{2} (\Phi_A - \Phi_B) Q = \frac{1}{2} Q V_{AB}$$

Ingat bahwa

$$C = \frac{Q}{V_{AB}}$$

Kita akan memperoleh

$$\boxed{C = \frac{2U_E}{(V_{AB})^2}} \quad (\text{definisi ekivalen dari kapasitansi}) \quad (10.46)$$

Kadangkala, (10.46) digunakan untuk mendefinisikan kapasitansi C .

Contoh 10.11 *Contoh ini menunjukkan bahwa terdapat dua cara untuk menghitung energi listrik tersimpan sebuah kapasitor. Cara yang pertama adalah dengan mengintegrasikan medan listrik—yaitu, menggunakan (10.38). Cara lainnya adalah dengan menghitungnya dalam bentuk kapasitansi dan muatan listrik dengan menggunakan (10.46).*

Anggap kapasitor silinder-koaksial yang ditunjukkan pada Gambar 10.14 dimuati sampai 100 V, dengan $a = 0,5$ cm, $b = 0,6$ cm, $h = 2$ cm, dan $\epsilon = \epsilon_0$. Tentukan energi listrik tersimpan pada kapasitor.

Solusi

Kita akan menggunakan dua metode untuk menyelesaikan soal ini.

Metode I: Pertama-tama kita hitung kapasitansi C dengan menggunakan (10.45):

$$C = 6,09 \times 10^{-12} \text{ F}$$

Kemudian, kita gunakan (10.46) untuk menghitung U_E :

$$U_E = 3,05 \times 10^{-8} \text{ J}$$

Metode II: Kita akan menyelesaikan soal ini dengan cara yang rumit. Alih-alih menggunakan persamaan (10.46), kita akan menggunakan persamaan (10.38). Konsep kita adalah bahwa sebuah kapasitor merupakan piranti untuk menyimpan energi listrik dan bahwa energi listrik ini berbentuk medan listrik yang terdistribusi pada sebuah volume.

Medan listrik dalam daerah silinder-koaksial dinyatakan oleh

$$E = \frac{V_0}{\rho} \hat{\rho}$$

Beda potensial antara konduktor sebelah dalam dan sebelah luar adalah

$$100 = \int_a^b E \, d\rho \cdot \hat{\rho} = V_0 \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

Jadi,

$$V_0 = \frac{100}{\ln 1,2} = 548$$

Mensubstitusikan E ke dalam (10.38) akan menghasilkan

$$U_E = \frac{1}{2} \epsilon \int \frac{V_0^2}{\rho^2} dv$$

Dalam koordinat silinder, $dv = (d\rho)(\rho d\phi)(dz)$; oleh karena itu,

$$\begin{aligned} U_E &= \frac{1}{2} \epsilon \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_a^b \rho \, d\rho \frac{(V_0)^2}{\rho^2} \\ &= \epsilon h \pi V_0^2 \ln \left(\frac{b}{a} \right) \\ &= 3,05 \times 10^{-8} \text{ J} \end{aligned}$$

Kegagalan Dielektrik

Spesifikasi dari sebuah kapasitor tidak hanya meliputi nilai kapasitansi, tetapi juga tegangan maksimum di mana kapasitor tersebut dimuati. Apa yang terjadi jika kapasitor kelebihan muatan? Jawabannya adalah dielektrik yang memisahkan kedua konduktor akan mengalami kegagalan dan kapasitor akan mengalami hubungan pendek atau terbakar.

Kegagalan sebuah dielektrik mirip dengan ionisasi udara yang didiskusikan dalam Subbab 10.1. Dalam isolator dielektrik sebuah kapasitor, meskipun jumlah elektron bebas sangat kecil, pengatur dan cacat-cacat lainnya tetap mengandung elektron. Elektron-elektron ini dipercepat oleh medan listrik dan menumbuk struktur isi dari bahan dielektrik. Jika medan listriknya cukup tinggi untuk menghasilkan sepasang lubang-elektron yang juga

dipercepat oleh medan listrik, tumbukan akan semakin banyak, dan kegagalan akhirnya terjadi.

Tabel 10.1 menunjukkan daftar beberapa isolasi material yang biasa dipakai dengan kuat medan listrik kegagalannya.

Tabel 10.1 Kuat Medan Listrik Kegagalan dari Isolator.

Material	Permitivitas relatif	Medan Kegagalan E (10^6 V/m)
Udara	1,0	Mendekati 3 [lihat (10.22)]
Minyak	2,3	15
Kertas	1,5 – 4,0	15
Polistirene	2,7	20
Kaca	6,0	30
Mika	6,0	200

Contoh 10.12 *Ini adalah contoh numerik yang menunjukkan hubungan antara medan listrik kegagalan dan tegangan maksimum yang dapat dijaga oleh sebuah Van de Graaff.*

Untuk sebuah generator Van de Graaff, dengan jari-jari $a = 0,5$ m, berapakah tegangan maksimum V dan muatan yang tersimpan sebelum kegagalan terjadi?

Solusi Muatan total dihitung dari $E = Q/4\pi\epsilon a^2$ dengan $E = 3 \times 10^6$ V/m. Maka kita akan mendapatkan

$$Q = 3\pi\epsilon \times 10^6 = 8,3 \times 10^{-5} \text{ C}$$

Tegangan maksimumnya adalah

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon a} = Ea = 1,5 \times 10^6 \text{ volt}$$

Kabel Koaksial Dengan Lapisan Isolasi Majemuk

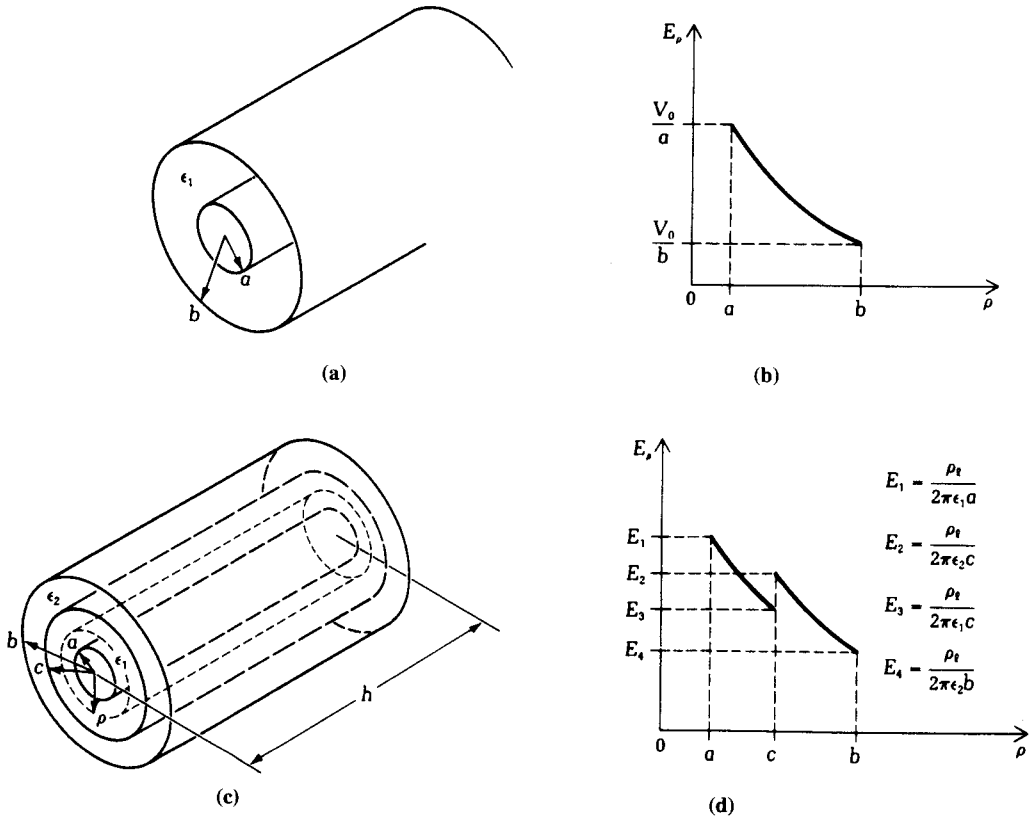
Medan listrik dalam kabel koaksial yang ditunjukkan dalam Gambar 10.15a diberikan oleh

$$E = \frac{V_0}{\rho} \hat{\rho}$$

di mana V_0 merupakan sebuah konstanta. Untuk memastikan agar kabel tidak akan mengalami kegagalan, kita harus menjaga medan listrik maksimum di dalam kabel ini di bawah kekuatan medan gagal dari material. Medan maksimum dalam sebuah kabel terletak pada permukaan konduktor dalam—yaitu pada $\rho = a$. Jadi, kabel koaksial harus diisi dengan sebuah isolator yang kuat medan gagalnya lebih besar daripada V_0/a .

Suatu bahan dengan kuat medan gagal yang tinggi biasanya lebih mahal. Seperti ditunjukkan pada Gambar 10.15b, medan listrik menurun dengan $1/\rho$, agar, di luar konduktor dalam, kita tidak perlu menggunakan bahan dengan kekuatan medan yang tinggi. Sebuah cara alternatif untuk mengisolasi kabel tegangan tinggi adalah dengan menggunakan lapisan isolasi, seperti ditunjukkan pada gambar 10.15c. Untuk menentukan medan listrik dalam daerah koaksial, kita menggunakan teorema Gauss yang sudah dibahas dalam Subbab 9.3.

Gambar 10.15 Medan listrik dalam saluran koaksial. (a) Sebuah saluran koaksial dengan satu buah lapisan isolasi. (b) Distribusi medan listrik dari (a). (c) Sebuah saluran koaksial dengan dua buah lapisan isolasi, dengan permukaan Gauss yang digambarkan pada ρ . (d) Distribusi medan listrik dari saluran yang ditunjukkan pada (c).



Misalkan muatan pada konduktor dalam adalah ρ_ℓ coulomb per meter. Gambarkan sebuah permukaan Gauss dengan jari-jari ρ dan panjang h seperti ditunjukkan pada Gambar 10.15c. Dengan menerapkan hukum Gauss (9.26), kita mendapatkan:

$$\int \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds = \rho_\ell \cdot h$$

Ingat bahwa akibat simetri dari soal ini, kita dapat menganggap bahwa \mathbf{D} terletak di sepanjang arah $\hat{\rho}$ dan seragam pada permukaan Gauss yang silindris. Hasil kali $\mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ bernilai nol pada dua permukaan ujung bulatan. Jadi,

$$2\pi\rho h D_\rho = \rho_\ell h$$

$$D_\rho = \frac{\rho_\ell}{2\pi\rho}$$

(10.47)

Hasil ini tidak bergantung pada ϵ_1 dan ϵ_2 . Jadi,

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_1\rho} \hat{\rho} & \text{untuk } c \geq \rho \geq a \\ \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_2\rho} \hat{\rho} & \text{untuk } b \geq \rho \geq c \end{cases}$$

(10.48)

Medan listrik maksimum pada lapisan pertama adalah

$$E_{1 \text{ Maks}} = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_1 a} \quad (10.49)$$

dan medan listrik maksimum pada medium kedua adalah

$$E_{2 \text{ Maks}} = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_2 c} \quad (10.50)$$

Gambar 10.15d menunjukkan variasi E sebagai fungsi ρ untuk kasus $\epsilon_2 < \epsilon_1$.

Contoh 10.13 *Contoh ini menunjukkan bagaimana menjawab sebuah pertanyaan praktis: Berapakah tingkat tegangan maksimum pada sebuah kapasitor koaksial?*

Sebuah saluran koaksial yang sama dengan saluran yang ditunjukkan dalam Gambar 10.15a memiliki $a = 5 \text{ mm}$ dan $b = 15 \text{ mm}$. Isolatornya adalah polistirene. Sampai tegangan maksimum berapakah saluran koaksial tersebut dapat dimuati?

Solusi Dari (10.47), yang berlaku untuk saluran koaksial dengan satu atau banyak lapisan, kita mendapatkan

$$E_\rho = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_1 \rho} \quad b \geq \rho \geq a \quad (10.51)$$

E_ρ maksimum pada $\rho = a$, yang harus dijaga di bawah $20 \times 10^6 \text{ V/m}$ (Tabel 10.1)—artinya,

$$2 \times 10^7 = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_1 a} \quad (10.52)$$

Tegangan diperoleh dengan mengintegrasikan E_ρ dari a ke b :

$$V = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_1} \ln \left(\frac{b}{a} \right) \quad (10.53)$$

Mensubstitusikan (10.52) ke dalam (10.53) akan menghasilkan

$$V = a \times \ln \left(\frac{b}{a} \right) \times 2 \times 10^7 = 1,10 \times 10^5 \text{ volt}$$

Contoh 10.14 *Contoh ini menunjukkan bagaimana menyelesaikan soal kapasitor koaksial dengan lapisan isolator majemuk.*

Saluran koaksial yang didiskusikan pada contoh sebelumnya diisolasi dengan polistirene dan kertas ($\epsilon_r = 3,0$), yang gambarnya sama dengan Gambar 10.15c. Dengan nilai c berapakah medan listrik maksimum pada polistirene akan tepat sama dengan kekuatan gagal pada polistirene dan medan listrik maksimum pada kertas juga akan sama dengan kekuatan gagal pada kertas? Berapakah tegangan antara kedua konduktor?

Solusi Sesuai dengan persamaan (10.49) dan (10.50),

$$\frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_1 a} = 20 \times 10^6 \quad (10.54)$$

$$\frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_2 c} = 15 \times 10^6 \quad (10.55)$$

Dengan mengambil perbandingan dari dua persamaan ini, kita dapatkan:

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_2 c}{\epsilon_1 a} &= \frac{20}{15} \\ c &= 6 \text{ mm} \end{aligned}$$

Tegangan dapat dihitung dari integrasi (10.48):

$$\begin{aligned} V &= \int_a^c \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_1 \rho} d\rho + \int_c^b \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_2 \rho} d\rho \\ &= \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_1} \ln\left(\frac{c}{a}\right) + \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_2} \ln\left(\frac{b}{c}\right) \end{aligned}$$

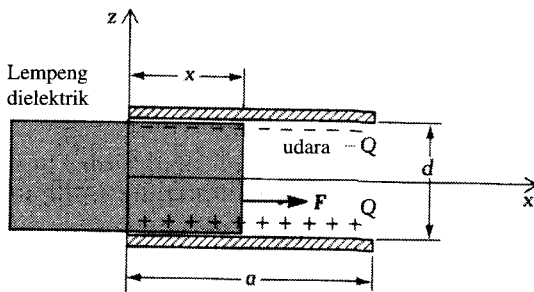
Dari (10.54) dan (10.55), kita dapatkan

$$\begin{aligned} V &= 2 \times 10^7 a \ln\left(\frac{c}{a}\right) + 1,5 \times 10^7 c \ln\left(\frac{b}{c}\right) \\ &= 1,01 \times 10^5 \text{ volt} \end{aligned}$$

Gaya Pada Bahan Dielektrik

Perhatikan sebuah kapasitor keping sejajar pada Gambar 10.16. Sebuah lempeng dielektrik diletakkan sebagian di dalam daerah keping sejajar. Kapasitor kemudian diisolasi dari sistem lain, sehingga muatan pada setiap keping tetap konstan, Q . Akankah lempengan dielektrik tersebut tertarik ke dalam, terdorong ke luar, atau tetap diam?

Gambar 10.16 Sebuah kapasitor keping sejajar membawa $+Q$ dan $-Q$ pada keping sebelah bawah dan atas. Lempengan dielektrik akan mengalami gaya yang cenderung menariknya ke dalam.



Kita menganggap bahwa medan listrik adalah konstan di dalam daerah keping sejajar dan bahwa medan tepi di dekat tepi keping dapat diabaikan. Medan listrik tangensial adalah kontinu di seluruh batas, sehingga medan listrik dalam udara dan medan listrik pada lempengan dielektrik akan sama.

Jika $x = 0$ —yaitu, jika kapasitor diisi dengan udara—medan listrik diberikan oleh

$$E_0 = \frac{Q}{\epsilon_0 ah}$$

di mana h adalah panjang kapasitor dan a adalah lebarnya. Tegangan V_0 diberikan oleh

$$V_0 = E_0 d = \frac{Qd}{\epsilon_0 ah}$$

Energi listrik tersimpan total adalah

$$U_{E0} = \frac{1}{2} \epsilon_0 (E_0)^2 (adh) = \frac{Q^2 d}{2 \epsilon_0 ah}$$

Jika kapasitor diisi penuh dengan dielektrik, E_1 , V_1 , dan U_{E1} terkaitnya adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{Q}{\epsilon ah} \\ V_1 &= \frac{Qd}{\epsilon ah} \\ U_{E1} &= \frac{Q^2 d}{2 \epsilon ah} \end{aligned}$$

Ingat bahwa kuat medan listrik, tegangan, dan energi yang tersimpan selalu lebih rendah daripada nilainya ketika kapasitor diisi dengan udara. Karena sebuah sistem selalu cenderung menuju keadaan energi yang lebih rendah, kita menyimpulkan bahwa, jika lempengan dielektrik mengisi sebagian kapasitor seperti ditunjukkan dalam Gambar 10.16, gaya elektrostatik akan menariknya ke dalam kapasitor.

Gaya elektrostatik F dapat dihitung dari

$$F = -\nabla U_E$$

Tafsiran fisik sama seperti yang terdapat pada $E = -\nabla \Phi$, di mana medan listrik menuju ke arah potensial rendah. Demikian pula, gaya elektrostatik menuju ke arah energi listrik tersimpan yang rendah U_E .

Kita dapat menghitung magnitudo gaya elektrostatik dengan pendekatan berikut. Untuk keadaan yang ditunjukkan pada Gambar 10.16, energi tersimpan dinyatakan oleh

$$U_E(x) = \frac{1}{2} E^2 [\epsilon_0(a-x) + \epsilon x] h d \quad (10.56)$$

Ingat bahwa E dalam arah \hat{z} akan sama dalam kedua daerah tersebut akibat kondisi batas kontinuitas dari medan listrik tangensial.

Tetapi, berapakah E ? Nilai E dapat ditentukan sebagai berikut:

$$D = \begin{cases} \epsilon E & (\text{di dielektrik}) \\ \epsilon_0 E & (\text{di udara}) \end{cases}$$

Jadi,

$$\rho_s = \begin{cases} \epsilon E & (\text{di dielektrik}) \\ \epsilon_0 E & (\text{di udara}) \end{cases}$$

Oleh karena itu,

$$(\epsilon E)xh + (\epsilon_0 E)(a-x)h = Q$$

atau

$$E = \frac{Q}{[\epsilon x + \epsilon_0(a-x)]h}$$

Mensubstitusikan persamaan di atas ke dalam (10.56) akan menghasilkan

$$U_E(x) = \frac{Q^2 d}{2[\epsilon x + \epsilon_0(a - x)]h}$$

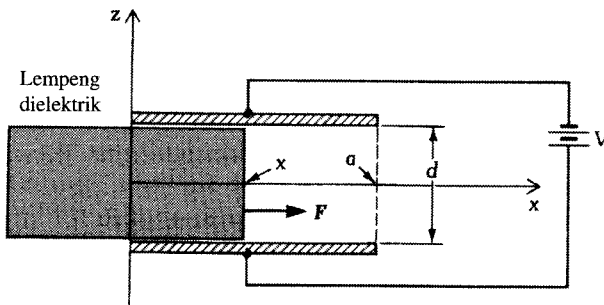
Dengan demikian gaya pada lempengan akan dinyatakan oleh

$$F = \frac{-\partial U_E(x)}{\partial x} = \frac{Q^2 d}{2[\epsilon x + \epsilon_0(a - x)]^2 h} (\epsilon - \epsilon_0) \quad (10.57)$$

Sistem elektrostatis tersebut mencoba menurunkan energi tersimpannya dengan melakukan sebuah gaya F untuk menarik dielektrik ke dalam ruang di antara kedua keping sejajar. Ingat bahwa dalam soal ini kita sedang meninjau gaya dalam arah \hat{x} yang menarik lempengan dielektrik ke dalam daerah kapasitor agar dapat menetap dalam keadaan energi yang lebih rendah. Gaya listrik antara kedua keping yang membawa muatan Q dalam arah \hat{y} tidak akan diperhitungkan di sini karena kita akan menganggap bahwa kedua keping tersebut entah bagaimana akan terpisah oleh gaya luar dan tidak bebas bergerak ke arah keping yang lain. Perlu juga diingat bahwa (10.56) hanya berlaku untuk $x < a$. Akibatnya, gaya yang diberikan oleh (10.57) hanya berlaku pada kondisi yang sama.

Sekarang perhatikan sebuah kasus lain dalam Gambar 10.17. Ingat bahwa dalam Gambar 10.16 muatan Q merupakan suatu konstanta karena kapasitor itu sendirilah yang merupakan sistem terisolasi. Bagaimanapun juga, dalam Gambar 10.17, kapasitor tersebut dihubungkan ke sebuah sumber tegangan tetap, dan tegangan V adalah konstanta. Kapasitor dan baterai sekarang membentuk sebuah sistem yang lengkap. Sekali lagi kita melontarkan pertanyaan: Apakah lempengan dielektrik tersebut akan tertarik ke dalam, atau tetap diam?

Gambar 10.17 Sebuah kapasitor keping sejajar yang dijaga pada sebuah tegangan konstan V . Lempengan dielektrik akan mengalami sebuah gaya yang cenderung menariknya ke dalam.



Pertama-tama, kita nyatakan $x = 0$, sehingga lempengan dielektrik seluruhnya berada di luar daerah keping sejajar. Karena V konstan, kita dapatkan

$$E_0 = \frac{V}{d}$$

$$Q_0 = \epsilon_0 E_0 a h = \epsilon_0 V a \frac{h}{d}$$

$$U_{E0} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 a h d = \frac{V^2 \epsilon_0 a h}{2d}$$

Kemudian, kita hitung E_1 , Q_1 , dan U_{E1} , ketika lempengan dielektrik mengisi kapasitor:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{V}{d} = E_0 \\ Q_1 &= \epsilon E_1 a h = \epsilon V a \frac{h}{d} > Q_0 \\ U_{E1} &= \frac{1}{2} \epsilon E_1^2 a h d = \frac{V^2 \epsilon a h}{2d} > U_{E0} \end{aligned}$$

Sebelum kita menyimpulkan bahwa, karena $U_{E1} > U_{E0}$, kecenderungannya adalah gaya elektrostatik tersebut akan mendorong dielektrik keluar untuk menurunkan energi tersimpannya, kita harus memperhatikan apa yang terjadi terhadap komponen-komponen lain yang terdapat pada sistem keseluruhan — katakanlah, baterai.

Jika lempengan dielektrik menempati seluruh daerah keping sejajar, muatan akan naik dari Q_0 menjadi Q_1 . Muatan-muatan ini dikirim oleh baterai yang memiliki tegangan tetap. Baterai tersebut dengan demikian energi tersimpannya dalam jumlah yang sama dengan $V(Q_1 - Q_0)$ untuk memindahkan jumlah muatan ekstra ke keping-keping tersebut. Jadi, energi total tersimpan pada seluruh sistem tersebut dapat dinyatakan dengan $U_{E1} + U_{EB}$, di mana,

$$\begin{aligned} U_{EB} &= -V(Q_1 - Q_0) \\ &= -V^2(\epsilon - \epsilon_0)a \frac{h}{d} \end{aligned}$$

Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} U_{E1} + U_{EB} &= \frac{V^2 \epsilon a h}{2d} - \frac{V^2(\epsilon - \epsilon_0)a h}{d} \\ &= U_{E0} - \frac{V^2 a(\epsilon - \epsilon_0)h}{2d} \end{aligned}$$

Dengan kata lain, energi tersimpan total setelah lempengan dielektrik menempati kapasitor akan lebih kecil daripada energi tersimpan total ketika kapasitor itu terisi udara. Jadi, lempengan yang ditunjukkan pada Gambar 10.17 akan ditarik ke dalam daerah keping sejajar dengan cara yang sama dengan lempengan yang ditunjukkan pada Gambar 10.16.

Kita dapat melihat bahwa, ketika lempengan dielektrik berada dalam situasi seperti yang ditunjukkan dalam Gambar 10.17, gaya padanya dinyatakan sebagai berikut:

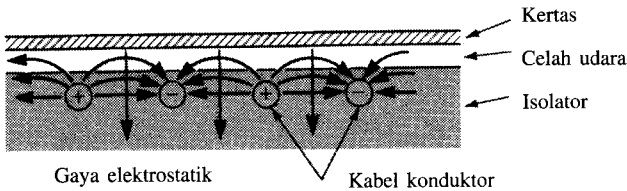
$$F = -\frac{\partial U_E}{\partial x} = \frac{V^2(\epsilon - \epsilon_0)h}{2d} \quad (10.58)$$

Dari diskusi terdahulu, kita dapat menyimpulkan bahwa gaya elektrostatik selalu berusaha menarik suatu bahan dielektrik ke dalam suatu daerah berisi medan listrik tinggi.

Permukaan Perekat Elektrostatik

Gambar 10.18 menunjukkan konduktor yang ditanam di dalam sebuah permukaan dielektrik. Setiap konduktor lainnya dimuati dengan tegangan positif. Susunan konduktor ini menghasilkan sebuah medan listrik dalam udara tepat di atas permukaan dielektrik. Sekarang, jika sebuah kertas ditempatkan pada bagian atas dielektrik tersebut, gaya elektrostatik akan menariknya mendekati permukaan, dan dengan cara ini, kertas melekat pada permukaan. Ketika konduktor tidak dimuati lagi, gaya pelekak ini tentu saja akan hilang.

Gambar 10.18 Permukaan Perekat Elektrostatik. Kertas ditarik ke arah medan elektrostatik yang dibangkitkan oleh kabel konduktor yang ditanam di dalam sebuah isolator.



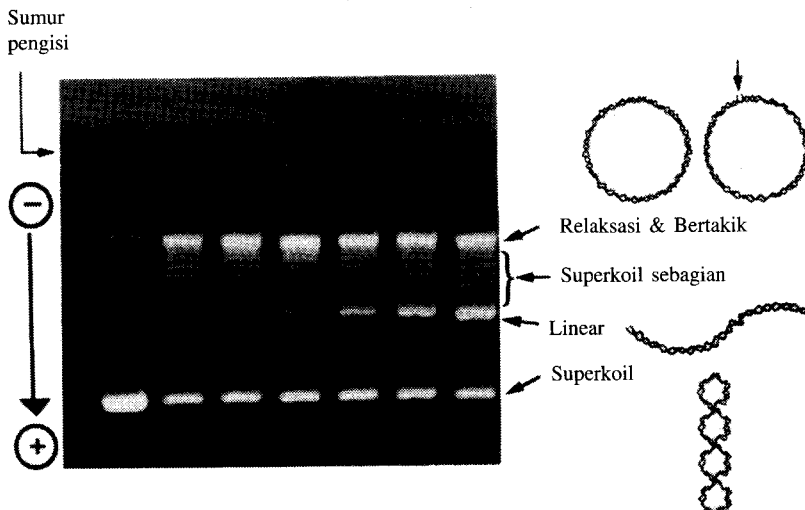
Permukaan perekat elektrostatik ini banyak digunakan untuk pelacak kurva yang digerakkan oleh kalkulator dan ditempatkan di atas meja. Tegangan yang digunakan untuk memuat konduktor yang ditanam itu adalah 300 volt, dan jarak antara keping tersebut biasanya sekitar 2 mm.*

Elektroforesis

Elektroforesis adalah suatu metode untuk memisahkan molekul-molekul bermuatan, khususnya protein dan asam nukleat, dengan membiarkan mereka berpindah-pindah di dalam suatu medan listrik. Proses ini biasanya dilakukan di dalam gel yang dibentuk dalam tabung, lempengan, atau pada suatu alas yang datar. Metode ini banyak digunakan dalam bidang biokimia untuk memisahkan makromolekul untuk keperluan analitik atau preparasi.

Gambar 10.19 menunjukkan hasil elektroforesis untuk pemisahan berbagai bentuk topologi dari sebuah *DNA* (*deoxyribonucleic acid* – asam deoksiribo nukleat) berbentuk lingkaran yang tertutup. Sampel-sampel *DNA* dipersiapkan dengan memanaskan (inkubasi) bentuk asli *DNA* (bentuk superkoil pada gambar) dengan sebuah enzim relaksasi-*DNA* (dari kiri ke kanan) obat yang mampu memecahkan *DNA*. Reaksi tersebut menghasilkan dalam suatu campuran *DNA* superkoil yang tidak bereaksi, hasil-hasil relaksasi *DNA*, *DNA* linear, dan produk-produk antara dengan derajat superkoil yang berbeda. Campuran *DNA* kemudian diletakkan di dalam suatu sumur pengisi. Suatu tegangan konstan (kira-kira 80 volt) diterapkan pada suatu gel agarose beralas datar yang dicelupkan dalam suatu elektrolit. Rapat arus yang melintasi lebar gel kira-kira 1 mA/cm. Setelah 16 jam, gel dilumuri dengan sebuah

Gambar 10.19 Molekul-molekul *DNA* dengan berbagai bentuk geometri dipisahkan dengan elektroforesis. (seizin Dr. Linus Shen, Abbott Laboratories, Abbott Park, IL.)



* P. Lorrain dan D.R. Corson, *Electromagnetism*, San Fransisco: W. H. Freeman and Co., 1978, hal. 189.

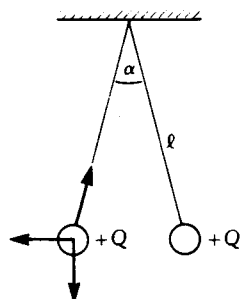
DNA fluoresen dan difoto ketika diekspos pada cahaya ultraviolet. Molekul-molekul *DNA* yang membawa muatan-muatan negatif pada pH netral ini akan berpindah dari katoda ke anoda. Hasil memperlihatkan bahwa *DNA* superkoil paling banyak bergerak dalam gel karena kepadatannya. Akibatnya, *DNA* ini paling mudah didorong oleh gaya listrik, sedangkan *DNA* yang lemas paling sedikit bergerak. Meskipun jenis-jenis *DNA* ini identik secara kimia, proses elektroforesis dapat digunakan untuk memisahkannya.

RINGKASAN

1. Suatu partikel bermuatan akan mengalami gaya dalam suatu medan E [Persamaan (10.2)]. Partikel tersebut akan dipercepat sesuai dengan hukum Newton.
2. Kerja yang dilakukan untuk membawa sebuah muatan q dari titik A ke titik B pada suatu medan listrik adalah integrasi dari gaya listrik kali jarak yang dinyatakan oleh (10.23). Kerja juga sama dengan beda potensial antara B dan A dikalikan dengan muatan, seperti yang dinyatakan oleh (10.24).
3. Sebuah partikel bermuatan bergerak telah melintas titik A ke titik B , maka kecepatannya pada titik B ditentukan dengan persamaan energi: jumlah energi kinetik dan energi potensial adalah tetap, seperti yang dinyatakan oleh (10.25).
4. Terdapat energi listrik yang tersimpan di dalam sebuah kumpulan N muatan. Ini dinyatakan oleh persamaan (10.31). Kita juga dapat mengatakan bahwa energi kinetik tersebut akan tersimpan di manapun terdapat sebuah medan E . Ini dinyatakan oleh persamaan (10.38).
5. Sebuah kapasitor merupakan piranti penyimpan energi listrik. Demikian pula, kapasitor adalah piranti yang dapat memungkinkan keberadaan suatu konsentrasi medan E .
6. Kapasitansi merupakan ukuran kapasitas dari sebuah kapasitor. Kapasitansi didefinisikan sebagai perbandingan antara muatan listrik total pada keping positif dengan beda potensial antara keping positif dan keping negatif atau keping yang ditanahkan [Persamaan (10.41)].
7. Kapasitansi juga dapat didefinisikan dalam bentuk kapasitas piranti untuk menyimpan energi listrik: perbandingan antara energi listrik tersimpan total dan setengah kuadrat beda potensial antara kedua keping [Persamaan (10.46)].

Soal-soal

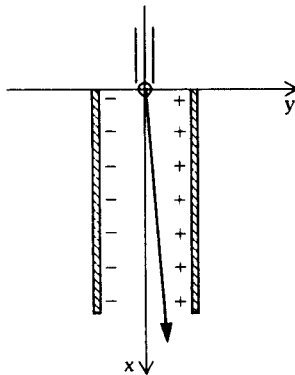
- 10.1 Suatu muatan titik sebesar q coulomb ditempatkan pada titik asal $(0,0,0)$, dan muatan titik kedua sebesar q' coulomb ditempatkan pada $(1,0,0)$. Sebuah muatan uji berukuran kecil ditempatkan pada $(3,0,0)$, dan ternyata gaya total pada muatan uji tersebut sama dengan nol. Tentukan q' dalam q .
- 10.2 Dua bola kecil yang sama dipasang pada senar tanpa bobot sepanjang 15 cm. Masing-masing bola membawa muatan 10^{-9} C, dan masing-masing memiliki massa 1 g.



Gambar P10.2

Bola-bola tersebut mencapai kondisi setimbang di bawah pengaruh gaya elektrostatis dan gaya gravitasi, seperti ditunjukkan pada Gambar P10.2. Tentukan sudut α . Petunjuk: α kecil.

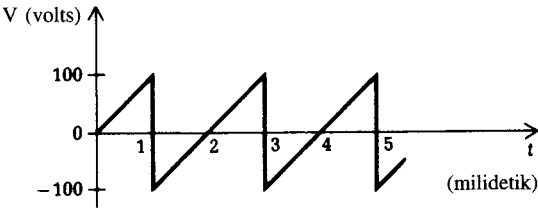
- 10.3** Perhatikan sebuah muatan garis yang panjang dengan $\rho_\ell = 10^{-6}$ C/m. Tentukan gaya yang bekerja pada suatu partikel debu yang membawa -10^{-9} C, sejauh 1 m dari muatan garis tersebut.
- 10.4** Suatu muatan garis dengan $\rho_\ell = 10^{-6}$ C/m ditempatkan di udara pada $x = 1$, $y = 0$. Sebuah muatan bidang dengan $\rho_s = 10^{-6}$ C/m ditempatkan pada $x = 0$. Sebuah muatan titik positif sebesar 10^{-9} C ditempatkan pada $(1/2, 0, 0)$ pada koordinat rektanguler. Berapakah gaya total yang bekerja pada muatan titik tersebut?
- 10.5** Apa yang akan terjadi pada elektron jika keping pada Contoh 10.2 memiliki lebar 6 cm dalam arah \hat{x} ?
- 10.6** Pada sebuah mesin pensortir biji, biji-biji yang tidak diinginkan akan diisi dengan muatan elektrostatis pada saat mereka melewati monitor sensitif-warna otomatis atau monitor sensitif-ukuran otomatis. Biji yang bagus dilewatkan tanpa dimuati. Semua biji kemudian dilewatkan di antara suatu daerah keping sejajar bertegangan tinggi



Gambar P10.6

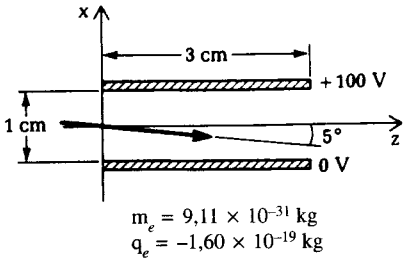
untuk membuang biji-biji yang tidak diinginkan. Anggap muatan pada biji yang tidak diinginkan tersebut adalah q , massanya m , tegangan antara keping sejajar adalah V , jarak pemisah keping adalah d . Anggap juga bahwa biji memasuki daerah keping sejajar dengan kecepatan v_0 , dan tentukan perpindahan y dari biji yang tidak bagus sebagai fungsi x . Gambar P10.6 mengilustrasikan situasi ini. Yang harus ditinjau hanyalah lintasan di dalam keping sejajar tersebut.

- 10.7** Pada suhu kamar (20° C) dan atmosfer standar, berapakah seharusnya ukuran kawat korona jika $b = 3$ cm, $V_0 = 10$ kV, dan faktor kekasaran kawat tersebut sama dengan 0,8? (Rujuk Gambar 10.4). Ada dua penyelesaian. Yang pertama memenuhi kondisi $a \ll b$; yang kedua memenuhi $(b-a) \ll b$.
- 10.8** Berapa beda potensial yang diperlukan untuk mempercepat sebuah elektron dari kecepatan nol hingga $1/10$ kecepatan cahaya?
- Temukan jawaban Anda dengan mengabaikan efek relativitas.
 - Gunakan rumus massa relativitas yang diberikan dalam Contoh 10.4 untuk mendapatkan jawaban Anda.
- 10.9** Rujuk Gambar 10.1. Jika tegangan yang diterapkan pada keping sejajar adalah sinyal yang berbentuk gerigi seperti ditunjukkan pada Gambar P10.9, tentukan tempat kedudukan elektron pada layar fluoresen yang terletak pada $x = 20$ cm.



Gambar P10.9

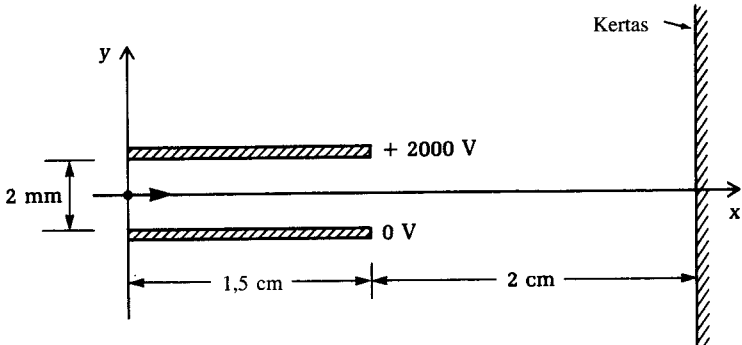
- 10.10** Pada sebuah pendorong ion, suatu tegangan V_1 digunakan untuk mengeluarkan ion cesium dan tegangan V_2 digunakan untuk mengeluarkan elektron. Disyaratkan kecepatan yang sama untuk mengeluarkan keduanya. Tentukan perbandingan V_1/V_2 . Anggap kedua partikel tersebut pada awalnya diam.
- 10.11** Sebuah elektron dipercepat dengan suatu beda potensial 1 kV antara anoda dan katoda. Elektron tersebut memasuki daerah keping sejajar dengan energi kinetik ini. Kecepatannya membentuk sudut 5° dengan bidang keping sejajar pada ujung titik masuknya, seperti ditunjukkan dalam Gambar P10.11.
- (a) Tentukan v_0 , v_{0z} , dan v_{0x} pada $t = 0$.
 - (b) Temukan dua persamaan untuk koordinat elektron (x , z) sebagai fungsi t . Ingat bahwa $x = 0$ dan $z = 0$ pada $t = 0$.
 - (c) Tentukan posisi elektron pada titik keluar keping sejajar tersebut.



Gambar P10.11.

- 10.12** Sebuah partikel tinta dengan massa 2×10^{-11} kg dimuati listrik sebesar $+10^{-13}$ C. Kecepatan awal partikel adalah 25 m/s dalam arah x ketika ia memasuki daerah keping sejajar. Tegangan antar keping adalah 2000 volt; jarak pemisah keping adalah 2 mm; dan panjang dalam arah \hat{x} adalah 1,5 cm. Jarak antara tepi keping dengan kertas adalah 2 cm (lihat Gambar P10.12). Tentukan lokasi pada kertas yang akan dijatuhkan tinta.

Gambar P10.12.



- 10.13** Tentukan kapasitansi dari kapasitor tabung yang ditunjukkan pada Gambar 10.13 dengan menggunakan (10.38) dan (10.46). Mulailah dari

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{r} \quad \text{untuk } b > r > a$$

dan tunjukkan bahwa hasil yang Anda dapatkan sama dengan (10.45).

- 10.14** Tentukan kapasitansi dari kapasitor tabung yang ditunjukkan pada Gambar 10.14 dengan menggunakan persamaan (10.38) dan (10.46). Mulailah dari

$$E = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon\rho} \hat{\rho} \quad \text{untuk } b > \rho > a$$

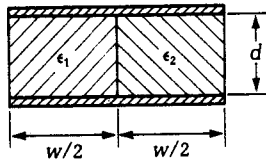
dan tunjukkan bahwa hasil yang Anda dapatkan cocok dengan (10.49).

- 10.15** Perhatikan kapasitor keping sejajar yang ditunjukkan pada Gambar 10.12. Berapakah kapasitansi maksimum yang dapat dicapai dengan menggunakan mika sebagai isolator? Misalkan luas keping 10 cm^2 dan tingkat tegangan dari kapasitor adalah 2 kV , dengan faktor keamanan 10. Gunakan Tabel 10.1 untuk mencari nilai ϵ dari mika.

- 10.16** Perhatikan kapasitor tabung yang ditunjukkan pada Gambar 10.14. Berapakah kapasitansi maksimum yang dapat dicapai dengan menggunakan minyak sebagai isolator? Ambil $a = 1 \text{ cm}$, $h = 2 \text{ cm}$, dan tingkat tegangan $= 2 \text{ kV}$, dengan faktor keamanan 5, gunakan Tabel 10.1 untuk mencari nilai ϵ dari minyak.

- 10.17** Sebuah kapasitor keping sejajar diisi dengan dua bahan dielektrik dalam konfigurasi yang ditunjukkan pada Gambar P10.17. Luas total keping tersebut adalah A .

- Tentukan kapasitansi C dalam A , d , ϵ_1 , dan ϵ_2 .
- Anggap keping positif tersebut membawa muatan Q coulomb, dan tentukan Q_1 dan Q_2 dalam Q , di mana Q_1 dan Q_2 adalah muatan-muatan pada sisi kiri dan sisi kanan keping. Abaikan medan tepi.

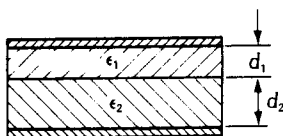


Gambar P10.17.

- 10.18** Perhatikan kapasitor yang ditunjukkan pada Gambar P10.17. Misalkan $\epsilon_1 = 3\epsilon_0$, $\epsilon_2 = 5\epsilon_0$, $d = 0,6 \text{ mm}$, dan $A = 20 \text{ cm}^2$. Potensial antar keping adalah 300 V . Tentukan energi listrik tersimpan total pada kapasitor ini.

- 10.19** Tentukan kapasitansi per satuan panjang dari sebuah kapasitor koaksial dengan dua lapisan bahan isolasi, seperti ditunjukkan pada Gambar 10.15c. Nyatakan C/h dalam a , b , c , ϵ_1 , dan ϵ_2 .

- 10.20** Tentukan kapasitansi C dari sebuah kapasitor keping sejajar dengan dua lapisan bahan isolasi, seperti ditunjukkan pada Gambar P10.20. Nyatakan C dalam A (luas keping), d_1 , d_2 , ϵ_1 , dan ϵ_2 .



Gambar P10.20.

10.21 Rujuklah kapasitor pada Gambar P10.20. Misalkan $\epsilon_1 = 3\epsilon_0$, $\epsilon_2 = 5\epsilon_0$, $d_1 = 0,3$ mm, $d_2 = 0,3$ mm, dan $A = 20$ cm². Tegangan pada kapasitor adalah 300 V. Tentukan energi listrik tersimpan total pada kapasitor ini.

10.22 Turunkan (10.58).

10.23 Sebuah kapasitor keping sejajar membawa $+Q$ pada satu keping dan $-Q$ pada keping yang lain. Luas tiap keping adalah A dan jarak pemisah antar keping adalah S . Mediumnya adalah udara.

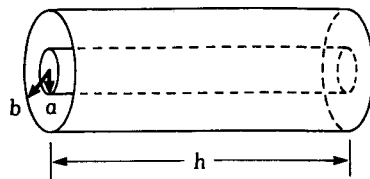
- Tentukan energi total yang tersimpan U_E pada kapasitor ini dalam Q , A , S , dan ϵ_0 .
- Berapakah gaya elektrostatis yang bekerja pada keping? Gaya tarik atau gaya tolak? Petunjuk: Tentukan perubahan U_E terhadap S .

10.24 Sebuah kapasitor silinder seperti yang ditunjukkan membawa muatan total $+Q$ dan $-Q$ pada konduktor dalam dan konduktor luarnya. Kapasitor tidak dihubungkan ke tanah atau sumber tegangan lainnya. Sebuah cincin dielektrik, dengan diameter dalam dan luarnya yang sama dengan ukuran kapasitor silinder, ditempatkan pada x meter di dalam kapasitor seperti ditunjukkan pada Gambar P10.24.

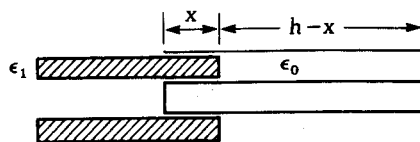
- Tentukan medan listrik pada kapasitor dalam Q . Petunjuk: $\rho_1 x + \rho_0(h - x) = Q$, di mana ρ_1 dan ρ_0 adalah rapat muatan garis pada daerah dielektrik dan udara. Juga,

$$E = \frac{\rho_1}{2\pi\epsilon_1\rho} = \frac{\rho_0}{2\pi\epsilon_0\rho}$$

- Tentukan tegangan antara dua konduktor.
- Tentukan gaya yang bekerja pada cincin dielektrik.



Gambar P10.24.



11 TEKNIK-TEKNIK PENYELESAIAN

Pada bab sebelumnya kita sudah mendiskusikan banyak penerapan medan elektrostatik. Pembaca akan menyadari bahwa dalam mendesain piranti elektrostatik, seseorang harus mengetahui distribusi medan listrik atau distribusi potensial elektrostatik. Sebagai contoh, dalam mendesain printer CRT atau printer ink-jet, lintasan pancaran elektron atau tetesan butiran tinta harus dikontrol dengan ketat. Kontrol yang ketat ini hanya mungkin terlaksana jika seseorang betul-betul mengetahui distribusi medan listrik.

Sejauh ini, kita telah mempelajari bagaimana mendapatkan medan listrik untuk beberapa kasus khusus, seperti kapasitor keping sejajar, distribusi muatan bola, atau konduktor silinder. Kasus-kasus ini semuanya dikarakterisasi oleh distribusi muatan simetris. Pada kasus-kasus ini, kita menerapkan hukum Gauss dalam bentuk integral untuk mendapatkan penyelesaian. Dalam bab ini kita akan mempelajari teknik-teknik lain untuk menyelesaikan permasalahan medan elektrostatik. Secara khusus kita akan mempelajari lebih rinci metode bayangan dan metode pemisahan variabel.

11.1 PERSAMAAN POISSON DAN PERSAMAAN LAPLACE

Bab 9 sebelumnya sudah memperkenalkan persamaan Poisson, yang dinyatakan dalam bentuk diferensial oleh (9.7):

$$\boxed{\nabla^2 \Phi = \frac{-\rho_v}{\epsilon}} \quad \text{(Persamaan Poisson)} \quad (11.1)$$

Dalam sebuah daerah di mana ρ_v sama dengan nol, persamaan tersebut akan disederhanakan dan disebut persamaan Laplace:

$$\boxed{\nabla^2 \Phi = 0} \quad \text{(Persamaan Laplace)} \quad (11.2)$$

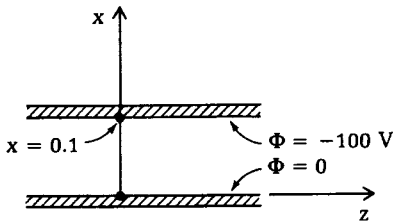
Persamaan-persamaan di atas merupakan persamaan diferensial parsial. Biasanya, nilai dari fungsi potensial Φ ini diketahui dalam beberapa batas. Tugas kita adalah menyelesaikan persamaan (11.1) atau (11.2) yang akan mengalami kondisi-kondisi batas tersebut.

Contoh 11.1 *Beberapa permasalahan elektrostatik dapat diselesaikan dengan cara yang berbeda. Contoh ini menunjukkan bagaimana menyelesaikan permasalahan keping sejajar dengan menggunakan pendekatan persamaan diferensial.*

Keping sebelah atas dari sebuah kapasitor keping sejajar dijaga pada potensial 100 V. dan keping sebelah bawah dijaga pada potensial 0 V. Keping terpisah sejauh 10 cm, dan memiliki ukuran yang besarnya tak terhingga. Tentukan Φ pada daerah keping sejajar.

Solusi

Kita tetapkan sistem koordinat yang ditunjukkan pada Gambar 11.1. Karena keping-keping ini memiliki luas tak hingga, kita dapat menyimpulkan berdasarkan simetri bahwa Φ hanyalah sebuah fungsi x dan bukan fungsi y atau z . Tidak ada muatan dalam daerah keping sejajar. Jadi, masalahnya sekarang adalah menyelesaikan persamaan Laplace (11.2) dengan kondisi batas $\Phi = 0$ pada $x = 0$ dan $\Phi = -100$ V pada $x = 0,1$ m.



Gambar 11.1 Penyelesaian persamaan Laplace dalam daerah keping sejajar yang terkena kondisi batas.

Dengan menggunakan pernyataan operator Laplace, kita dapat menuliskan (11.2) dalam sistem koordinat rectangular:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

Karena Φ hanya fungsi x , kita dapatkan

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0 \quad (11.3)$$

Mengintegrasikan (11.3) dua kali terhadap x akan menghasilkan

$$\Phi(x) = c_1 x + c_2 \quad (11.4)$$

di mana c_1 dan c_2 adalah konstanta integrasi. Sekarang kita terapkan kondisi batas:

$$\Phi(0) = 0 = c_2$$

$$\Phi(0,1) = -100 = 0,1c_1 + c_2$$

Penyelesaian dari c_1 dan c_2 dengan mudah didapatkan yaitu

$$c_2 = 0$$

$$c_1 = -1000$$

Jawaban akhirnya adalah

$$\Phi(x) = -1000x \quad (11.5)$$

Ingat bahwa medan listrik dapat diperoleh dengan mengambil gradien dari (11.5). Menurut (9.6),

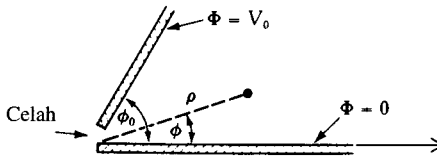
$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \hat{x} = 1000 \hat{x}$$

Kita melihat bahwa medan listrik menunjuk arah \hat{x} dan tegak lurus terhadap permukaan keping.

Ingat bahwa pada Contoh 9.14 dan 9.15 masalah yang sama yang diselesaikan dengan menggunakan hukum Gauss untuk muatan pada keping. Di sini, penyelesaiannya diperoleh dalam beda potensial antar keping. Dengan menggunakan (9.34) dan mensubstitusikan $x = 0,1$ dan $\Phi = -100$ dihasilkan $E_0 = \rho_s/\epsilon = 1000$. Jadi, jawaban yang diperoleh di sini dan dalam Contoh 9.14 dan 9.15 adalah sama.

Contoh 11.2 Permasalahan elektrostatik dalam Contoh 11.1 dapat diselesaikan dengan menggunakan hukum Gauss atau persamaan Laplace. Beberapa permasalahan lainnya, yang tidak dapat diselesaikan dengan menggunakan hukum Gauss karena geometrinya yang kurang simetris, dapat diselesaikan dengan menggunakan pendekatan persamaan diferensial.

Dua keping konduktor dengan luas hampir tak hingga disusun membentuk sudut ϕ_0 , seperti ditunjukkan pada Gambar 11.2. Satu keping dimuati pada 0 volt dan keping lainnya pada V_0 volt. Sebuah celah di ujungnya akan mengisolasi keping yang satu dari yang lain. Tentukan potensial Φ dalam daerah $0 < \phi < \phi_0$.



Gambar 11.2 Penyelesaian persamaan Laplace dalam daerah keping tidak sejajar yang terkena kondisi batas.

Solusi

Jelas bahwa, sistem koordinat silinderlah yang seharusnya digunakan, seperti ditunjukkan pada Gambar 11.2. Tidak terdapat muatan dalam daerah $0 < \phi < \phi_0$; jadi, persamaan Laplace (11.2) harus diselesaikan dengan kondisi batas.

Karena simetri dari soal ini dan kenyataan bahwa kondisi batas untuk Φ hanya melibatkan koordinat ϕ , kita dapat menganggap bahwa Φ adalah fungsi ϕ semata dan Φ tidak bergantung pada ρ dan z . Akibatnya, kita dapat menuliskan (11.2) sebagai berikut:

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0 \quad (11.6)$$

Tanpa memasukkan celah udara yang kecil, di mana $\rho = 0$, (11.6) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0$$

Mengintegrasikan persamaan di atas dua kali terhadap ϕ akan menghasilkan

$$\Phi = c_1 \phi + c_2 \quad (11.7)$$

Mensubstitusikan kondisi batas di mana $\Phi = 0$ pada $\phi = 0$ dan $\Phi = V_0$ pada $\phi = \phi_0$, kita dapatkan penyelesaian akhir:

$$\Phi = \left(\frac{V_0}{\phi_0} \right) \phi \quad (11.8)$$

Ingat bahwa kita mendapatkan medan listrik dengan menggunakan gradien dari (11.8):

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi = -\frac{1}{\rho} \frac{V_0}{\phi_0} \hat{\phi} \quad (11.9)$$

Medan listrik tersebut mempunyai arah $\hat{\phi}$ negatif yang berasal dari keping potensial tinggi dan berakhir pada keping potensial rendah.

Hukum Child-Langmuir

Kita akan meninjau sebuah dioda tabung hampa yang terdiri dari katoda dan anoda. Katoda dipanaskan agar melepas elektron, yang akan tertarik ke arah anoda dan menghasilkan aliran arus. Jika anoda berada pada polaritas yang salah—yaitu jika potensial anoda lebih rendah daripada katoda—konveksi arus akan terhenti. Untuk menyederhanakan analisa dioda, kita akan memandang katoda dan anoda sebagai dua keping sejajar, seperti ditunjukkan dalam Gambar 11.3. Anoda dimuati dengan V volt, dan elektron mengalir ke arahnya. Jika amplitudo arus tersebut kecil, kehadiran elektron dapat diabaikan, dan distribusi medan potensial akan seperti Contoh 11.1—artinya,

$$\Phi(y) = \frac{V}{d}y$$

dan

$$E = -\hat{y}\frac{V}{d}$$

Jika dioda digunakan sebagai penyearah dan aliran arusnya kuat, maka rapat arus dalam daerah keping sejajar tidak dapat diabaikan dan harus dimasukkan dalam perhitungan. Muatan-muatan negatif ini disebut dengan **muatan ruang** (*space charges*). Rapat muatan ruang cenderung meningkat karena suatu medan listrik positif cenderung menarik lebih banyak elektron keluar dari katoda. Meskipun demikian, seiring muatan negatif dibangkitkan, gaya tolak antara muatan tersebut dengan elektron akan memperlambat emisi elektron dari katoda. Akhirnya, tercapailah kesetimbangan, yaitu saat medan listrik total pada permukaan katoda tersebut sama dengan nol. Versi matematis dari pernyataan di atas adalah sebagai berikut:

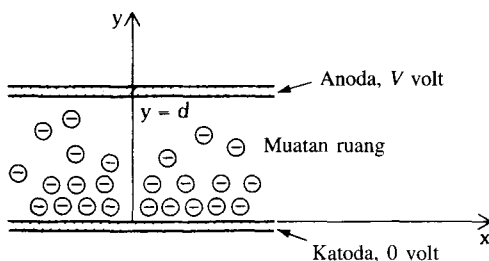
$$E_y(0) = -\left.\frac{d\Phi}{dy}\right|_{y=0} = 0 \quad (11.10a)$$

$$\Phi(0) = 0 \quad (11.10b)$$

$$\Phi(d) = V \quad (11.10c)$$

Pada keadaan kesetimbangan, aliran elektron dari katoda ke anoda menghasilkan sebuah arus tunak $J = -\rho_v v$, di mana ρ_v adalah rapat muatan ruang dan v adalah kecepatan elektron. Ingat bahwa J dan v bernilai positif dan ρ_v bernilai negatif. Kecepatan elektron saat potensial Φ pada posisi y sebarang dinyatakan oleh [lihat (10.26)]

$$v = \sqrt{\frac{2e\Phi(y)}{m}}$$



Gambar 11.3 Sebuah dioda dengan muatan ruang dalam daerah keping sejajar.

di mana e adalah magnitudo muatan elektron ($1,60 \times 10^{-19}$ C) dan m adalah massanya ($9,11 \times 10^{-31}$ kg). Dengan menggunakan persamaan di atas, rapat muatan ruang ρ_v dapat dinyatakan dalam J dan Φ :

$$\rho_v = \frac{-J}{v} = -J \sqrt{\frac{m}{2e\Phi}} \quad (11.11)$$

Sekarang permasalahannya adalah menyelesaikan persamaan Poisson (11.1) dengan rapat muatan yang diberikan oleh (11.11) dan mengalami kondisi batas (11.10). Karena simetri, kita dapat menganggap bahwa Φ hanyalah fungsi y . Oleh karena itu,

$$\frac{d^2\Phi}{dy^2} = \frac{J}{\epsilon} \sqrt{\frac{m}{2e\Phi}} \quad (11.12)$$

Ingat bahwa Φ juga muncul pada ruas kanan persamaan. Untuk menyelesaikan persamaan (11.12), kita mengalikan kedua ruas dengan $2d\Phi/dy$ untuk menghasilkan

$$2 \frac{d\Phi}{dy} \frac{d^2\Phi}{dy^2} = a \Phi^{-1/2} \frac{d\Phi}{dy}$$

di mana

$$a = \frac{2J}{\epsilon} \sqrt{\frac{m}{2e}} \quad (11.13)$$

Kedua ruas dari persamaan di atas sekarang dapat diintegrasikan secara terpisah untuk mendapatkan

$$\left(\frac{d\Phi}{dy} \right)^2 = 2a\Phi^{1/2} + c_1$$

Dengan menggunakan kondisi (11.10), kita dapatkan $c_1 = 0$. Persamaan di atas dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\Phi^{-1/4} \frac{d\Phi}{dy} = \sqrt{2a}$$

Mengintegrasikan persamaan di atas akan menghasilkan

$$\frac{4}{3} \Phi^{3/4} = \sqrt{2a}y + c_2$$

Konstanta c_2 ternyata sama dengan nol akibat batas (11.10b) ini. Akhirnya, kita menggunakan (11.10c) untuk mendapatkan

$$\frac{4}{3} V^{3/4} = \sqrt{2a}d \quad (11.14)$$

Dengan mengeliminasi a dari (11.14) dan (11.13), didapatkan bahwa J dinyatakan sebagai berikut:

$$J = \frac{4\epsilon}{9d^2} \sqrt{\frac{2e}{m}} V^{3/2} \quad (11.15)$$

Ingat bahwa arus J dan tegangan terpakai V tidaklah memiliki hubungan linier. Hubungan dari J dan V yang dinyatakan oleh (11.15) ini dikenal sebagai **hukum Child-Langmuir**.*

* C.D. Child, "Discharge from hot CaO," *Phys. Rev.* 32 (1911): 492. I. Langmuir, "The effect of space charge and residual gases on thermionic current in high vacuum," *Phys. Rev.* 2 (1913): 450.

Fungsi potensialnya dengan demikian akan menjadi

$$\Phi(y) = \left(\frac{3}{4} \sqrt{2ay} \right)^{4/3} = \left(\frac{V^{3/4}}{d} y \right)^{4/3} = V \left(\frac{y}{d} \right)^{4/3}$$

Medan listriknya dinyatakan oleh

$$E = -\hat{y} \frac{4}{3} \frac{V}{d} \left(\frac{y}{d} \right)^{1/3}$$

yang sama dengan nol pada katoda.

Kita mengamati bahwa dalam penyelesaian persamaan diferensial orde kedua (11.12), kondisi batas (11.10b) dan (11.10c) menyatakan nilai potensial pada saat $y = 0$ dan $y = d$. Kondisi batas tambahan (11.10a) memungkinkan kita menentukan arus tunak J , yang merupakan suatu konstanta yang terkait dengan V , yang diatur menurut hukum Child-Langmuir dalam (11.15).

Teorema Keunikan

Sebelum kita melanjutkan penyelesaian persamaan Poisson atau Laplace yang lain, kami akan melontarkan sebuah pertanyaan penting: Jika sebuah penyelesaian memenuhi persamaan Poisson atau Laplace dan kondisi batas, apakah ada penyelesaian lainnya? Dengan kata lain, apakah penyelesaiannya unik? Jawabannya adalah hanya ada satu penyelesaian.

Untuk membuktikannya, kita akan asumsikan bahwa terdapat dua penyelesaian Φ_1 dan Φ_2 , keduanya memenuhi persamaan Poisson dan kondisi batas—artinya, dalam daerah R ,

$$\nabla^2 \Phi_1 = \frac{-\rho_v}{\epsilon} \quad \text{dalam } R \quad (11.16a)$$

$$\nabla^2 \Phi_2 = \frac{-\rho_v}{\epsilon} \quad \text{dalam } R \quad (11.16b)$$

$$\Phi_1 = V \quad \text{pada batas } R \quad (11.17a)$$

$$\Phi_2 = V \quad \text{pada batas } R \quad (11.17b)$$

Sekarang kita akan definisikan Φ_3 sebagai selisih antara Φ_1 dan Φ_2 —yaitu

$$\Phi_3 = \Phi_1 - \Phi_2 \quad \text{dalam } R \quad (11.18)$$

Dengan menerapkan operator Laplace pada kedua ruas (11.18), kita dapatkan

$$\nabla^2 \Phi_3 = \nabla^2(\Phi_1 - \Phi_2) = \nabla^2 \Phi_1 - \nabla^2 \Phi_2 \quad (11.19)$$

Substitusi (11.16a) dan (11.16b) ke dalam (11.19) menghasilkan

$$\nabla^2 \Phi_3 = 0 \quad \text{dalam } R \quad (11.20)$$

Demikian pula, karena (11.17a) dan (11.17b) ini kita akan peroleh

$$\Phi_3 = 0 \quad \text{pada batas } R \quad (11.21)$$

Sekarang kita akan meninjau identitas vektor berikut:

$$\nabla \cdot (\Phi_3 \nabla \Phi_3) \equiv \nabla \Phi_3 \cdot \nabla \Phi_3 + \Phi_3 \nabla^2 \Phi_3 \quad (11.22)$$

Kita integrasikan kedua ruas (11.22) terhadap volume R :

$$\iiint_R \nabla \cdot (\Phi_3 \nabla \Phi_3) dv = \iiint_R |\nabla \Phi_3|^2 dv + \iiint_R \Phi_3 \nabla^2 \Phi_3 dv \quad (11.23)$$

Dengan menggunakan teorema divergensi, integral pada ruas kiri (11.23) dapat dinyatakan sebagai integral terhadap batas permukaan R . Integral kedua pada ruas kanan dari persamaan (11.23) bernilai nol karena (11.20). Oleh karena itu, kita peroleh

$$\oint_{\text{batas } R} \Phi_3 \frac{\partial \Phi_3}{\partial n} ds - \iiint_R |\nabla \Phi_3|^2 dv = 0 \quad (11.24)$$

Akan tetapi, karena (11.21), integral pada ruas kiri akan bernilai nol. Kita sekarang tinggal memiliki persamaan berikut:

$$\iiint_R |\nabla \Phi_3|^2 dv = 0$$

Pada persamaan di atas, integran selalu tidak negatif, dan integrasinya bernilai nol. Hasilnya hanya dapat diperoleh jika $|\nabla \Phi_3|$ bernilai nol **di manapun** dalam R . Dengan kata lain,

$$\Phi_3 = C \text{ dalam } R$$

Akan tetapi persamaan (11.21) menyatakan bahwa Φ_3 bernilai nol pada batas R . Oleh karena itu, $C = 0$ —artinya,

$$\Phi_3 = 0 \text{ dalam } R$$

Kita sekarang telah melihat bahwa Φ_3 sama dengan nol dalam R . Ingat bahwa $\Phi_3 = \Phi_1 - \Phi_2$. Kita menyimpulkan bahwa Φ_1 identik dengan Φ_2 . Kesimpulan ini membuktikan teorema keunikan: hanya ada satu penyelesaian unik yang memenuhi baik persamaan Poisson (atau Laplace) dalam R maupun kondisi batas pada batas R .

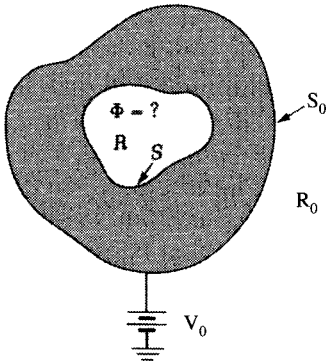
Sekarang kita akan meninjau Contoh 11.1 dan 11.2. Sebelum ini kami mengatakan bahwa karena simetri, Φ dapat dianggap tidak bergantung pada y atau z . Asumsi ini akan menghasilkan persamaan diferensial (11.3) yang sederhana. Demikian pula dalam Contoh 11.2, kita menganggap bahwa Φ hanyalah fungsi ϕ . Apakah anggapan ini benar? Apakah ada penyelesaian lain di mana Φ mungkin lebih rumit dan tidak hanya merupakan fungsi satu variabel? Dari teorema keunikan, kita mengetahui bahwa penyelesaian yang didapatkan pada Contoh 11.1 dan 11.2 merupakan penyelesaian yang unik untuk soal-soal ini dan tidak mungkin ada penyelesaian lain.

Penyelesaian dari persamaan Poisson atau Laplace dengan kondisi batas seringkali terlihat sangat rumit tetapi sebenarnya agak sederhana. Bahkan, dalam beberapa kasus, penyelesaiannya dapat diperoleh dengan intuisi atau bahkan dengan menebak. Satu cara sederhana untuk melihat apakah sebuah penyelesaian memang benar adalah dengan mensubstitusikannya kembali dan melihat apakah penyelesaian tersebut memenuhi persamaan Poisson (atau Laplace) dan kondisi batas yang diberikan. Jika ya, maka kita yakin bahwa kita telah mendapatkan **penyelesaiannya**.

Contoh 11.3

Contoh ini menunjukkan bahwa suatu permasalahan yang terlihat kompleks mungkin saja memiliki penyelesaian yang sederhana! Tidaklah menjadi masalah seberapa sederhana penyelesaian tersebut. Selama ia memenuhi persamaan Poisson (atau Laplace) dan kondisi batas, ia merupakan satu-satunya penyelesaian.

Sebuah konduktor berongga, dengan bentuk tak beraturan, dijaga pada tegangan V_0 volt, seperti ditunjukkan pada Gambar 11.4. Tidak ada muatan dalam rongga R . Berapakah Φ dalam rongga?



Gambar 11.4 Sebuah konduktor berongga dengan bentuk tak beraturan dimuati hingga V_0 volt. Volume yang diarsir adalah konduktor. Daerah yang tidak diarsir adalah rongga yang ditandai sebagai R dalam konduktor.

Solusi

Permasalahan nilai-batas ini menuntut penyelesaian persamaan Laplace (11.2) dalam R , dengan kondisi batas $\Phi = V_0$ pada S . Penyelesaiannya terlihat rumit karena baik R maupun S tidak memiliki simetri. Meskipun demikian, teorema keunikan mengizinkan kita untuk menebak penyelesaiannya. Kita lihat bahwa Φ sama dengan V_0 pada S (batas dari R) karena konduktor tersebut merupakan benda ekipotensial. Kita akan mengasumsikan bahwa Φ sama dengan V_0 di mana pun dalam R :

$$\Phi = V_0 \quad \text{dalam } R \quad (11.25)$$

Persamaan di atas memenuhi (11.2) karena Laplace dari sebuah konstanta sama dengan nol. Persamaan tersebut juga memenuhi kondisi batas. Dari teorema keunikan, kita mengetahui bahwa (11.25) adalah penyelesaiannya dan bahwa tidak ada penyelesaian lainnya! Kita sekarang dapat membuat pernyataan umum berikut: setiap titik pada atau di dalam sebuah konduktor, dengan atau tanpa rongga, mempunyai potensial yang sama, selama tidak ada muatan di dalam semua rongga.

Contoh 11.4 *Contoh ini mirip dengan Contoh 11.3 tetapi hasilnya sangat berbeda. Ingat bahwa suatu penyelesaian untuk permasalahan elektrostatik harus memenuhi persamaan Poisson (atau Laplace) dan semua kondisi batas.*

Tentukan Φ di luar daerah R_0 yang ditunjukkan pada Gambar 11.4.

Solusi

Tidak ada penyelesaian sederhana untuk soal ini. Mungkin terlintas dalam benak kita bahwa (11.25) juga dapat menjadi penyelesaian dalam R_0 . Bukankah benar bahwa (11.25) memenuhi persamaan Laplace (11.2) dalam R_0 dan kondisi batas $\Phi = V_0$ pada S_0 ? Lalu, mengapa hasil tersebut bukan merupakan suatu penyelesaian?

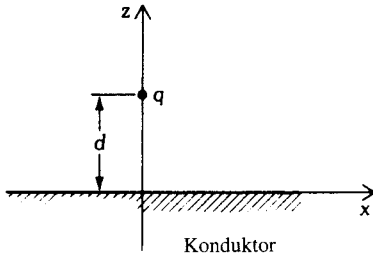
Jawabannya adalah bahwa, tidak seperti daerah R , R_0 memiliki dua batas. Satu adalah S_0 , dan yang lainnya adalah permukaan pada tak hingga. Di tak hingga, kita ketahui bahwa Φ pasti mendekati nol. Oleh karena itu, kondisi batas untuk Φ dalam daerah luar ini adalah

$$\Phi = \begin{cases} V_0 & \text{pada } S_0 \\ 0 & \text{di tak hingga} \end{cases}$$

Jelas (11.25) tidak dapat memenuhi kondisi batas di tak hingga. Akibatnya, (11.25) bukanlah penyelesaian untuk R_0 . Kenyataannya, karena bentuk daerah ini yang tak beraturan, tidak terdapat penyelesaian analitis. Penyelesaian numerik yang mendekati mungkin dapat diperoleh dengan menggunakan komputer digital.

11.2 METODE BAYANGAN

Dalam banyak permasalahan elektrostatik praktis, muatan terletak di dekat suatu konduktor. Sebuah elektron yang baru saja dilepaskan dari katoda dan sebuah jalur transmisi daya yang tergantung di atas bumi konduktor adalah contoh yang lazim ditemui. Kita akan meninjau kasus sebuah muatan titik q di dekat konduktor bidang tak hingga, seperti ditunjukkan pada Gambar 11.5. Potensial konduktor ditetapkan sama dengan nol. Untuk menentukan potensial Φ pada paruh ruang atas kita perlu menyelesaikan persamaan Poisson dalam paruh ruang $z > 0$, dengan kondisi batas $\Phi = 0$ di $z = 0$ dan di tak hingga.



Gambar 11.5 Sebuah muatan titik di atas sebuah bidang konduktor.

Karena tidak adanya konduktor, penyelesaian untuk mencari muatan titik di ruang bebas adalah

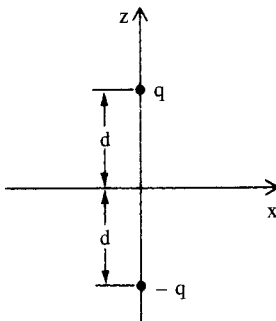
$$\Phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}} \quad (11.26)$$

Fungsi potensial Φ dalam persamaan (11.26) memenuhi persamaan Poisson untuk $z > 0$ dan kondisi batas $\Phi = 0$. Namun demikian, potensial tersebut tidak sama dengan nol pada $z = 0$. Oleh karena itu, potensial tersebut bukanlah penyelesaian untuk soal yang ditunjukkan pada Gambar 11.5.

Alih-alih mencoba menyelesaikan persamaan Poisson secara langsung, kita akan mengangkat kembali soal yang telah kita selesaikan dalam Subbab 9.1—yaitu potensial elektrostatik dari sebuah dipol. Gambar 11.6 memperlihatkan konfigurasi dipol tersebut. Potensial dipol tersebut adalah

$$\Phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + d)^2}} \right) \quad (11.27)$$

Karena merupakan penyelesaian dari soal mengenai dipol ini, (11.27) memenuhi persamaan Poisson dengan distribusi muatan berupa dua muatan titik yang ditunjukkan pada Gambar 11.6. Ingat bahwa $\Phi = 0$ pada tak hingga dan pada $z = 0$.



Gambar 11.6 Konfigurasi dari sebuah dipol elektrostatik.

Sekarang kita akan membandingkan Gambar 11.5 dan Gambar 11.6. Kita lihat bahwa dalam daerah atas ($z > 0$), distribusi muatan yang ditunjukkan dalam Gambar 11.5 akan identik dengan distribusi muatan pada Gambar 11.6. Keduanya hanya memiliki sebuah muatan titik yang ditempatkan pada $(0, 0, d)$. Selanjutnya, dalam kedua kasus, Φ sama dengan nol pada $z = 0$ dan di tak hingga. Atas alasan ini kita percaya bahwa (11.27) juga merupakan penyelesaian dari soal pada Gambar 11.5. Dengan kata lain, kita dapat mengatakan bahwa penyelesaian untuk soal dalam Gambar 11.5 adalah sebagai berikut:

$$\Phi(x, y, z) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right) & \text{untuk } z \geq 0 \\ 0 & \text{untuk } z \leq 0 \end{cases} \quad (11.28)$$

Potensial Φ yang diberikan (11.28) identik dengan yang diberikan (11.27) dalam daerah $z > 0$. Kita ketahui bahwa (11.27) memenuhi persamaan Poisson dalam daerah itu—daerah yang tidak mengandung muatan terkecuali sebuah muatan titik q yang terletak pada $(0,0,d)$. Jadi, (11.28) juga memenuhi persamaan Poisson dalam daerah $z > 0$ yang ditunjukkan dalam Gambar 11.5. Nilai Φ yang diberikan oleh (11.28) juga memenuhi kondisi batas nol pada $z = 0$ dan di tak hingga. Sesuai dengan teorema keunikan, (11.28) merupakan *penyelesaian* dari soal nilai-batas dalam Gambar 11.5. Ingat bahwa potensial elektrostatik dalam daerah $z > 0$ pada Gambar 11.5 ini merupakan superposisi potensial muatan titik q dan potensial akibat “bayangan” muatan titik. Muatan bayangan terletak pada titik bayangan seolah-olah konduktor tersebut adalah suatu cermin. Nilai bayangan tersebut sama dengan $-q$. Untuk pengamat yang berada di daerah $z > 0$, ia seolah-olah melihat dua bayangan.

Contoh 11.5 *Begitu fungsi potensial didapatkan, medan listrik dapat dihitung langsung dari potensial. Contoh ini memperlihatkan garis-garis medan listrik dari sebuah muatan titik di dekat sebuah bidang konduktor.*

Tentukan medan listrik di daerah $z \geq 0$ yang ditunjukkan dalam Gambar 11.5.

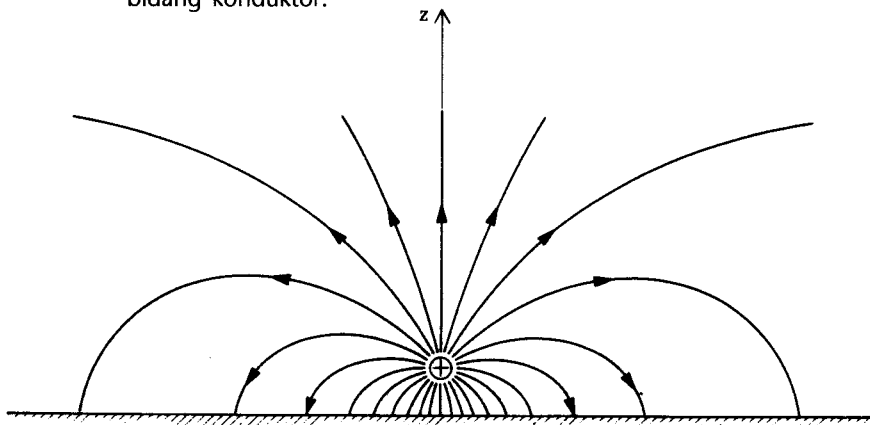
Solusi

Untuk mencari medan listrik, kita dapat mengambil gradien dari (11.28):

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left\{ \frac{\hat{x}x + \hat{y}y + (z-d)\hat{z}}{[x^2 + y^2 + (z-d)^2]^{3/2}} - \frac{\hat{x}x + \hat{y}y + (z+d)\hat{z}}{[x^2 + y^2 + (z+d)^2]^{3/2}} \right\} \quad (11.29)$$

Gambar 11.7 memperlihatkan garis-garis medan listrik.

Gambar 11.7 Garis-garis medan listrik dari sebuah muatan titik positif di dekat sebuah bidang konduktor.



Contoh 11.6 Kembali, begitu fungsi potensial didapatkan, medan listrik di semua tempat dan muatan yang diinduksikan pada bidang konduktor dapat ditentukan langsung dari potensialnya. Gaya listrik pada muatan juga dapat dihitung.

Tentukan distribusi muatan pada permukaan konduktor pada Gambar 11.5, dan kemudian hitung muatan total yang diinduksikan kepadanya. Tentukan juga gaya listrik pada q .

Solusi Pada permukaan tersebut, di mana $z = 0$, kita memiliki

$$E(x, y, 0) = \frac{-qd\hat{z}}{2\pi\epsilon(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} \quad (11.30)$$

Ingat bahwa E adalah normal terhadap konduktor, sebagaimana seharusnya.

Muatan permukaan didapatkan dari kondisi batas

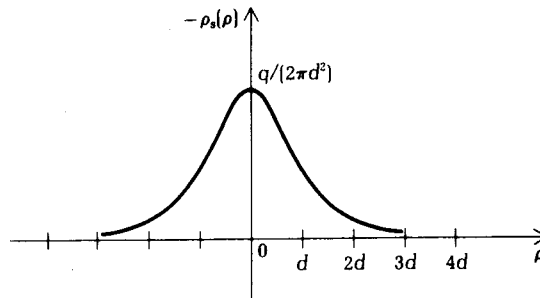
$$\hat{n} \cdot (D_1 - D_2) = \rho_s$$

Di sini, $\hat{n} = \hat{z}$, $D_2 = 0$, dan D_1 adalah ϵ kali E dalam (11.30). Oleh karena itu, kita dapatkan

$$\rho_s = \frac{-qd}{2\pi(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} \quad (11.31)$$

Gambar 11.8 menunjukkan distribusi muatan dari ρ_s . Ingat bahwa muatan permukaan yang diinduksikan akan terkonsentrasi di daerah tepat di bawah muatan q dan bahwa kerapatannya turun secara cepat ke arah luar.

Gambar 11.8 Distribusi muatan permukaan pada bidang konduktor yang diinduksikan oleh muatan titik q dalam Gambar 11.5.



Kita dapat menghitung jumlah muatan total yang diinduksikan dengan melakukan integrasi, yang akan menghasilkan

$$\begin{aligned} q_{\text{diinduksikan}} &= \int \rho_s ds = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{-qd}{2\pi(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} \\ &= \frac{-qd}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \frac{\cos \theta}{x^2 + d^2} = \frac{-qd}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{x^2 + d^2} \\ &= \frac{-qd}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta' \frac{1}{d} = -q \end{aligned}$$

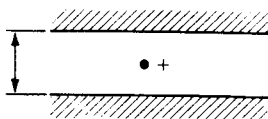
Pada perhitungan di atas, kita membuat perubahan variabel $y = (x^2 + d^2)^{1/2} \tan \theta$ dan $x = d \tan \theta'$. Ingat bahwa muatan permukaan total yang diinduksikan pada permukaan konduktor tersebut sama dengan negatif dari muatan yang terletak di atas konduktor.

Gaya pada q akibat semua muatan yang diinduksikan pada bidang konduktif tersebut sama dengan gaya pada q akibat bayangannya. Jadi,

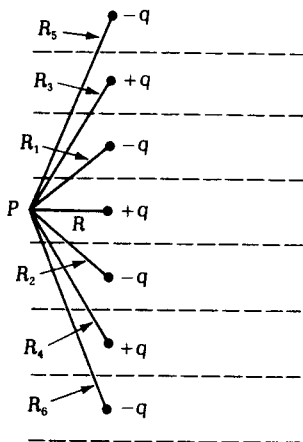
$$\mathbf{F} = \frac{q^2}{16\pi\epsilon d^2}(-\hat{\mathbf{z}})$$

Contoh 11.7 *Contoh ini menunjukkan bagaimana memperluas teori bayangan yang melibatkan muatan titik di dekat bidang konduktor terhadap kasus serupa yang lain. Kadang-kadang Anda memerlukan jumlah bayangan yang tak terhingga demi memenuhi kondisi batas.*

Sebuah muatan titik terletak di antara dua bidang konduktor yang terpisah sejauh d (Gambar 11.9a). Gunakan metode bayangan untuk mencari potensial elektrostatik Φ di antara keping-keping tersebut.



Gambar 11.9(a) Sebuah muatan titik yang terletak di antara dua bidang konduktor.



Gambar 11.9(b) Terdapat muatan bayangan yang jumlahnya tak terhingga.

Solusi

Sewaktu menggunakan metode bayangan, kita harus mematuhi dua aturan:

1. Muatan atau muatan-muatan bayangan harus ditempatkan di daerah yang mengandung konduktor. Muatan tersebut tidak dapat diletakkan dalam ruang “real” di mana Φ akan dicari.
2. Muatan atau muatan-muatan bayangan harus ditempatkan sedemikian rupa sehingga potensial pada permukaan konduktor sama dengan nol atau sebuah konstanta.

Jika kita tidak dapat memenuhi kedua aturan di atas, maka permasalahan tersebut tidak dapat diselesaikan dengan metode bayangan. Aturan pertama menghendaki persamaan Poisson dipenuhi dengan distribusi muatan yang benar, dan aturan kedua menghendaki kondisi batas yang cocok.

Sekarang kita akan menempatkan muatan-muatan bayangan di daerah yang ditempati keping-keping konduktor. Untuk memenuhi kondisi batas pada keping atas, kita tempatkan sebuah muatan negatif pada R_1 dari titik pengamatan P . Untuk memenuhi kondisi batas pada batas bawah, kita harus meletakkan pasangan bayangan tersebut di R_2 dan R_4 . Bayangan-bayangan baru ini melanggar kondisi batas pada keping atas, dan akibatnya kita harus

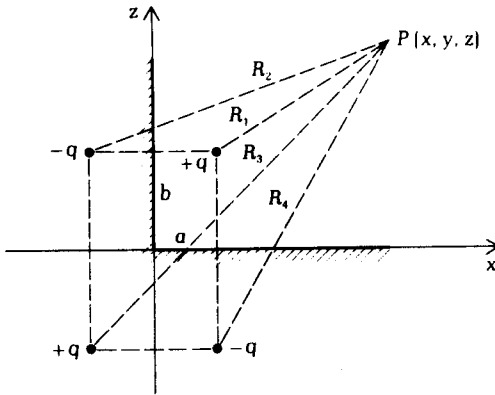
menempatkan bayangan di R_3 dan R_5 , demikian seterusnya. Potensial pada P adalah sebagai berikut:

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} - \frac{1}{R_5} - \frac{1}{R_6} + \dots \right) \quad (11.32)$$

Contoh 11.8 Ini adalah contoh lain dari penentuan muatan bayangan (magnitudo dan lokasi) untuk sebuah muatan titik di dekat sebuah struktur konduktor.

Sebuah muatan titik ditempatkan di dekat titik sudut dari sebuah bidang konduktor horisontal dan vertikal, seperti ditunjukkan dalam Gambar 11.10. Tentukan potensial elektrostatik Φ di daerah $x > 0$ dan $y > 0$.

Gambar 11.10 Sebuah muatan titik q di dekat sebuah bidang konduktor vertikal dan horisontal. Terdapat tiga muatan bayangan.



Solusi

Dengan menerapkan aturan metode bayangan, kita peroleh tiga muatan bayangan, seperti ditunjukkan dalam Gambar 11.10. Perhatikan bahwa dua dari bayangan-bayangan tersebut membawa muatan $-q$ dan yang satunya membawa muatan $+q$. Melalui pemeriksaan, kita dapat melihat bahwa Φ sama dengan nol pada dinding vertikal demikian pula pada dinding horisontal. Jadi, potensial dalam ruang real ($x > 0$, $y > 0$) tersebut merupakan superposisi dari potensial akibat empat muatan titik—yaitu,

$$\Phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right) \quad (11.33)$$

di mana

$$R_1 = [(x - a)^2 + y^2 + (z - b)^2]^{1/2}$$

$$R_2 = [(x + a)^2 + y^2 + (z - b)^2]^{1/2}$$

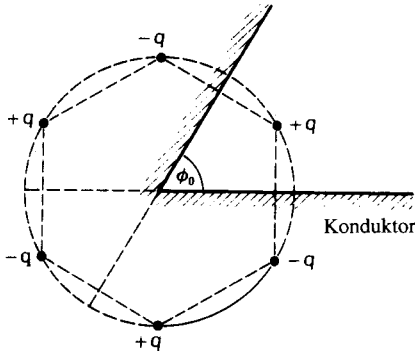
$$R_3 = [(x + a)^2 + y^2 + (z + b)^2]^{1/2}$$

$$R_4 = [(x - a)^2 + y^2 + (z + b)^2]^{1/2}$$

Muatan Titik di Dekat Sebuah Titik Sudut Dinding Konduktor

Untuk sebuah muatan titik di dekat sebuah titik sudut dinding konduktor, seperti ditunjukkan pada Gambar 11.11, kita dapat menggunakan metode bayangan untuk menempatkan muatan bayangan yang tepat dalam daerah yang ditempati oleh konduktor. Ingat kedua aturan:

1. Muatan bayangan hanya dapat ditempatkan dalam daerah yang ditempati oleh konduktor. Muatan itu tidak dapat ditempatkan di dalam ruang real.
2. Strategi penempatan muatan bayangan adalah dengan membuat potensialnya sama dengan nol atau suatu konstanta pada dinding konduktor.



Gambar 11.11 Sebuah muatan titik di dekat suatu titik sudut sebuah dinding konduktor, $\phi_0 = 60^\circ$. Terdapat lima muatan bayangan.

Kita lihat bahwa metode bayangan hanya dapat digunakan jika sudut ϕ_0 sama dengan $180^\circ/n$, di mana n adalah bilangan bulat dan harus terdapat $(2n - 1)$ bayangan. Untuk $n = 1$, terdapat satu muatan bayangan, seperti ditunjukkan pada Gambar 11.5. Untuk $n = 2$, terdapat tiga muatan bayangan, seperti ditunjukkan dalam Gambar 11.10. Untuk $n = 3$ —artinya, $\phi_0 = 60^\circ$ —kita berharap mendapat lima muatan bayangan, dan memang demikianlah halnya, seperti diilustrasikan dalam Gambar 11.11.

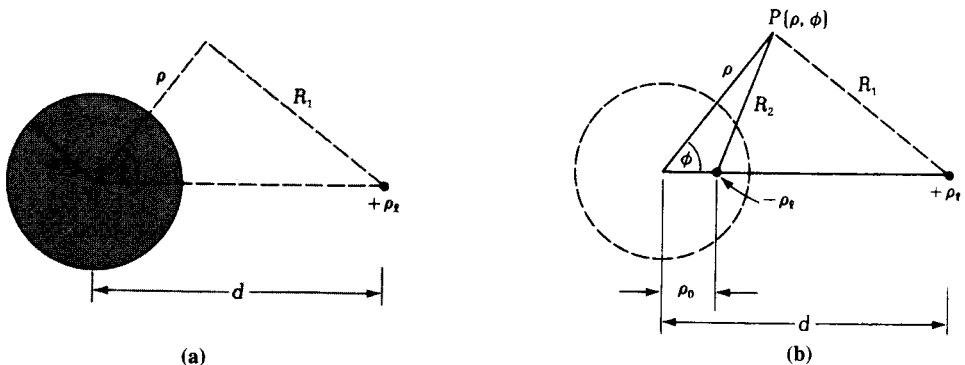
Sebuah Muatan Garis di Dekat Sebuah Silinder Konduktor

Kita juga dapat menggunakan metode bayangan untuk kasus sebuah muatan dengan panjang tak hingga di dekat sebuah silinder konduktor dengan panjang tak hingga, seperti ditunjukkan pada Gambar 11.12. Fungsi potensial Φ di luar silinder konduktor merupakan superposisi dari muatan garis ρ_ℓ dan bayangannya, yang memiliki magnitudo $-\rho_\ell$ dan terletak pada $\rho = \rho_0$. Kita akan mencari nilai ρ_0 dalam parameter a dan d .

Pertama-tama kita akan menentukan potensial akibat sebuah muatan garis ρ_ℓ yang terletak pada sumbu z . Dari (9.22) kita ketahui bahwa medan listrik dari muatan garis ini adalah

$$E(\rho) = \hat{\rho} \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon\rho}$$

Gambar 11.12 (a) Sebuah muatan garis di dekat sebuah silinder konduktor. (b) Bayangan adalah sebuah muatan garis $-\rho_\ell$ yang terletak pada ρ_0 , di mana $\rho_0 = a^2/d$.



Potensial dapat ditentukan dengan integral garis, metode yang didiskusikan dalam Subbab 9.4—yaitu,

$$\begin{aligned}\Phi(\rho) &= - \int_c^\rho \mathbf{E}(\rho) \cdot \hat{\rho} d\rho \\ &= \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{c}{\rho}\right)\end{aligned}$$

Konstanta c merupakan koordinat titik referensi di mana potensialnya nol. Rumus di atas berlaku untuk ρ_ℓ yang terletak pada sumbu z . Jika ρ_ℓ sejajar tetapi tidak tepat pada sumbu z , seperti dalam kasus yang ditunjukkan dalam Gambar 11.12b, fungsi potensial dapat dimodifikasi untuk menghasilkan

$$\Phi(\rho, \phi) = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{R_0}{R_1}\right)$$

di mana R_1 merupakan jarak antara ρ_ℓ dan titik (ρ, ϕ) dan R_0 merupakan jarak antara titik referensi dan ρ_ℓ . Potensial total akibat muatan garis ρ_ℓ dan $-\rho_\ell$ yang ditunjukkan dalam Gambar 11.12b ini merupakan superposisi dari masing-masing potensial akibat ρ_ℓ dan $-\rho_\ell$; artinya,

$$\Phi(\rho, \phi) = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{R_0}{R_1}\right) - \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{R_0}{R_2}\right) = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \quad (11.34)$$

Ingat bahwa R_0 akan diabaikan dalam (11.34). Peniadaan ini menunjukkan bahwa titik referensi dipilih pada jarak yang sama dari ρ_ℓ dan $-\rho_\ell$. Bahkan, sesuai dengan (11.34), potensial akan sama dengan nol di semua titik pada bidang tersebut yang membagi dua garis yang menghubungkan ρ_ℓ dan $-\rho_\ell$. Dalam Gambar 11.12b, R_1 dan R_2 dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}R_1 &= (\rho^2 + d^2 - 2\rho d \cos \phi)^{1/2} \\ R_2 &= (\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho_0 \rho \cos \phi)^{1/2}\end{aligned}$$

Lihat bahwa penyelesaian (11.34) hanya berlaku pada daerah di luar silinder konduktor. Pada permukaan silinder konduktor di $\rho = a$, potensial seharusnya merupakan suatu konstanta, dan akan terjadi hanya jika R_2/R_1 tidak bergantung pada ϕ pada $\rho = a$. Lebih spesifik lagi,

$$\Phi(\rho = a, \phi) = \frac{\rho_\ell}{4\pi\epsilon} \ln\left(\frac{\frac{a^2 + \rho_0^2}{d} - \cos \phi}{\frac{a^2 + d^2}{2ad} - \cos \phi}\right) \quad (11.35)$$

harus merupakan suatu konstanta yang tidak bergantung pada ϕ . Kondisi di atas dapat dipenuhi jika persamaan berikut berlaku:

$$\frac{a^2 + d^2}{2ad} = \frac{a^2 + \rho_0^2}{2a\rho_0}$$

Dari persamaan di atas, kita dapatkan

$$\boxed{\rho_0 = \frac{a^2}{d}} \quad (\text{posisi bayangan pada sebuah silinder konduktor}) \quad (11.36)$$

Mensubstitusikan (11.36) ke dalam (11.35) menghasilkan

$$\Phi(a, \phi) = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{a}{d}\right) \quad (11.37)$$

Persamaan di atas menghasilkan potensial konduktor silindris. Jika silinder ditanahkan sehingga potensialnya sama dengan nol, maka (11.34) harus dimodifikasi dengan mengurangi konstanta yang diberikan dalam (11.37) darinya—artinya

$$\Phi(\rho, \phi) = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon} \left[\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) - \ln\left(\frac{a}{d}\right) \right]$$

Contoh 11.9 Bayangan dari suatu muatan garis di dekat sebuah silinder konduktor telah didapatkan. Contoh ini menunjukkan bagaimana menggunakan hasil ini untuk menyelesaikan permasalahan lain yang berkaitan.

Sebuah konduktor silindris dimuati dengan V_0 volt dan terletak h meter di atas tanah, seperti ditunjukkan pada Gambar 11.13a (hal. 94). Potensial tanah dianggap nol. Tentukan kapasitansi sistem per satuan panjang.

Solusi

Kita akan menyelesaikan soal ini dengan menerapkan hasil yang baru saja didapat. Pertama-tama, kita gambar ulang Gambar 11.13a sebagai Gambar 11.13b, di mana kita memiliki sebuah silinder konduktor yang dimuati dengan V_0 dan sebuah muatan garis ρ_ℓ sejarak d . Kuantitas V_0 terkait dengan ρ_ℓ menurut (11.37)—artinya,

$$V_0 = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{a}{d}\right) \quad (11.38)$$

Ingat bahwa ρ_ℓ dan V_0 berlainan tanda karena $a/d < 1$. Potensial di luar silinder diberikan oleh (11.34). Jelas bahwa, potensial bernilai nol pada saat R_1 sama dengan R_2 . Dengan kata lain, potensial adalah nol pada permukaan AB yang ditunjukkan dalam Gambar 11.13b. Sekarang kita membandingkan daerah di atas tanah yang ditunjukkan pada Gambar 11.13a dengan daerah di atas bidang AB seperti yang ditunjukkan pada Gambar 11.13b. Daerah-daerah ini memiliki kondisi batas yang sama, dan tidak memiliki muatan selain muatan-muatan permukaan di batasnya. Menurut teorema keunikan, potensial dalam daerah-daerah ini sama. Meskipun demikian, potensial yang ditunjukkan pada Gambar 11.13b telah diselesaikan dan diberikan oleh (11.34). Akibatnya, potensial dalam daerah yang ditunjukkan pada Gambar 11.13a ini akan diperoleh hanya dengan cara mensubstitusikan h untuk $(d + \rho_0)$ dalam (11.34):

$$h = \frac{1}{2}(d + \rho_0)$$

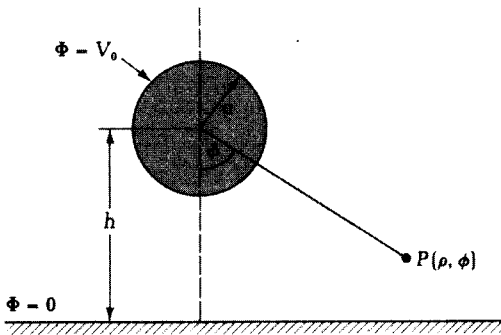
Dengan menggunakan (11.36), kita dapatkan

$$d = h + \sqrt{h^2 - a^2} \quad (11.39)$$

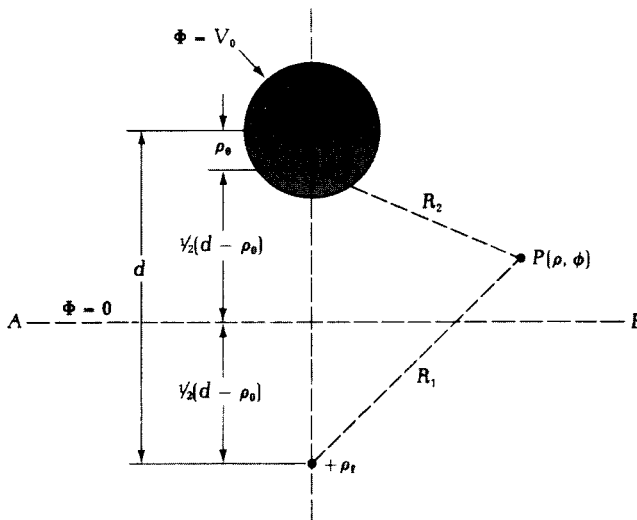
Kapasitansi sistem per satuan panjang ini sama dengan muatan per satuan panjang dibagi beda potensial. Muatan total per satuan panjang yang dibawa silinder sama dengan $-\rho_\ell$. Maka kapasitansinya dinyatakan oleh:

$$C = \frac{-\rho_\ell}{V_0} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{d}{a}} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \left[\frac{h}{a} + \sqrt{\left(\frac{h}{a}\right)^2 - 1} \right]}$$

Gambar 11.13(a) Sebuah silinder konduktor di atas suatu bidang konduktor datar.



Gambar 11.13(b) Sebuah muatan garis di dekat suatu silinder konduktor. Kondisi batas dari daerah atas identik dengan kondisi batas pada daerah yang ditunjukkan pada Gambar 11.13(a).



atau

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\cosh^{-1}\left(\frac{h}{a}\right)} = \left(\frac{F}{m}\right) \quad (11.40)$$

Hasil ini merupakan penyelesaian yang teliti dari kapasitansi per satuan panjang dari suatu konduktor silinder di atas sebuah keping konduktor sempurna. Ada baiknya kita menghitung kapasitansi saluran transmisi tenaga listrik yang membentang di atas tanah.

Contoh 11.10 *Contoh ini menunjukkan bahwa begitu potensial didapatkan, medan listrik dapat dihitung langsung dari potensial.*

Hitung kuat medan listrik maksimum pada permukaan silinder konduktor yang ditunjukkan pada Gambar 11.13a.

Solusi

Bahwa medan listrik maksimum akan terletak pada permukaan konduktor pada titik yang paling dekat dengan tanah diakibatkan oleh kenyataan bahwa pada titik ini medan listrik akibat muatan $+\rho_\ell$ dan $-\rho_\ell$, saling menambahkan. Dari sudut pandang lain, kita mengetahui

bahwa muatan pada konduktor cenderung tertarik ke tanah, sehingga konsentrasi muatan terbesar pada konduktor tersebut harus terjadi pada titik yang paling dekat dengan tanah. Sesuai dengan kondisi batas, konsentrasi muatan yang besar menandakan medan listrik yang besar.

Sekarang kita akan menghitung medan listrik maksimum. Kita memperoleh medan listrik dengan mengambil gradien dari Φ yang diberikan oleh (11.34). Merujuk pada koordinat silinder yang didefinisikan oleh Gambar 11.12b, kita dapatkan:

$$E = -\nabla\Phi$$

$$= \frac{-\rho_\ell}{4\pi\epsilon} \left[\hat{\rho} \left(\frac{2\rho - 2\rho_0 \cos \phi}{R_2^2} - \frac{2\rho - 2d \cos \phi}{R_1^2} \right) + \hat{\phi} \left(\frac{2\rho_0 \sin \phi}{R_2^2} - \frac{2d \sin \phi}{R_1^2} \right) \right]$$

Pada titik silinder yang paling dekat dengan tanah, $\rho = a$, dan $\phi = 0$. Kita dapatkan

$$E = \hat{\rho} \frac{V_0}{a \ln\left(\frac{d}{a}\right)} \left(\frac{d+a}{d-a} \right) \quad (11.41)$$

Sebuah Muatan Titik di Dekat Suatu Bola Konduktor

Metode bayangan juga dapat menyelesaikan permasalahan elektrostatik mengenai suatu muatan titik di dekat bola konduktor yang ditanahkan, seperti ditunjukkan pada Gambar 11.14. Bayangan muatan real q adalah sebuah muatan titik dari q' yang terletak pada r_0 di dalam bola konduktor. Kita akan menentukan nilai q' dan r_0 dalam a , d , dan q . Sesuai dengan (9.12), potensial Φ akibat q dan q' dinyatakan sebagai berikut:

$$\Phi(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{q}{R_1} + \frac{q'}{R_2} \right) \quad (11.42)$$

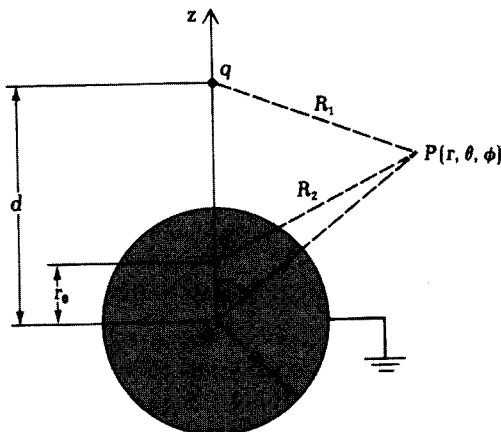
di mana

$$R_1 = (r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta)^{1/2}$$

$$R_2 = (r^2 + r_0^2 - 2r_0r \cos \theta)^{1/2}$$

Kita menggunakan koordinat bola dalam persamaan di atas.

Gambar 11.14 Sebuah muatan titik q di dekat suatu bola konduktor. Muatan bayangannya adalah q' yang terletak pada r_0 .



Pada $r = a$, kita menghendaki $\Phi = 0$ —artinya,

$$\begin{aligned}\Phi(a, \theta) &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{q}{(a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta)^{1/2}} + \frac{q'}{(a^2 + r_0^2 - 2r_0a \cos \theta)^{1/2}} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{q}{\sqrt{2ad} \left(\frac{a^2 + d^2}{2ad} - \cos \theta \right)^{1/2}} + \frac{q'}{\sqrt{2ar_0} \left(\frac{a^2 + r_0^2}{2ar_0} - \cos \theta \right)^{1/2}} \right] = 0\end{aligned}$$

Karena persamaan di atas harus berlaku untuk semua θ , kita dapatkan dua kondisi berikut:

$$\begin{aligned}\frac{a^2 + d^2}{2ad} &= \frac{a^2 + r_0^2}{2r_0a} \\ \frac{q}{\sqrt{2ad}} &= \frac{-q'}{\sqrt{2ar_0}}\end{aligned}$$

Dengan menyelesaikan persamaan di atas, kita dapatkan

$r_0 = \frac{a^2}{d}$	(posisi bayangan dalam suatu bola konduktor)	(11.43a)
$q' = -q \left(\frac{a}{d} \right)$	(nilai muatan bayangan)	(11.43b)

Kesimpulannya, potensial Φ terjadi akibat adanya muatan titik q dan bayangannya q' , yang terletak dalam bola konduktor pada jarak r_0 dari pusat bola ke arah muatan real. Muatan total yang diinduksikan pada permukaan bola konduktor tersebut adalah $-aq/d$.

Bila bola konduktor diisolasi dari tanah dan tidak membawa muatan netto, maka (11.42) tidak lagi berlaku dan harus dimodifikasi untuk memberikan hasil yang benar. Karena muatan netto pada bola adalah nol dan muatan permukaan yang terinduksi akibat muatan luar q adalah $-qa/d$, maka sejumlah $+qa/d$ muatan harus didistribusikan pada permukaan bola konduktor. Distribusi muatan qa/d ini akan seragam karena permukaan bola tersebut merupakan permukaan ekuipotensial. Dari Contoh 9.10, kita mengetahui bahwa potensial akibat muatan yang terdistribusi seragam pada sebuah konduktor bola ditentukan dengan cara yang sama sebagaimana ketika muatan tersebut terkonsentrasi pada pusat bola. Jadi, kita tinggal menambahkan suku ini pada penyelesaian (11.42):

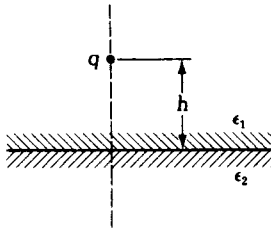
$$\Phi(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{a}{R_2 d} + \frac{a}{rd} \right) \quad (11.44)$$

Persamaan ini merupakan fungsi potensial dari sebuah muatan titik di dekat bola konduktor yang diisolasi dari tanah dan tidak membawa muatan netto. Ingat bahwa potensial pada bola yang terisolasi ini dinyatakan sebagai berikut:

$$\Phi(a, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon d}$$

Sebuah Muatan Titik di Dekat suatu Antarmuka Dielektrik

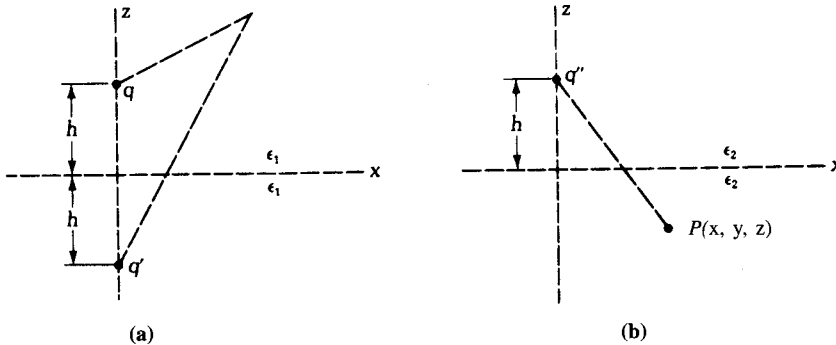
Perhatikan sebuah muatan titik q yang terletak pada medium 1 sejauh h meter dari suatu batas datar medium 2, seperti diilustrasikan dalam Gambar 11.15. Medium 1 dan 2 masing-masing memiliki permitivitas ϵ_1 dan ϵ_2 .



Gambar 11.15 Sebuah muatan titik di dekat suatu antarmuka dari dua medium dielektrik.

Dalam medium 1, potensial elektrostatis terjadi akibat muatan q dan bayangannya, yang terletak pada titik bayangan-cermin dari muatan q . Potensial dalam medium 1 dapat ditentukan dengan mengandaikan seakan-akan terdapat dua muatan q dan q' yang terletak dalam sebuah medium homogen yang memiliki karakteristik ϵ_1 . Gambar 11.16a menunjukkan keadaan ini, dan Gambar 11.16b menunjukkan keadaan dari medium 2. Dengan kata lain, potensial dalam medium 2 ditentukan dengan mengandaikan seolah-olah terdapat sebuah muatan titik q'' yang terletak pada posisi muatan real q dan seolah-olah ruangan totalnya homogen dan memiliki karakteristik ϵ_2 . Kita akan menentukan nilai q' dan q'' dalam q , ϵ_1 , dan ϵ_2 .

Gambar 11.16 (a) Dalam keadaan yang ditunjukkan pada Gambar 11.15, akan tampak bagi seorang pengamat di medium 1 bahwa ruang tersebut tadinya homogen dan seakan-akan terdapat dua muatan.
(b) Untuk seorang pengamat di medium 2, akan tampak bahwa tadinya hanya ada satu muatan yang terletak dalam suatu medium homogen yang memiliki karakteristik ϵ_2 .



Marilah kita nyatakan $\Phi_1(x, y, z)$ dan $\Phi_2(x, y, z)$ sebagai fungsi potensial dalam medium 1 dan 2. Sesuai dengan pernyataan yang diberikan di atas, kita dapat menyusun persamaan berikut untuk Φ_1 dan Φ_2 :

$$\Phi_1(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left[\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - h)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + h)^2}} \right] \quad (11.45a)$$

$$\Phi_2(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{q''}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - h)^2}} \quad (11.45b)$$

Kita ingin dua kondisi berikut dipenuhi:

$$\Phi_1(x, y, 0) = \Phi_2(x, y, 0) \quad (11.46a)$$

$$\epsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = \epsilon_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \Big|_{z=0} \quad (11.46b)$$

Kondisi (11.46a) hanya mensyaratkan potensial elektrostatik kontinu di seluruh batas, dan kondisi (11.46b) mensyaratkan kontinuitas dari komponen normal medan D .

Dengan menerapkan (11.46) pada (11.45), kita dapatkan

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left(\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}} + \frac{q'}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}} \right) = \frac{q''}{4\pi\epsilon_2 \sqrt{x^2 + y^2 + h^2}}$$

$$\frac{qh}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}} - \frac{q'h}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{q''h}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}}$$

Persamaan di atas dapat disederhanakan untuk menghasilkan persamaan berikut:

$$q + q' = q'' \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right)$$

$$q - q' = q''$$

Persamaan-persamaan ini dapat diselesaikan untuk memperoleh q' dan q'' :

$q' = q \left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right)$	(muatan bayangan yang dilihat dari medium 1) (11.47a)
$q'' = q \left(\frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right)$	(muatan bayangan yang dilihat dari medium 2) (11.47b)

Menariknya, pada limit ϵ_2 mendekati tak hingga, $q' = -q$ dan $q'' = 2q$. Hasil ini sama persis dengan kasus muatan titik di dekat bidang konduktor sempurna. Sesuai dengan (11.45b), dengan $q'' = 2q$ dan $\epsilon_2 \rightarrow \infty$, potensial pada konduktor sempurna akan sama dengan nol, sebagaimana seharusnya.

Contoh 11.11 Begitu muatan bayangan ditentukan, fungsi potensial dan medan listrik dapat dihitung secara langsung.

Untuk kasus pada Gambar 11.15, gambarlah garis-garis medan listriknya. Anggap $\epsilon_2 = 2\epsilon_1$.

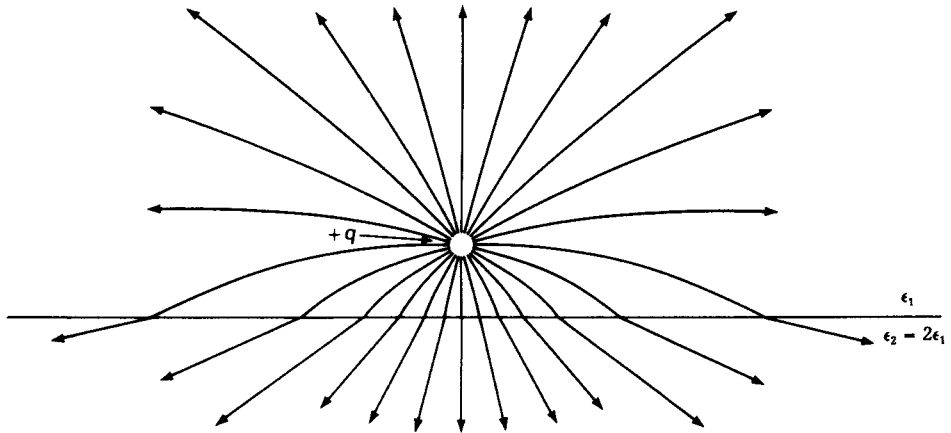
Solusi Dengan menggunakan (11.47), kita dapatkan

$$q' = \frac{-q}{3}$$

$$q'' = \frac{4q}{3}$$

Gambar 11.17 memperlihatkan garis-garis medan listrik tersebut. Ingat bahwa dalam medium 2 garis-garis medan merupakan garis lurus yang radial dan cenderung bertemu di titik $(0, 0, h)$.

Gambar 11.17 Garis-garis medan listrik dari sebuah muatan titik di dekat suatu antarmuka dielektrik.



Medan Listrik Akibat Saluran Tenaga Listrik

Manusia hidup dalam lingkungan yang penuh dengan medan elektromagnetik. Beberapa medan dibangkitkan oleh sumber-sumber alami seperti matahari. Beberapa medan yang lain adalah buatan, seperti siaran radio dan televisi. Kita telah melihat batas aman **IEEE** untuk perkenaan medan elektromagnetik frekuensi tinggi pada manusia (Gambar 3.5). Perhatikan bahwa petunjuk keselamatan untuk medan EM di bawah 3 MHz belum ditetapkan.

Saluran tenaga listrik dan peralatan listrik membangkitkan medan elektromagnetik frekuensi rendah (60 Hz di AS). Apakah medan-medan ini aman? Pertanyaan mengenai keamanan medan EM frekuensi rendah masih sangat kontroversial dan pendapat para ahli sangatlah beragam. Mereka yang berpendapat bahwa medan EM yang dibangkitkan oleh saluran tenaga listrik ini akan mengakibatkan ancaman kesehatan yang serius menggunakan bukti-bukti statistik.* Sejumlah studi telah menemukan hubungan statistik antara rutinitas terkena medan elektromagnetik kuat dan kecenderungan terjadinya kanker. Meskipun demikian, hubungan ini dianggap “lemah” karena resiko absolutnya kecil. Sebagai contoh,** risiko terkena leukemia bagi operator gardu induk mungkin 2 dari 10.000 dan bukan rata-ratanya yaitu 1 dalam 10.000.

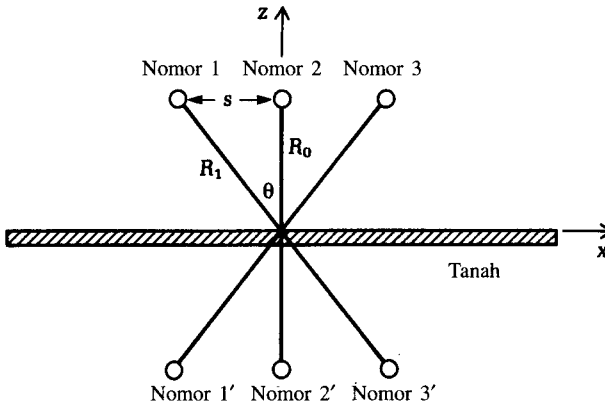
Beberapa ilmuwan mempertahankan pendapat bahwa medan elektromagnetik yang dibangkitkan oleh adanya saluran tenaga listrik dan peralatannya sama sekali tidak membahayakan kesehatan.*** Pendapat mereka didasarkan pada perhitungan bahwa medan saluran tenaga listrik ini lebih rendah daripada medan yang terdapat di alam dan energi yang masuk ke dalam tubuh manusia lebih sedikit daripada derau termal.

Di sini kita akan menghitung kekuatan medan listrik yang dibangkitkan oleh suatu saluran transmisi tenaga listrik umum. Saluran tersebut terdiri dari tiga kawat sejajar yang terletak R_0 meter di atas tanah. Setiap kawat terdiri dari satu bundel konduktor, tetapi demi tujuan kita, kita memodelkan bundel konduktor tersebut sebagai sebuah kawat yang memiliki jari-jari efektif a . Kawat-kawat tersebut terpisah sejauh s meter, seperti ditunjukkan pada Gambar 11.18. Masing-masing kawat yang membawa muatan garis ini akan menghasilkan tegangan V_1 , V_2 , dan V_3 . Selanjutnya kita anggap bahwa tegangan-tegangan ini merupakan tegangan tiga fasa — yaitu, $V_1 = V_0 \exp(-j2\pi/3)$, $V_2 = V_0$, dan $V_3 = V_0 \exp(+j2\pi/3)$.

* P. Brodeur, *The Great Power-Line Cover-Up*, Boston: Little, Brown, & Co., 1994.

** P. Thomas, “Power struggle,” *Harvard Health Letter*, Jilid. 18, Juli 1993, hal. 1.

*** W.R. Bennett, Jr., “Cancer and power lines,” *Physics Today*, April 1994, hal. 23.

Gambar 11.18 Suatu saluran transmisi tenaga listrik tiga fasa dan bayangannya.

Karena tegangan diberikan dalam tegangan tiga fasa, tersirat bahwa tegangan bervariasi secara kosinus terhadap waktu pada suatu frekuensi yang tetap. Kasarnya, ini adalah masalah dinamik dan medannya bukanlah elektrostatik. Meskipun demikian, frekuensi dari saluran tenaga listrik ini rendah, dan panjang gelombangnya dalam udara sangat besar (5000 km pada 60 Hz) apabila dibandingkan dengan panjang fisik R_0 , s , dan a , yang 10 m atau kurang. Oleh karena itu, kita dapat menggunakan rumus yang diturunkan untuk medan elektrostatik untuk menghitung medan listrik yang dibangkitkan oleh saluran tenaga listrik dengan galat yang sangat kecil.[†]

Merujuk pada Gambar 11.18, tanah dimodelkan sebagai suatu konduktor sempurna, dan menurut teori bayangan, diperoleh tiga kawat bayangan dengan tegangan yang berlawanan. Medan listrik total kemudian dihitung dengan menjumlahkan medan listrik yang dibangkitkan oleh kawat individu dan bayangannya.

Medan listrik akibat sebuah kawat yang membawa muatan garis ρ_ℓ ini diberikan oleh (9.22):

$$E_\rho = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon\rho} \quad (11.48)$$

Tegangan diperoleh dengan mengintegrasikan medan E sepanjang ρ :

$$V(\rho) = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{R_0}{\rho}\right)$$

di mana R_0 merupakan jarak dari pusat kawat ke sebuah bidang referensi, yang kita jadikan sebagai tanah. Tegangan pada kawat dengan jari-jari a adalah

$$V(a) = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{R_0}{a}\right) \quad (11.49)$$

Mensubstitusikan (11.49) ke dalam (11.48) menghasilkan

$$E_\rho = \frac{V(a)}{\rho \ln(R_0/a)} \quad (11.50)$$

Dengan menggunakan (11.50), kita peroleh medan E pada tanah tepat di bawah kawat nomor 2 akibat ketiga kawat dan bayangannya. Medan listrik akibat kawat nomor 1 sebagai berikut:

[†] Pembuktian yang lebih mendalam akan dibahas dalam Bab 15.

$$E_1 = \frac{V_1}{R_1 C}(\hat{x} \sin \theta - \hat{z} \cos \theta)$$

Di mana $R_1 = (s^2 + R_0^2)^{1/2}$, dan $C = \ln(R_0/a)$. Demikian pula,

$$E_2 = \frac{V_2}{R_0 C}(-\hat{z})$$

$$E_3 = \frac{V_3}{R_1 C}(-\hat{x} \sin \theta - \hat{z} \cos \theta)$$

$$E_1 = \frac{-V_1}{R_1 C}(\hat{x} \sin \theta + \hat{z} \cos \theta)$$

$$E_2 = \frac{-V_2}{R_0 C}\hat{z}$$

$$E_3 = \frac{-V_3}{R_1 C}(-\hat{x} \sin \theta + \hat{z} \cos \theta)$$

Menjumlahkan keenam persamaan ini menunjukkan bahwa komponen x dari medan listrik total adalah nol, dan komponen z dinyatakan sebagai berikut:

$$E_{tz} = \frac{-2 \cos \theta}{R_1 C}(V_1 + V_3) - \frac{2V_2}{R_0 C}$$

Mensubstitusikan $V_1 = V_0 \exp(-j2\pi/3)$, $V_2 = V_0$, dan $V_3 = V_0 \exp(+j2\pi/3)$ ke dalam persamaan di atas akan menghasilkan

$$E_{tz} = \frac{-2V_0 s^2}{R_1^2 R_0 C} \quad (11.51)$$

Untuk saluran transmisi tegangan tinggi, dapat digunakan data berikut:*

$$V_0 = 525 \text{ kV}$$

$$R_0 = 10,6 \text{ m}$$

$$s = 10 \text{ m}$$

dan

$$a = 0,15 \text{ m}$$

Mensubstitusikan data-data ini ke dalam (11.51) akan menghasilkan

$$E_{tz} = -11 \text{ kV/m}$$

Sebagai perbandingan, medan listrik alami pada bumi adalah sekitar 120 V/m. Harus diingat bahwa jika seseorang terkena medan listrik dengan keluaran yang telah dihitung di atas, medan di dalam tubuhnya jauh lebih kecil (lihat referensi catatan kaki Bennetti, 1994, op. cit.).

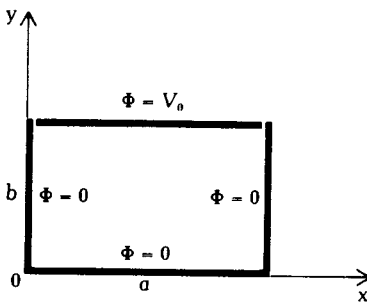
Kita akan menghitung medan magnet yang dibangkitkan oleh saluran tenaga listrik pada Bab 13. Sekarang kita kembali ke pertanyaan mengenai keamanan. Di tengah banyaknya kontroversi yang tidak pasti, suatu tim di Carnegie Mellon University mengusulkan “pencegahan yang bijaksana”—yaitu, untuk menghindari bahaya medan **EM** buatan yang tidak perlu. Dari sudut pandang teknis, ini juga berarti mendesain pengawatan listrik di dalam rumah dan produk konsumen yang mampu meminimalkan kebocoran medan elektromagnetik.

* J.J. LaForest, ed., *Transmission Line Reference Book*, Palo Alto, CA: Electric Power Institute, 1982, hal. 332.

11.3 METODE PEMISAHAN VARIABEL

Pada bagian ini kami akan memperkenalkan suatu metode matematis standar untuk penyelesaian persamaan Laplace, dengan kondisi batas tertentu. Pertama-tama kita akan mempelajari permasalahan nilai-batas dua-dimensi. Kemudian kita akan memperluas prosedurnya untuk kasus tiga dimensi.

Perhatikan pipa logam persegi panjang dengan dimensi a dan b yang ditunjukkan dalam Gambar 11.19. Dimensi z dianggap memiliki panjang tak hingga, sehingga potensial elektrostatik dan medan listriknya tidak bergantung pada z . Hanya terdapat dua variabel, x dan y . Atas alasan ini, kita menyebut permasalahan ini sebagai permasalahan nilai batas dua dimensi. Seperti ditunjukkan dalam Gambar 11.19, tiga sisi pipa tersebut dijaga pada potensial nol, sedangkan sisi keempat (keping atas) dijaga pada tegangan konstan V_0 . Celah isolasi pada kedua sisi dari keping atas berfungsi mencegah terjadinya hubungan singkat.



Gambar 11.19 Suatu pipa logam persegi panjang ditanahkan pada tiga sisinya dan dijaga pada V_0 pada bidang atasnya. Tidak terdapat muatan volume di dalam pipa. Bidang atas diisolasi dari dinding lainnya pada kedua celahnya. Potensial di dalam pipa dapat ditentukan dengan menggunakan metode pemisahan variabel.

Dengan menganggap rapat muatan volume di dalam pipa tersebut sama dengan nol, kita ingin mendapatkan potensial $\Phi(x, y)$ di dalam pipa. Secara matematis, permasalahan ini dapat dinyatakan sebagai berikut: tentukan $\Phi(x, y)$ sehingga

$$\nabla^2 \Phi(x, y) = 0 \quad \text{untuk } 0 < x < a \quad \text{dan } 0 < y < b \quad (11.52)$$

dan

$$\Phi(0, y) = 0 \quad \text{untuk } 0 < y < b \quad (11.53a)$$

$$\Phi(a, y) = 0 \quad \text{untuk } 0 < y < b \quad (11.53b)$$

$$\Phi(x, 0) = 0 \quad \text{untuk } 0 < x < a \quad (11.53c)$$

$$\Phi(x, b) = V_0 \quad \text{untuk } 0 < x < a \quad (11.53d)$$

Ingat bahwa pada saat ρ_v di dalam pipa nol, akan terdapat muatan permukaan pada dindingnya. Meskipun demikian, muatan-muatan permukaan ini tidak terdistribusi secara merata pada dinding interior. Kita akan mengetahui fungsi distribusi ketika kita memperoleh fungsi potensialnya.

Karena Φ adalah fungsi dari x dan y , (11.52) dapat ditulis ulang sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (11.54)$$

Sekarang kita akan memakai prosedur pemisahan variabel dengan menyatakan

$$\Phi(x, y) = X(x)Y(y) \quad (\text{pemisahan variabel}) \quad (11.55)$$

Dengan kata lain, kita menganggap bahwa fungsi potensial Φ dapat dinyatakan sebagai hasil kali $X(x)$, yang hanya merupakan fungsi variabel x dan $Y(y)$, yang hanya merupakan

fungsi variabel y . Ingat bahwa tidak semua fungsi x dan y dapat dinyatakan sebagai suatu hasil kali dari dua fungsi dari x dan y . Sebagai contoh, fungsi $f(x) = x + y$ tidak dapat dinyatakan dalam bentuk yang diberikan oleh (11.55). Pembaca dapat mempertanyakan kebenaran penggunaan asumsi (11.55). Kebenaran ini diperoleh dari teorema keunikan yang didiskusikan dalam Subbab 11.1. Sesuai dengan teorema keunikan, tidaklah menjadi masalah asumsi mana yang diambil selama penyelesaian akhirnya memenuhi (11.52) dan (11.53). Jika tidak memenuhi (11.52) dan (11.53), maka telah diperoleh penyelesaian yang unik.

Mensubstitusikan (11.55) ke dalam (11.54), akan menghasilkan

$$X''Y + XY'' = 0$$

di mana X'' dan Y'' masing-masing merupakan turunan kedua dari $X(x)$ dan $Y(y)$. Menyusun kembali persamaan di atas akan menghasilkan bentuk baru berikut:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} \quad (11.56)$$

Ingat bahwa X hanya merupakan fungsi x , sebagaimana X'' . Oleh karena itu, ruas kiri dari (11.56) juga merupakan fungsi x semata atau merupakan suatu konstanta. Dengan menggunakan argumen yang sama, kita menyimpulkan bahwa ruas kanan dari (11.56) juga merupakan fungsi y semata atau suatu konstanta. Karena (11.56) harus memenuhi semua x dan y dalam daerah $0 < x < a$ dan $0 < y < b$, ini hanya bisa dipenuhi apabila kedua ruasnya sama dengan suatu konstanta—artinya,

$$\frac{X''}{X} = C \quad (11.57a)$$

$$\frac{Y''}{Y} = -C \quad (11.57b)$$

Ingat bahwa persamaan diferensial parsial orde kedua (11.54) sekarang telah diubah ke dalam dua persamaan diferensial biasa orde kedua (11.57)

Konstanta C yang muncul dalam (11.57) bisa positif, negatif, atau nol. Sekarang kita akan meninjau tiga kemungkinan ini secara detail.

Kasus A: $C > 0$

Jika kita menganggap bahwa C positif, maka C dapat dinyatakan sebagai berikut: $C = k^2$. Akibatnya, $X(x)$ merupakan kombinasi dari e^{kx} dan e^{-kx} atau $\sinh(kx)$ dan $\cosh(kx)$, dan $Y(y)$ merupakan kombinasi dari $\sin(ky)$ dan $\cos(ky)$.

Kasus B: $C < 0$

Dalam kasus ini, $C = -k^2$ dan $X(x)$ merupakan kombinasi dari $\sin(kx)$ dan $\cos(kx)$, dan $Y(y)$ merupakan kombinasi dari $\sinh(ky)$ dan $\cosh(ky)$.

Kasus C: $C = 0$

Dalam kasus ini, $X(x) = A_1x + B_1$, dan $Y(y) = A_2y + B_2$.

Kasus manakah yang akan kita pilih? Kita mungkin mencobanya satu persatu sampai kita dapat memenuhi empat kondisi batas yang diberikan pada (11.53). Meskipun demikian, alternatif yang lebih baik adalah menguji kondisi batas tersebut untuk mencari petunjuk. Dari (11.53a) dan (11.53b), kita lihat bahwa Φ akan hilang pada $x = 0$ dan hilang lagi pada $x = a$. Oleh karena itu, kita mengetahui bahwa $X(x)$ harus memiliki setidaknya dua nol dalam jangkauan $0 \leq x \leq a$. Kita kemudian akan kembali menguji ketiga kasus yang tertera

di atas. Untuk kasus A, $X(x)$ dinyatakan sebagai $\sinh(kx)$, yang hanya memiliki satu buah nol dan $\cosh(kx)$, yang tidak memiliki nol. Demikian pula untuk kasus C, $X(x)$ hanya dapat memiliki paling banyak satu buah nilai nol. Meskipun demikian, untuk kasus B, $X(x)$ dinyatakan sebagai $\sin(kx)$ dan $\cos(kx)$, keduanya memiliki nol yang tak hingga. Pilihannya sekarang tampak jelas. Untuk memenuhi kondisi batas, kita harus memilih Kasus B.

Akibatnya, kita menyelesaikan (11.57a) dan (11.57b) untuk mendapatkan hasil berikut:

$$X(x) = A_1 \sin(kx) + B_1 \cos(kx) \quad (11.58a)$$

$$Y(y) = A_2 \sinh(ky) + B_2 \cosh(ky) \quad (11.58b)$$

$$\Phi(x, y) = [A_1 \sin(kx) + B_1 \cos(kx)][A_2 \sinh(ky) + B_2 \cosh(ky)] \quad (11.58c)$$

Sekarang kita akan menggunakan kondisi batas (11.53a) dan mengharuskan

$$\Phi(0, y) = 0 = B_1 Y(y)$$

Kondisi di atas dapat dipenuhi dengan mengambil $B_1 = 0$. Demikian pula, dari (11.53c), kita dapatkan $B_2 = 0$. Sekarang fungsi potensial tersebut akan mengambil bentuk berikut:

$$\Phi(x, y) = A \sin(kx) \sinh(ky) \quad (11.59)$$

di mana A dan k merupakan konstanta sebarang. Untuk memenuhi (11.53b), kita mensubstitusikan $x = a$ ke dalam (11.59) dan mendapatkan hasil sebagai berikut:

$$0 = A \sin(ka) \sinh(ky) \quad \text{untuk} \quad 0 < y < b$$

Hasil ini mungkin terjadi hanya jika $ka = m\pi$, di mana m adalah bilangan bulat. Jadi, fungsi potensial tersebut akan mengambil bentuk berikut:

$$\Phi(x, y) = A \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \quad (11.60)$$

di mana $m = 1, 2, 3, \dots$. Ingat bahwa (11.60) memenuhi persamaan Laplace (11.54) dan tiga kondisi pertama dari empat kondisi batas yang diberikan dalam (11.53). Jika kita memiliki suatu rangkaian yang terdiri dari suku-suku yang berkaitan dengan nilai dari m yang berbeda-beda, maka rangkaian tersebut juga akan memenuhi persamaan Laplace (11.54). Dengan kata lain, anggaplah

$$\Phi(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \quad (11.61)$$

Pembaca sebaiknya membuktikan bahwa (11.61) juga memenuhi tiga kondisi pertama dari empat kondisi batas yang diberikan pada (11.53). Sekarang kita akan menggunakan kondisi batas keempat (11.53d), yang menghasilkan

$$V_0 = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{m\pi b}{a}\right) \quad \text{untuk} \quad 0 < x < a \quad (11.62)$$

Kita menyadari bahwa (11.62) semata-mata merupakan ekspansi deret Fourier dari konstanta V_0 dalam interval $0 < x < a$. Dengan menggunakan teknik standar untuk perhitungan koefisien Fourier, kita dapat memperoleh nilai dari A_m dalam (11.62) untuk semua nilai m . Prosedurnya ditunjukkan dibawah ini.

Mengalikan kedua ruas dari (11.62) dengan $\sin(n\pi x/a)$ dan kemudian mengintegrasikan dari 0 sampai a akan menghasilkan

$$\int_0^a V_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = A_n \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \left(\frac{a}{2}\right) \quad (11.63)$$

akibat sifat ortogonalitas dari fungsi $\sin(n\pi x/a)$ dan $\sin(m\pi x/a)$ dalam interval $0 < x < a$ ini:

$$\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{jika } m \neq n \\ a/2 & \text{jika } m = n \end{cases}$$

Ruas kiri (11.63) dapat diintegrasikan secara analitis untuk memperoleh hasil berikut:

$$A_n = \frac{2V_0[1 - \cos(n\pi)]}{n\pi \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}$$

yang bernilai nol apabila n adalah bilangan bulat genap. Penyelesaian akhir dari Φ adalah sebagai berikut:

$$\Phi(x, y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=\text{ganjil}}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)}{n \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \quad (11.64)$$

di mana “ $n = \text{ganjil}$ ” berarti $n = 1, 3, 5, \dots$. Penyelesaian ini merupakan penyelesaian unik untuk soal yang diberikan karena ia memenuhi persamaan Laplace dan semua kondisi batasnya. Pada $y = b$, khususnya, $\Phi(x, b) = V_0$ untuk $0 \leq x \leq a$. Persamaan (11.64) akan menghasilkan

$$\sum_{n=\text{ganjil}}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{a} = 1$$

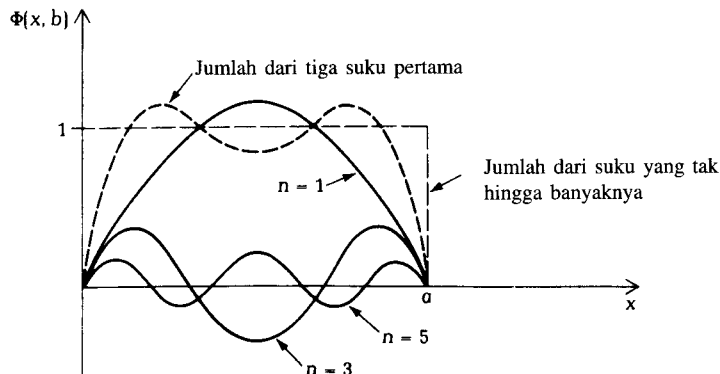
Kita dapat melihat bahwa deret tersebut memang terus naik hingga sama dengan satu (unitas) untuk $0 \leq x \leq a$. Gambar 11.20 mengilustrasikan hasil ini dengan jumlah dari tiga suku pertama.

Meskipun kita telah menyelesaikan permasalahan nilai batas secara formal dengan penyelesaian dalam bentuk deret tak hingga, ada satu pertanyaan praktis yang masih perlu dijawab. Apakah deret tak hingga (11.64) ini konvergen cukup cepat sehingga dalam praktek Φ dapat dijumlahkan secara numerik oleh komputer dalam waktu yang memadai? Untuk menjawab pertanyaan ini, kita harus menguji bagaimana suku-suku dalam deret tersebut berperilaku pada saat indeks n menjadi besar. Lihat bahwa

$$\sinh(nu) = \frac{e^{nu} - e^{-nu}}{2}$$

Untuk nu yang besar, suku kedua dapat diabaikan, dan kita akan memiliki perilaku asimtotik berikut untuk $\sinh(nu)$:

Gambar 11.20 $\Phi(x, b)$ yang diberikan oleh persamaan (11.64) dan komponen Fouriernya.



$$\sinh(nu) \rightarrow \frac{e^{nu}}{2}$$

Oleh karena itu, suku ke- n dalam (11.64) dapat didekati sebagai berikut:

$$\frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \exp\left[\frac{-n\pi(b-y)}{a}\right]$$

Hasil ini secara eksponensial kecil terkecuali di dekat $y = b$. Tetapi pada $y = b$ potensialnya diketahui sebesar V_0 . Akibatnya, deret (11.64) akan konvergen sangat cepat pada setiap titik di dalam pipa.

Gambar 11.21a memperlihatkan garis-garis ekipotensial di dalam suatu pipa persegi panjang, dengan $V_0 = 100$ volt, $a = 20$ satuan, dan $b = 15$ satuan. Garis ini didapatkan pertama kali dengan menghitung potensial pada (11.64) di titik-titik yang berbeda (sebagai contoh 20 dengan 15 titik) dalam pipa, dan kemudian menggunakan sebuah perangkat lunak grafik untuk menggambar garis-garis konturnya. Deret tak hingga pada (11.64) akan terputus pada $n = 31$.

Contoh 11.12 Teknik pemisahan variabel yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan elektrostatik dua dimensi dapat diperluas untuk kasus tiga dimensi.

Tentukan potensial elektrostatik di dalam kotak logam persegi panjang yang ditunjukkan dalam Gambar 11.22 (hal. 107). Kelima sisi dari kotak dijaga pada potensial nol, sedangkan sisi keenam (keping atas) dijaga pada V_0 volt. Rapat muatan volume di dalam kotak tersebut sama dengan nol.

Solusi

Kita akan mengikuti prosedur pemisahan variabel sebagaimana dinyatakan dalam bagian ini dan memperluasnya untuk dalam kasus ini, yang merupakan permasalahan tiga dimensi. Pernyataan matematis dari permasalahan ini adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{untuk} \quad \begin{cases} 0 < x < a \\ 0 < y < b \\ 0 < z < c \end{cases} \quad (11.65)$$

$$\Phi(0, y, z) = 0 \quad \text{untuk} \quad 0 < y < b \quad (11.66a)$$

$$\Phi(a, y, z) = 0 \quad \text{untuk} \quad 0 < z < c \quad (11.66b)$$

$$\Phi(x, 0, z) = 0 \quad \text{untuk} \quad 0 < x < a \quad (11.66c)$$

$$\Phi(x, b, z) = 0 \quad \text{untuk} \quad 0 < z < c \quad (11.66d)$$

$$\Phi(x, y, 0) = 0 \quad \text{untuk} \quad 0 < x < a \quad (11.66e)$$

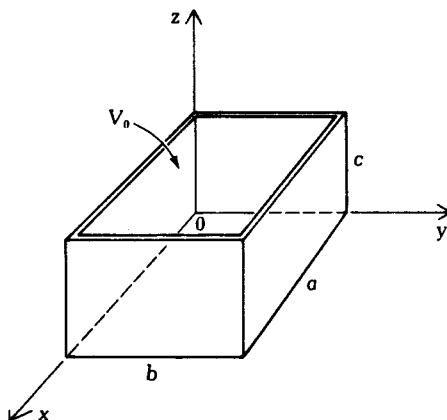
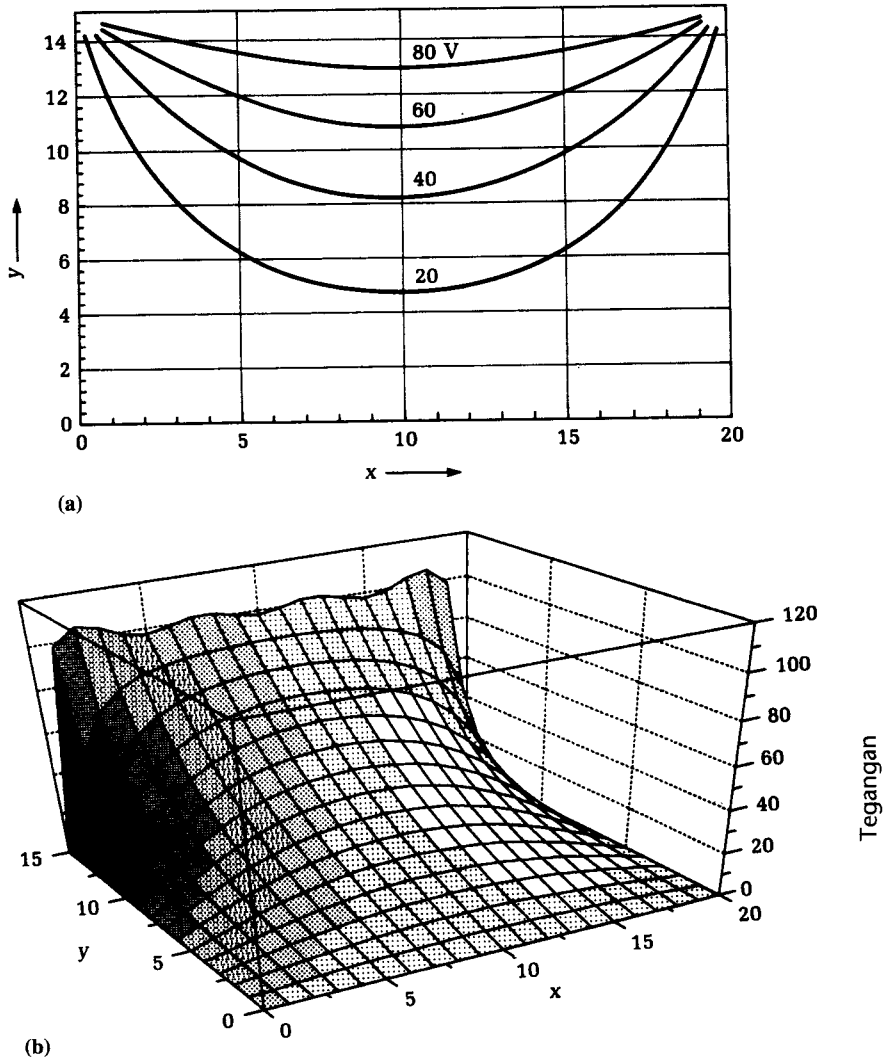
$$\Phi(x, y, c) = V_0 \quad \text{untuk} \quad 0 < y < b \quad (11.66f)$$

Misalkan $\Phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$, dan substitusikan pernyataan ini ke dalam (11.65). Kita dapatkan

$$\frac{X''}{X} = -\left(\frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z}\right) \quad (11.67)$$

Ruas kiri dari (11.67) merupakan fungsi x semata, sedangkan ruas kanannya merupakan fungsi y dan z . Walaupun demikian, kedua ruas akan sama untuk semua x , y , dan z di dalam kotak. Kesamaan ini bisa terjadi hanya jika kedua ruas menghasilkan konstanta yang sama—artinya,

Gambar 11.21 (a) Garis-garis ekipotensial di dalam pipa logam yang ditunjukkan dalam Gambar 11.19, dengan $a = 20$ satuan, $b = 15$ satuan, dan $V_0 = 100$ volt, dengan menggunakan Persamaan (11.64). (b) Plot 3-D dari distribusi potensial.



Gambar 11.22 Keping atas dari kotak logam persegi panjang dijaga pada V_0 volt sedangkan keping atau sisi lainnya ditanahkan. Tidak terdapat muatan di dalam kotak. Potensial elektrostatik dapat ditentukan dengan menggunakan metode pemisahan variabel.

$$\frac{X''}{X} = C_1 \quad (11.68a)$$

$$\frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = -C_1 \quad (11.68b)$$

Menyusun kembali (11.68b) akan menghasilkan persamaan berikut:

$$\frac{Y''}{Y} = -C_1 - \frac{Z''}{Z} \quad (11.68c)$$

Ruas kiri dari (11.68c) merupakan fungsi y semata, sedangkan ruas lainnya merupakan fungsi z semata. Walaupun demikian, kedua ruas akan sama untuk semua y dan z di dalam kotak. Kesamaan ini bisa terjadi hanya jika kedua ruas menghasilkan konstanta yang sama—artinya,

$$\frac{Y''}{Y} = C_2 \quad (11.69a)$$

$$\frac{Z''}{Z} = -(C_1 + C_2) \quad (11.69b)$$

Sekarang kita telah mengubah persamaan diferensial parsial orde kedua (11.65) ke dalam satu kelompok yang terdiri atas tiga persamaan diferensial biasa orde kedua (11.68a), (11.69a), dan (11.69b). Konstanta sebarang C_1 dan C_2 bisa positif, negatif, atau bahkan nol. Oleh karena itu, kita memiliki sembilan kemungkinan. Meskipun demikian, sebuah pengujian yang lebih dekat terhadap kondisi batas (11.66a – 11.66f) ini akan memberi kita beberapa petunjuk. Perhatikan bahwa Φ harus hilang pada $x = 0$ dan pada $x = a$. Oleh karena itu, $X(x)$ harus merupakan fungsi sinusoidal. Akibatnya, C_1 pasti merupakan konstanta negatif. Dengan alasan yang sama, kita menyimpulkan bahwa C_2 juga negatif, sehingga $Y(y)$ merupakan fungsi sinusoidal dari y . Dengan kesimpulan-kesimpulan ini, kita ambil $C_1 = -k_1^2$ dan $C_2 = k_2^2$, dan kita dapatkan hasil berikut:

$$X(x) = A_1 \sin(k_1 x) + B_1 \cos(k_1 x) \quad (11.70a)$$

$$Y(y) = A_2 \sin(k_2 y) + B_2 \cos(k_2 y) \quad (11.70b)$$

$$Z(z) = A_3 \sinh(\sqrt{k_1^2 + k_2^2} z) + B_3 \cosh(\sqrt{k_1^2 + k_2^2} z) \quad (11.70c)$$

$$\Phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \quad (11.70d)$$

Dengan menerapkan kondisi batas (11.66a) terhadap (11.70a) atau (11.70d), kita memperoleh hasil berikut

$$B_1 = 0$$

Demikian pula, dengan menerapkan (11.66c) dan (11.66e) terhadap (11.70b), (11.70c), dan (11.70d) akan diperoleh hasil berikut:

$$B_2 = 0$$

$$B_3 = 0$$

Lebih jauh lagi, untuk memenuhi (11.66b) dan (11.66d), kita harus menerapkan kondisi berikut pada k_1 dan k_2 :

$$k_1 = \frac{m\pi}{a}$$

$$k_2 = \frac{n\pi}{b}$$

di mana m dan n merupakan bilangan bulat sebarang. Pada titik ini, fungsi potensial Φ dinyatakan dalam bentuk berikut:

$$\Phi(x, y, z) = A \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sinh\left[\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} z\right] \quad (11.71)$$

Ingat bahwa (11.71) memenuhi persamaan Laplace (11.65) dan lima kondisi batas pertama yang diberikan dalam (11.66). Melalui pemeriksaan, kita ketahui bahwa (11.71) dengan bentuknya yang sekarang tidak dapat memenuhi kondisi batas keenam (11.66f). Atas alasan ini, kita akan mencoba pernyataan berikut untuk $\Phi(x, y, z)$:

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sinh\left[\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \pi z\right] \quad (11.72)$$

Ingat bahwa (11.72) masih memenuhi persamaan Laplace (11.65) dan lima kondisi batas pertama yang diberikan dalam persamaan (11.66). Kondisi batas keenam (11.66f) dapat dipenuhi jika kesamaan berikut berlaku:

$$V_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sinh\left[\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \pi c\right] \quad (11.73)$$

untuk $0 < x < a$ dan $0 < y < b$. Kita menyadari bahwa (11.73) merupakan ekspansi deret Fourier dua dimensi dari konstanta V_0 dalam daerah persegi panjang yang dibatasi oleh $0 < x < a$ dan $0 < y < b$. Kita dapat menggunakan prosedur standar penghitungan koefisien Fourier untuk mendapatkan A_{mn} yang muncul dalam (11.73). Di titik ini, kita mengalikan kedua ruas (11.73) dengan fungsi $\sin(p\pi x/a) \sin(q\pi y/b)$, di mana p dan q merupakan bilangan bulat. Kita kemudian mengintegrasikan kedua ruas terhadap daerah $0 < x < a$ dan $0 < y < b$. Akibat ortogonalitas dari $\sin(p\pi x/a)$ terhadap $\sin(m\pi x/a)$ dan $\sin(q\pi y/b)$ terhadap $\sin(n\pi y/b)$, kita dapatkan hasil berikut:

$$\int_0^a dx \int_0^b dy V_0 \sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{q\pi y}{b}\right) = A_{pq} \frac{ab}{4} \sinh\left[\sqrt{\left(\frac{p}{a}\right)^2 + \left(\frac{q}{b}\right)^2} \pi c\right] \quad (11.74)$$

Integrasi terhadap ruas kiri dari persamaan di atas dapat dilakukan secara analitis dengan hasil berikut:

$$V_0 \frac{a[1 - \cos(p\pi)]b[1 - \cos(q\pi)]}{p\pi q\pi} = A_{pq} \frac{ab}{4} \sinh\left[\sqrt{\left(\frac{p}{a}\right)^2 + \left(\frac{q}{b}\right)^2} \pi c\right]$$

Menyelesaikan dari A_{pq} , kita dapatkan:

$$A_{mn} = \begin{cases} \frac{16V_0}{mn\pi^2 \sinh[\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2} \pi c]} & \text{untuk } m = \text{ganjil}, n = \text{ganjil} \\ 0 & \text{selain itu} \end{cases}$$

Di sini kita telah menggantikan p dan q masing-masing dengan m dan n . Pernyataan akhir dari $\Phi(x, y, z)$ dinyatakan sebagai berikut:

$$\Phi(x, y, z) = \frac{16V_0}{\pi^2} \sum_{m=\text{ganjil}}^{\infty} \sum_{n=\text{ganjil}}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sinh[\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2} \pi z]}{mn \sinh[\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2} \pi c]} \quad (11.75)$$

Deret (11.75) konvergen sangat cepat terkecuali pada titik di dekat keping atas. Dengan menggunakan bentuk asimptot dari $\sinh(u)$ untuk u yang besar, kita akan memperoleh, untuk nilai m dan n yang besar, suku ke- mn :

$$\frac{1}{mn} \exp \left[-\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \pi(c-z) \right]$$

Suku di atas menunjukkan seberapa cepatnya suku ke- mn dalam (11.75) turun pada saat m dan n naik. Suku tersebut tidak memiliki suku sinus karena mereka hanya berosilasi, dengan nilai maksimum sama dengan satu.

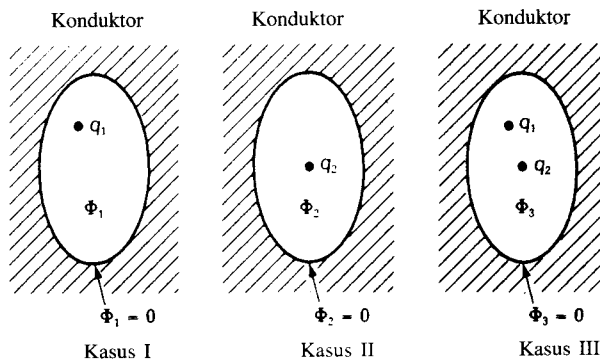
RINGKASAN

1. Potensial elektrostatik dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan Poisson (ketika rapat muatan ρ_v tidak nol) atau persamaan Laplace (ketika ρ_v bernilai nol). Penyelesaian juga harus memenuhi kondisi batas.
2. Teorema keunikan memberi jaminan kepada kita bahwa hanya ada satu penyelesaian yang dapat memenuhi persamaan Poisson (atau Laplace) dan kondisi batas.
3. Untuk sebuah muatan titik q di dekat suatu bidang konduktor sempurna, bayangannya merupakan sebuah muatan $-q$ yang terletak pada jarak yang sama pada sisi lain dari bidang tersebut.
4. Untuk sebuah muatan titik di dekat pojok suatu dinding konduktor, terdapat $2n - 1$ bayangan jika sudut dari pojok tersebut sama dengan $180^\circ/n$ dan n merupakan bilangan bulat. Jika n bukan bilangan bulat, potensial elektrostatik tidak dapat diperoleh dengan metode bayangan yang sederhana karena bayangannya akan berupa distribusi muatan yang rumit.
5. Untuk muatan garis ρ_ℓ di dekat dan sejajar dengan sebuah silinder konduktor, bayangannya merupakan muatan garis $-\rho_\ell$ di dalam silinder. Letaknya diperoleh dari penurunan [lihat Persamaan (11.36)].
6. Untuk sebuah muatan titik q di dekat suatu bola konduktor, bayangannya merupakan suatu muatan titik dalam bola. Magnitudo dan letak bayangannya diketahui [lihat Persamaan (11.43)].
7. Untuk sebuah muatan titik q yang terletak pada medium 1 di dekat suatu batas bidang antara medium 1 dan 2, dan untuk seorang pengamat di medium 1, bayangannya adalah q' yang terletak pada jarak yang sama di sisi yang lain. Untuk seorang pengamat pada medium 2, bayangan tersebut akan terlihat hanya memiliki satu buah muatan q'' yang terletak pada posisi di mana muatan sesungguhnya berada. Nilai dari q' dan q'' diperoleh dari penurunan [lihat Persamaan (11.47)].
8. Fungsi potensial dalam ruang di mana muatan sebenarnya terletak merupakan jumlah kontribusi dari muatan sesungguhnya dan bayangan atau bayangan-bayangannya di mana seolah-olah semua muatan tersebut terletak dalam ruang yang homogen.
9. Potensial elektrostatik dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan Laplace menggunakan metode pemisahan variabel ketika potensialnya merupakan sebuah fungsi dari dua atau tiga variabel koordinat. Penyelesaian tersebut biasanya berbentuk deret tak hingga.

Soal-soal

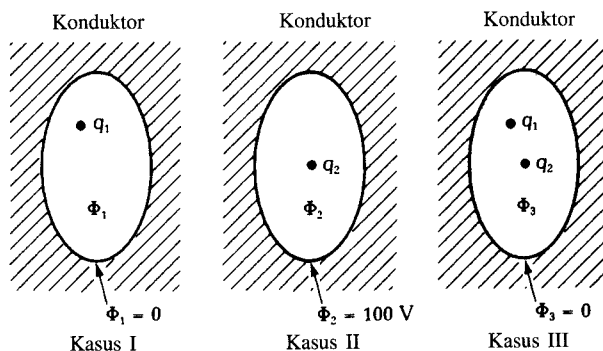
- 11.1** Perhatikan permasalahan tiga nilai-batas yang ditunjukkan dalam Gambar P11.1. Penyelesaian dari Kasus I adalah Φ_1 , dan penyelesaian dari Kasus II adalah Φ_2 . Dalam Kasus III, muatan-muatan q_1 dan q_2 merupakan muatan-muatan yang juga muncul dalam Kasus I dan II, dan muncul dalam posisi yang tepat bersesuaian. Nyatakan Φ_3 dalam Φ_1 dan Φ_2 .

Gambar P11.1.



- 11.2** Perhatikan permasalahan tiga nilai-batas yang ditunjukkan dalam Gambar P11.2. Penyelesaian Kasus I adalah Φ_1 , dan penyelesaian dari Kasus II adalah Φ_2 . Dalam Kasus III, muatan q_1 dan q_2 merupakan muatan yang juga muncul dalam Kasus I dan II, dan muncul dalam posisi yang tepat bersesuaian. Ingat perbedaan dalam kondisi batas untuk tiga kasus. Dapatkah Φ_3 dinyatakan dalam Φ_1 dan Φ_2 ? Jika bisa, carilah pernyataan tersebut. Jika tidak, jelaskan mengapa tidak.

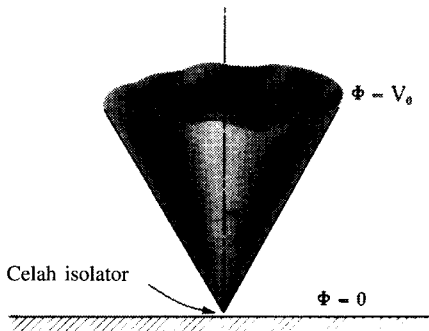
Gambar P11.2.



- 11.3** Jari-jari dalam dari konduktor sebuah saluran koaksial adalah a dan jari-jari luarnya adalah b . Potensial konduktor dalam adalah V_a dan potensial konduktor luarnya adalah V_b . Tidak terdapat rapat muatan volume antara b dan a . Mulailah dari persamaan Laplace untuk mendapatkan potensial dari saluran koaksial tersebut.
- 11.4** Dua bola konduktor konsentris masing-masing memiliki jari-jari a dan b ($b > a$). Bola luar berada pada V_b , dan bola sebelah dalam dijaga pada V_a volt. Tidak terdapat muatan ruang antara konduktor-konduktor tersebut. Mulailah dari persamaan Laplace untuk mendapatkan potensial $\Phi(r)$ untuk $b > r > a$.
- 11.5** Pada Gambar 11.5 sebuah kerucut konduktor berada pada potensial V_0 , dan sebuah celah kecil memisahkan puncaknya dari sebuah bidang konduktor. Sumbu dari kerucut

tegak lurus terhadap bidang konduktor, yang dijaga tetap pada potensial nol. Sudut kerucut adalah θ_1 . Akibat simetri soal ini dan kenyataan bahwa kondisi batas pada potensial Φ hanya melibatkan θ , Φ tidak bergantung pada r dan ϕ pada saat koordinat bola digunakan. Tentukan potensial $\Phi(\theta)$ dalam daerah $\theta_1 \leq \theta \leq 90^\circ$. Petunjuk: $\int (1/\sin \theta) d\theta = \ln(\tan \theta/2)$. Tentukan rapat muatan permukaan pada kerucut.

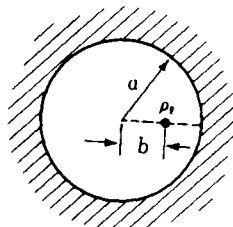
Gambar P11.5.



- 11.6 Keping atas dari kapasitor keping sejajar yang didiskusikan dalam Contoh 11.1 dijaga pada 100 V, dan keping bawah pada 80 V. Semua kondisi lain dijaga agar tidak berubah. Tentukan Φ .
- 11.7 Modelkan sebuah penyearah tabung hampa dc sebagai dua keping sejajar dengan suatu muatan ruang di antaranya, seperti ditunjukkan dalam Gambar 11.3. Misalkan jarak pemisahannya adalah 1 cm. Tentukan tegangan yang diperlukan untuk menghasilkan arus 1 A/m².
- 11.8 Tentukan distribusi muatan permukaan pada dinding konduktor vertikal dan horisontal untuk kasus dalam Contoh 11.8. Plot ρ_s untuk $z > 0$ dan $x = y = 0$. Misalkan $q = 10^{-6}$ C, dan $a = b = 1$.
- 11.9 Tentukan bayangan dari sebuah muatan titik di dekat pojok sebuah konduktor yang sama dengan yang ditunjukkan dalam Gambar 11.11 kecuali bahwa $\phi_0 = 45^\circ$.
- 11.10 Tentukan gaya elektrostatis yang bekerja pada muatan titik q pada Gambar 11.10.
- 11.11 Hitung kapasitansi per meter dari sebuah pipa berdiameter 12 inci (0,3048 m) yang terletak 6 kaki (1,83 m) di atas dan sejajar dengan tanah.
- 11.12 Contoh 11.10 menyatakan bahwa medan listrik maksimum pada permukaan silinder konduktor terletak pada titik yang paling dekat dengan tanah. Tunjukkan kesahihan pernyataan ini dengan memplot E_ρ pada permukaan sebagai fungsi dari ϕ . Gunakan data berikut: $V_0 = 100$ V, $h = 2$ m, dan $a = 1$ m.
- 11.13 Sebuah konduktor dalam saluran transmisi tenaga listrik dimuati pada 500 kV. Berapakah seharusnya jari-jari minimum dari konduktor tersebut agar dapat menghindari korona? Anggap bahwa konduktor terletak 5 meter di atas tanah dengan konfigurasi yang ditunjukkan dalam Gambar 11.13a. Anggap medan listrik kegagalan di udara 3×10^6 V/m.
- 11.14 Untuk muatan titik q yang terletak d meter dari bola konduktor yang ditanahkan pada Gambar 11.14, tentukan distribusi muatan permukaan sebagai fungsi θ .

11.15 Persamaan (11.42) menyatakan potensial akibat sebuah muatan titik dalam keberadaan suatu bola konduktor yang *ditanahkan*. Persamaan (11.44) memberikan potensial akibat sebuah muatan titik dalam keberadaan sebuah bola yang *terisolasi* tanpa membawa muatan netto. Dari hasil-hasil ini, tentukan potensial akibat sebuah muatan titik q , sejauh d meter dari suatu bola konduktor terisolasi yang membawa suatu muatan netto q_0 .

11.16 Sebuah muatan garis ρ_ℓ terletak di dalam sebuah terowongan berjari-jari a , seperti ditunjukkan dalam Gambar P11.16. Ingat bahwa muatan garis tersebut terletak b meter dari pusat. Tentukan fungsi potensial dalam terowongan. Petunjuk: Ini adalah soal pelengkap untuk soal yang ditunjukkan pada Gambar 11.12.

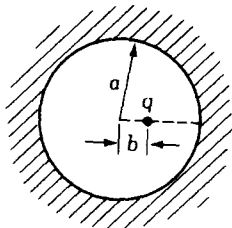


Konduktor ($\Phi = 0$)

Gambar P11.16

11.17 Hitung gaya per meter yang beraksi pada muatan garis dalam terowongan yang ditunjukkan pada Gambar P11.16.

11.18 Sebuah muatan titik q terletak di dalam suatu rongga dari sebuah konduktor berbentuk bola, seperti ditunjukkan pada Gambar P11.18. Jari-jari rongga tersebut adalah a dan rongga terisi dengan udara.



Konduktor ($\Phi = 0$)

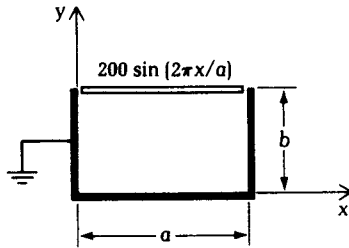
Gambar P11.18

- Tentukan potensial Φ dalam rongga pada saat $b = 0$.
- Tentukan rapat muatan permukaan dari dinding rongga pada saat $b = 0$.
- Tentukan potensial Φ dalam rongga pada saat $b = a/2$.
- Tentukan rapat muatan permukaan dari dinding rongga pada saat $b = a/2$.

11.19 Hitung gaya elektrostatik pada muatan titik di dalam rongga yang ditunjukkan dalam Gambar P11.18.

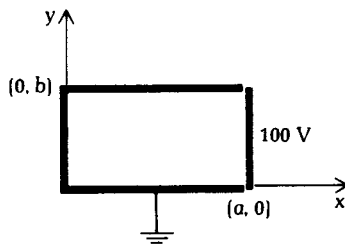
11.20 Gambarkanlah garis-garis E akibat sebuah muatan titik di dekat antarmuka dari dua medium dielektrik. Keadaannya sama dengan yang ditunjukkan pada Gambar 11.17, terkecuali bahwa $\epsilon_2 = 0,5\epsilon_1$.

- 11.21** Sebuah bak konduktor berbentuk persegi panjang dengan lebar a dan tinggi b dijaga pada potensial nol, seperti ditunjukkan pada Gambar P11.21. Potensial pada keping atas, yang menutupi bak adalah $\Phi(x, b) = 200 \sin(2\pi x/a)$ volt. Tentukan potensial Φ dalam bak. Tidak ada muatan volume dalam bak.



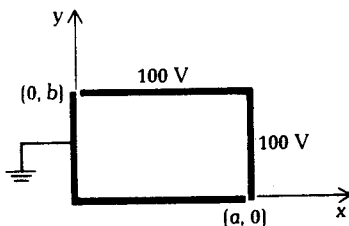
Gambar P11.21

- 11.22** Tiga sisi dari sebuah pipa konduktor persegi panjang ditanahkan, sedangkan sisi keempatnya dijaga pada 100 V, seperti ditunjukkan pada Gambar P11.22. Tentukan potensial pada pipa tersebut. Tidak ada muatan volume dalam pipa.



Gambar P11.22

- 11.23** Potensial-potensial batas dari sebuah pipa konduktor persegi panjang ditunjukkan pada Gambar P11.23. Tentukan potensial dalam pipa tersebut. Tidak terdapat muatan volume dalam pipa.



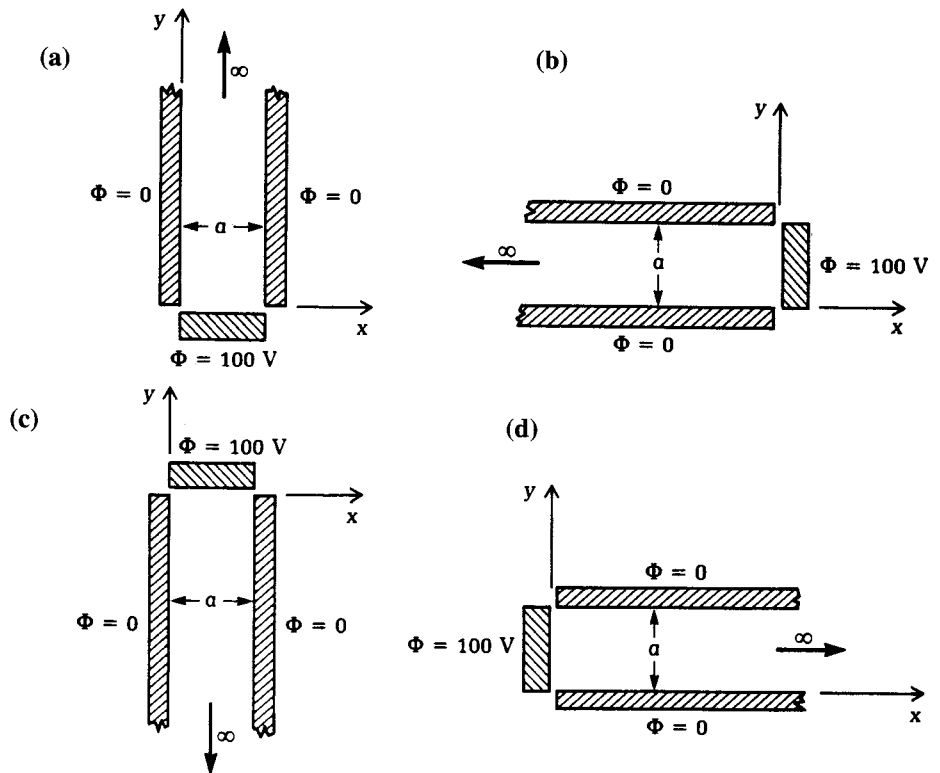
Gambar P11.23

- 11.24** Perhatikan permasalahan empat nilai batas yang ditunjukkan pada Gambar P11.24. Satu di antaranya memiliki penyelesaian berikut:

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

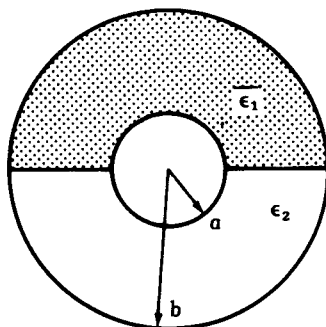
Carilah kasus yang memiliki penyelesaian di atas dan tentukan konstanta C_n . Tuliskan secara eksplisit dua suku pertama yang tidak nol dari $\Phi(x, y)$.

Gambar P11.24



11.25 Sebuah kapasitor bola diisi dengan bahan dielektrik ϵ_1 dalam separuh ruangnya dan dengan bahan lain ϵ_2 dalam ruang lainnya, seperti yang ditunjukkan pada Gambar P11.25.

- Tentukan fungsi potensial $\Phi(r)$ dalam daerah $a < r < b$. Potensial pada $r = a$ adalah V_0 dan bernilai nol pada $r = b$. Petunjuk: Potensial memenuhi persamaan Laplace (11.2) dan dapat diasumsikan bahwa ini merupakan fungsi r semata.
- Tentukan medan listrik dalam daerah $a < r < b$.
- Tentukan medan \mathbf{D} dalam daerah $a < r < b$. Petunjuk: Medan \mathbf{D} dalam medium 1 berbeda dengan yang ada dalam medium 2. Catatan: kondisi batas pada medan \mathbf{E} tangensial dan pada medan \mathbf{D} normal dipenuhi dengan menggunakan pendekatan yang disarankan.
- Tentukan muatan total pada konduktor dalam dan kapasitansi dari kapasitor.



Gambar P11.25

12 ARUS SEARAH

Pada Bab 10 dan 11 telah dipelajari medan elektrostatik yang diakibatkan oleh muatan-muatan listrik stasioner. Pada bab ini akan dibahas aliran tunak muatan-muatan listrik yang membentuk **arus searah**, atau **DC** (direct current). Arus ini harus dibedakan dari **arus bolak balik**, atau **AC** (alternating current), yang berubah-ubah secara periodik menurut waktu. Beberapa buku pegangan lain juga menyebut arus searah sebagai arus stasioner atau arus tunak.

Hukum Ohm menghubungkan arus J , baik DC maupun AC, dengan medan listrik E .

$$J = \sigma E \quad (12.1)$$

Persamaan kontinuitas dalam limit statik adalah

$$\nabla \cdot J = 0 \quad (12.2)$$

dan persamaan elektrostatiknya adalah

$$\nabla \times E = 0 \quad (12.3)$$

Kita akan mempelajari asal-usul hukum Ohm, mendalami analogi antara arus searah dan medan elektrostatik, dan mengulang kembali konsep konduktansi dan resistansi yang telah dipelajari dalam teori rangkaian.

12.1 HUKUM OHM

Ada dua macam arus listrik: arus konveksi dan arus konduksi. Arus konveksi timbul dari perpindahan partikel-partikel bermuatan, seperti berkas elektron dalam CRT. Arus konduksi menyatakan gerak hanyut dari pembawa muatan yang melalui suatu medium. Sebagai contoh, pada suatu logam, ion-ion positif yang lebih berat akan menetap pada struktur kisi atomnya, sementara elektron-elektron bebasnya, yang mengalir dari satu atom ke atom lainnya di bawah pengaruh medan listrik yang ada, akan membentuk arus listrik.

Dalam medium yang linear, rapat arus konduksi J dan medan listrik E mengikuti hukum Ohm:

$J = \sigma E$

 (Hukum Ohm)

di mana σ adalah **konduktivitas** medium dalam mho per meter (atau siemen per meter). Kebalikan dari konduktivitas dinamakan **resistivitas** $\rho_r = 1/\sigma$, yang dinyatakan dalam ohm-meter.

Tabel 12.1 memuat resistivitas dan konduktivitas sejumlah bahan pada suhu kamar. Bahan-bahan yang terletak pada bagian atas tabel, seperti aluminium, tembaga, emas, nikel, dan perak, adalah **konduktor yang baik**. Bahan-bahan yang disebut pada bagian bawah tabel, seperti amber, gelas, minyak bumi, dan kuarsa, adalah **isolator yang baik**. Bahan-bahan di tengah, seperti germanium dan silikon, tidak tergolong dalam konduktor yang baik maupun isolator yang baik. Mereka ini disebut **semikonduktor**.

Tabel 12.1 Resistivitas dan Konduktivitas Bahan.*

Bahan	$\rho_r(\Omega\text{-m})$	$\sigma(\text{mho/m})$
Aluminium	$2,83 \times 10^{-8}$	$3,53 \times 10^7$
Tembaga	$1,69 \times 10^{-8}$	$5,92 \times 10^7$
Emas	$2,44 \times 10^{-8}$	$4,10 \times 10^7$
Nikel	$7,24 \times 10^{-8}$	$1,38 \times 10^7$
Perak	$1,62 \times 10^{-8}$	$6,17 \times 10^7$
Germanium	0,45	2,20
Silikon	640,00	$1,56 \times 10^{-3}$
Air laut (rerata)	0,25	4,00
Amber	$5,00 \times 10^{14}$	$2,00 \times 10^{-15}$
Gelas	$10^{10}\text{--}10^{14}$	$10^{-10}\text{--}10^{-14}$
Minyak Bumi	10^{14}	10^{-14}
Quartz	$7,50 \times 10^{17}$	$1,30 \times 10^{-18}$

*Data dari American Institute of Physics Handbook (New York: McGraw-Hill, 1957).

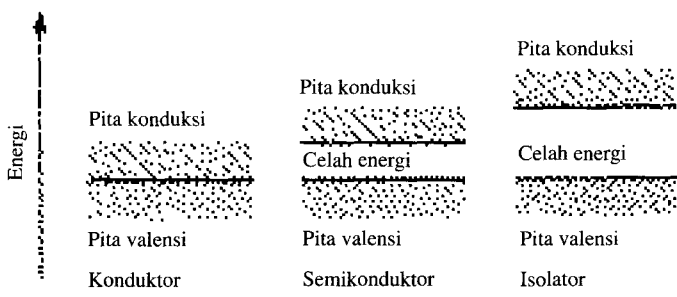
Seperti yang sudah kita lihat pada model atom Bohr, energi total sebuah elektron adalah jumlah energi kinetik dan energi potensialnya. Sebuah bahan akan menjadi konduktif apabila energi dari beberapa elektronnya begitu tinggi sehingga tidak terikat pada atom tertentu manapun. Energi elektron-elektron ini dikatakan berada dalam **pita konduksi** bahan. Elektron-elektron akan terikat pada atom apabila energinya begitu rendah sehingga konduksi tidak dapat terjadi. Energi elektron-elektron ini dikatakan berada dalam **pita valensi** bahan. Seperti terlihat dalam Gambar 12.1, pita valensi dan pita konduksi berukuran sempit untuk konduktor bagus dan lebar untuk isolator bagus, sementara celah untuk semikonduktor terletak di antara kedua kondisi ekstrim ini.

Proses konduksi konduktor logam dapat dinyatakan secara kuantitatif sebagai

$$J = -\rho_e \mu_e E = \sigma E$$

di mana ρ_e adalah rapat muatan elektron bebas dan μ_e adalah mobilitas elektron dalam logam. Untuk tembaga, dengan $\rho_e \sim -1,8 \cdot 10^{10} \text{C/m}^3$ dan $\mu_e = 3,2 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{V}\cdot\text{s}$,

Gambar 12.1 Celah energi di antara pita konduksi dan pita valensi pada konduktor, semikonduktor, dan isolator.



konduktivitasnya adalah $\sigma = -\rho_e \mu_e = 5,8 \cdot 10^7$ mho/m. Untuk semikonduktor, konduktivitasnya merupakan fungsi konsentrasi dan mobilitas dari lubang dan elektron. Kita memiliki

$$\sigma = -\rho_e \mu_e + \rho_h \mu_h \quad (12.4)$$

di mana ρ_h dan μ_h , secara berturut-turut adalah konsentrasi dan mobilitas lubang. Untuk silikon, $\mu_e \sim 0,12$, $\mu_h = 0,025$, dan $\rho_h = -\rho_e = 0,011$ C/m³, yang menghasilkan $\sigma \sim 1,6 \times 10^{-3}$ mho/m.

Pada suhu kamar, resistivitas ρ , naik hampir secara linear terhadap suhu. Pada suhu yang sangat rendah, resistivitas beberapa logam, seperti aluminium di bawah 1,14 K, jatuh secara drastis menjadi nol, dan logam ini menjadi superkonduktor. Beberapa bahan keramik ternyata akan menjadi superkonduktor pada 90 K atau suhu yang lebih tinggi lagi (lihat Subbab 3.4). Meskipun konduktivitas konduktor logam akan berkurang seiring berkurangnya suhu, konduktivitas semikonduktor akan naik seiring naiknya suhu karena, ketika suhu naik, mobilitasnya akan turun akan tetapi rapat muatan semikonduktor akan naik sangat cepat.

Hukum Joule

Elektron-elektron konduksi di dalam sebuah konduktor bergerak di bawah pengaruh medan listrik sesuai dengan hukum gaya Lorentz. Misalkan rapat muatan adalah ρ_e . Maka gaya per satuan volume adalah $\mathbf{f} = \rho_e \mathbf{E}$ newton per meter kubik. Dalam pengaruh gaya ini elektron-elektron tersebut akan dipercepat. Namun demikian, elektron-elektron ini akan diganggu oleh tumbukan konstan dengan atom-atom konduktor dan akan mencapai kecepatan hanyut konstan rata-rata \mathbf{v} . Kerja yang dilakukan untuk menggerakkan semua muatan di dalam suatu volume kecil dV selama interval waktu dt dinyatakan oleh

$$dW_e = \rho_e \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} dV dt$$

Kerja ini diubah menjadi panas. Daya per satuan volume yang terdisipasi adalah $P_d = dW_e / (dt dV) = \rho_e \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$. Karena $\mathbf{J} = \rho_e \mathbf{v}$, diperoleh

$$P_d = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$$

(hukum Joule; rugi ohmik per volume)

(12.5)

Persamaan ini dikenal sebagai bentuk titik dari **hukum Joule**. Bentuk integral hukum Joule diperoleh dengan mengintegralkan P_d atas volume V dari konduktor yang membawa arus.

Hukum Arus Kirchhoff

Mengintegrasi (12.2) terhadap permukaan tertutup (sebarang) S dan menggunakan teorema divergensi akan, menghasilkan

$$\oiint_S \mathbf{J} \cdot \hat{n} ds = 0 \quad (12.6)$$

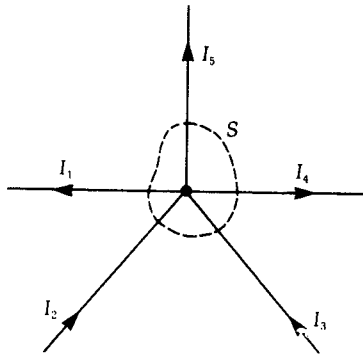
yang menyatakan bahwa arus total yang mengalir dari sebuah volume atau sebuah percabangan selalu sama dengan nol.

Dengan menerapkan (12.6) pada sebuah simpul dalam rangkaian listrik yang ditunjukkan dalam Gambar 12.2, kita dapatkan

$$I_1 - I_2 - I_3 + I_4 + I_5 = 0$$

yang dapat ditulis dalam bentuk

$$\sum_n I_n = 0$$



Gambar 12.2 Hukum Arus Kirchoff (HAK) diturunkan dari persamaan-persamaan untuk arus searah. HAK menyatakan bahwa jumlah semua arus yang keluar dari sebuah percabangan sama dengan nol.

Rumus ini mewakili satu dari postulat-postulat dasar dalam teori rangkaian—yaitu hukum arus Kirchhoff (HAK).

Konduktansi

Perhatikan sebuah silinder konduktif dengan panjang ℓ dan luas penampang melintang A , seperti terlihat dalam Gambar 12.3. Misalkan sebuah tegangan V akan membangkitkan medan listrik seragam di sepanjang arah aksial. Magnitudo medan listrik ini adalah

$$E = \frac{V}{\ell}$$

Arus total yang mengalir dari ujung satu ke ujung yang lain adalah

$$I = AJ = \sigma AE$$

Kesamaan ini mengikuti hukum Ohm (12.1)

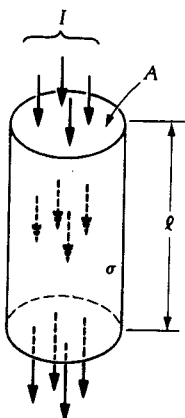
Konduktansi G didefinisikan sebagai perbandingan arus terhadap tegangan—yaitu,

$$G = \frac{I}{V} \quad (12.7)$$

Untuk silinder pada Gambar 12.3,

$$G = \frac{I}{V} = \frac{\sigma A}{\ell}$$

Satuan untuk G adalah mho (atau siemen).



Gambar 12.3 Sebuah silinder konduktor dengan luas penampang melintang A dan panjang ℓ memiliki konduktansi $\sigma A/\ell$ mho, di mana σ adalah konduktivitas bahan silinder.

Resistivitas dan Resistansi

Resistivitas ρ_r adalah kebalikan dari konduktivitas σ . Demikian pula, resistansi R adalah kebalikan konduktansi G . Satuan untuk ρ_r dan R masing-masing adalah ohm-meter dan ohm.

$$\rho_r = \frac{1}{\sigma} \text{ ohm-meter}$$

$$R = \frac{1}{G} \text{ ohm}$$

Untuk silinder dengan panjang terhingga pada Gambar 12.3,

$$R = \frac{\rho_r \ell}{A}$$

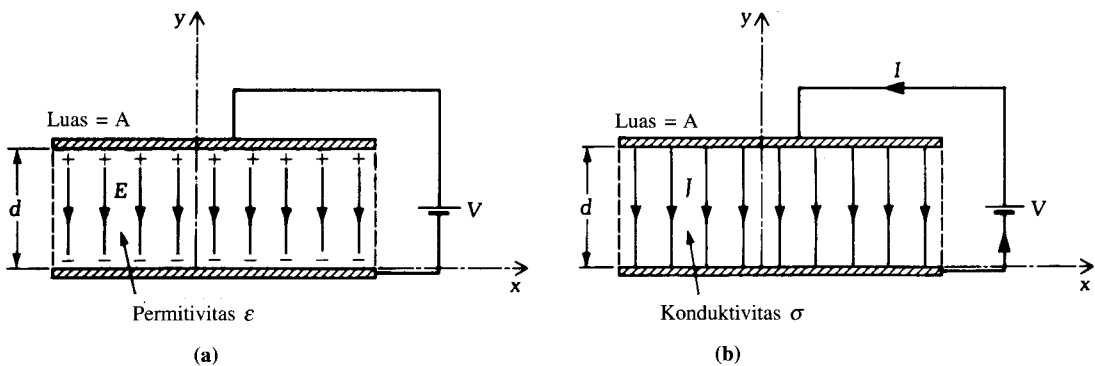
12.2 ANALOGI ANTARA ARUS SEARAH DAN MEDAN ELEKTROSTATIK

Perhatikan dua set keping sejajar identik seperti pada Gambar 12.4a dan 12.4b. Luas masing-masing keping disebut A , dan jarak pemisah kedua keping disebut d . Pada Gambar 12.4a, daerah pada keping sejajar diisi bahan dielektrik dengan permitivitas ϵ . Beda potensial di antara kedua keping tersebut adalah V . Misalkan Q adalah muatan total pada masing-masing keping dan C adalah kapasitansi keping-keping sejajar ini. Fungsi potensial $\Phi(y)$ adalah

$$\Phi(y) = V \frac{y}{d} \quad (12.8)$$

akibatnya,

Gambar 12.4 Analogi antara (a) permasalahan medan elektrostatik dan (b) permasalahan arus searah



$$E = -\hat{y} \frac{V}{d} \quad (12.9)$$

$$\rho_s = \epsilon E = \frac{\epsilon V}{d} \quad (12.10)$$

$$Q = \rho_s A = \frac{\epsilon V A}{d} \quad (12.11)$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon A}{d} \quad (12.12)$$

Keping sejajar yang ditunjukkan dalam Gambar 12.4b diisi bahan konduktor dengan konduktivitas σ . V menyatakan beda potensial di antara kedua keping. Misal I adalah arus total dan G adalah konduktansi. Kita akan memiliki persamaan-persamaan berikut:

$$\Phi(y) = V \frac{y}{d} \quad (12.13)$$

$$E = -\hat{y} \frac{V}{d} \quad (12.14)$$

$$J = \sigma E = -\hat{y} \frac{\sigma V}{d} \quad (12.15)$$

$$I = JA = \frac{\sigma VA}{d} \quad (12.16)$$

$$G = \frac{I}{V} = \frac{\sigma A}{d} \quad (12.17)$$

Pengujian persamaan (12.8)–(12.17) secara seksama mengungkap adanya analogi di antara permasalahan medan elektrostatik dan permasalahan arus searah yang akan ditunjukkan dalam Tabel 12.2.

Tabel 12.2 Prinsip Analogi

Permasalahan medan elektrostatik	Permasalahan arus searah
Φ	Φ
$E = -\nabla\Phi$	$E = -\nabla\Phi$
ϵ	σ
Q (pada konduktor)	I (meninggalkan konduktor)
ρ_s (pada permukaan konduktor)	J_n (meninggalkan permukaan konduktor)
C	G

Kita lihat bahwa jika geometri suatu permasalahan medan elektrostatik sama dengan yang terjadi pada permasalahan arus searah, seperti diperlihatkan dalam permasalahan serupa yang ditunjukkan dalam Gambar 12.4a dan 12.4b, maka pernyataan fungsi potensial dan pernyataan medan listrik yang berhubungan dengan permasalahan arus searah akan identik dengan pernyataan untuk permasalahan elektrostatik di mana ϵ diganti dengan σ dan Q dengan I . Di samping itu, kapasitansi pada permasalahan medan elektrostatik akan menjadi konduktansi dalam permasalahan arus searah.

Seperti pada elektrostatik, permasalahan arus searah dapat dituangkan ke dalam bentuk persamaan Laplace. Dari (12.3), kita memiliki

$$E = -\nabla\Phi \quad (12.18)$$

di mana Φ adalah fungsi potensial. Melakukan substitusi dalam (12.2) dan menggunakan (12.1), akan menghasilkan persamaan Laplace

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad (12.19)$$

Begitu kita selesaikan (12.19) untuk Φ yang mengalami kondisi-kondisi batas yang tepat, kita dapat memperoleh penyelesaian untuk E dari (12.18) dan arus $J = \sigma E$ dari (12.1).

Namun demikian, dalam elektrostatik, kita memiliki persamaan Poisson, yang tidak memiliki analogi dalam permasalahan arus searah karena analogi untuk $J = \sigma E$ adalah $D = \epsilon E$. Dalam elektrostatik, kita memiliki

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$$

sedangkan dalam permasalahan arus searah, kita memiliki

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

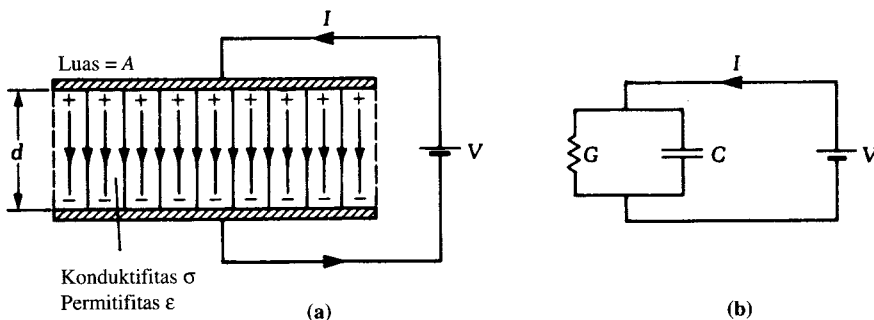
Sebuah sumber arus titik yang mirip dengan muatan titik dalam elektrostatik tidak ada. Kenyataan ini tidak akan mengurangi kemampuan analogi sebagai alat bantu untuk menyelesaikan permasalahan arus searah jika kita mengasumsikan bahwa demi pertimbangan praktis arus titik memang ada. Kita akan menjabarkan kesimpulan ini dengan aplikasi dan contoh berikut.

Contoh 12.1

Contoh ini menunjukkan model rangkaian kapasitor yang memiliki isolator yang tidak sempurna; artinya, bahan dielektrik dalam kapasitor memiliki konduktivitas tidak nol.

Tentukan konduktansi dan kapasitansi kapasitor keping sejajar yang berisi bahan yang memiliki permitivitas ϵ dan konduktivitas σ , seperti yang ditunjukkan dalam Gambar 12.5a.

Gambar 12.5 (a) Keping paralel berisi bahan dengan karakteristik σ dan ϵ . (b) Rangkaian ganti



Solusi

Kapasitansi C dinyatakan oleh (12.12) dan konduktansinya oleh (12.17).

$$C = \frac{\epsilon A}{d}$$

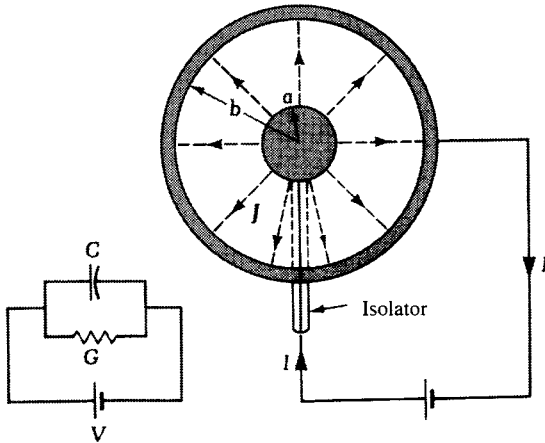
$$G = \frac{\sigma A}{d}$$

Gambar 12.5b menunjukkan rangkaian ganti untuk sistem ini. Ingat bahwa sistem yang ditunjukkan dalam Gambar 12.5a ini memiliki dua sifat listrik: (a) menyimpan energi elektrostatik, dan (b) melepas daya listrik. Model paling sederhana dari sistem ini adalah rangkaian ganti kapasitor akan sejajar dengan sebuah konduktor, di mana kapasitor dan resistansi dinyatakan oleh persamaan di atas. Kapasitor menyimpan energi, dan konduktor melepas daya. Keping ini berada dalam kondisi paralel dan tidak dalam kondisi seri, jika kita melepas baterai V dari sistem tersebut, muatan-muatan dalam keping-keping tersebut cenderung saling menetralkan satu sama lain. Akibatnya, seperti yang diperkirakan dalam rangkaian ganti, terjadi aliran arus transien melalui bahan setelah baterai dilepas. Bab 15 akan membahas penurunan yang lebih teliti dari rangkaian ganti ini dengan menggunakan elektrokuasistatik (lihat Contoh 15.1).

Contoh 12.2 *Contoh ini menunjukkan bahwa konduktansi atau resistansi di antara dua elektroda berhubungan dengan kapasitansi di antara kedua elektroda tersebut.*

Tentukan resistansi di antara dua elektroda bola konsentris masing-masing beradius a dan b , jika bahan di antara elektroda memiliki permitivitas ϵ dan konduktivitas σ . Tentukan rangkaian ganti sistem ini, yang ditunjukkan pada Gambar 12.6.

Gambar 12.6 Arus mengalir dari bola konduktor dalam menuju kulit konduktor luar sebuah kawat isolator tipis akan mengumpulkan arus melewati kulit.



Solusi

Kita dapat menganggap bola dalam sebagai sumber dengan arus yang mengalir secara radial menuju elektroda luar. Sebuah kabel isolator, tipis akan mengalirkan arus ke elektroda dalam, seperti terlihat dalam Gambar 12.6. Sistem ini memenuhi persamaan kontinuitas (12.2). Dalam praktek, pengaruh dari jalur balik isolator yang tipis ini dapat diabaikan karena tidak begitu mempengaruhi resistansi maupun kapasitansi sistem.

Kapasitansi sistem ini telah diperoleh. Berdasarkan hasil pada (10.43), Subbab 10.3

$$C = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

Dari prinsip analogi (Tabel 12.2), kita peroleh G dari persamaan di atas dengan substitusi sederhana:

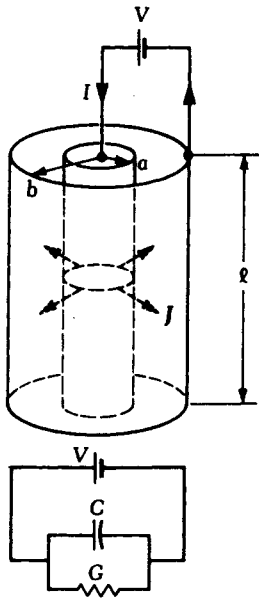
$$G = \frac{4\pi\sigma}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

Akibatnya,

$$R = \frac{1}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

Contoh 12.3 *Model rangkaian untuk kapasitor keping sejajar dengan isolator tak sempurna yang telah dibahas dalam Contoh 12.1 juga dapat digunakan untuk kapasitor koaksial, seperti yang ditunjukkan dalam contoh ini.*

Sebuah kawat koaksial beradius dalam a dan beradius luar b diisi dengan bahan yang memiliki permitivitas ϵ dan konduktivitas σ , seperti terlihat dalam Gambar 12.7. Tentukan rangkaian ganti sistem ini ketika ia dihubungkan ke baterai dc. Anggap $\ell \gg b > a$.



Gambar 12.7 Konduktansi dan resistansi untuk sebuah potongan kawat koaksial dapat dihitung dengan menggunakan prinsip analogi.

Solusi

Karena ℓ jauh lebih besar daripada dimensi penampang melintang kawat, medan elektostatiknya kira-kira sama dengan kawat yang panjangnya tak terhingga. Baik medan listrik maupun arus mempunyai arah radial. Dari (10.45), Kapasitansi per satuan panjang untuk suatu kawat tak terhingga dengan luas penampang melintang yang sama dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{C}{\ell} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)}$$

Maka, kapasitansi total C akan dinyatakan oleh

$$C = \frac{2\pi\epsilon\ell}{\ln(b/a)} \text{ farad}$$

Dengan menggunakan prinsip analogi, kita memperoleh

$$G = \frac{2\pi\sigma\ell}{\ln(b/a)}$$

dan

$$R = \frac{\ln(b/a)}{2\pi\sigma\ell} \text{ ohm}$$

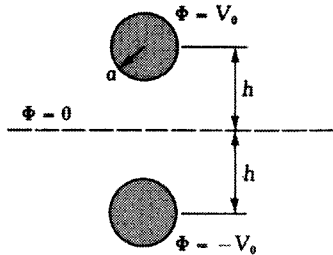
Gambar 12.7 memperlihatkan rangkaian gantinya.

Contoh 12.4 Kapasitansi di antara pipa konduktor di dekat tanah diperoleh dalam Bab 11 dengan menggunakan teorema bayangan. Hasilnya dapat digunakan untuk menentukan konduktansi di antara dua pipa yang ditanam dalam suatu medium konduktor, seperti dalam contoh ini.

Dua pipa baja identik, masing-masing sepanjang 1 km, ditanam dalam tanah. Diameter pipa baja ini 12 inci. (0,3048 m), dan pipa-pipa ini terpisah sejauh 100 m. Konduktivitas tanah 0,01 mho/m. Berapakah resistansi di antara kedua pipa?

Solusi

Kita akan menggunakan prinsip analogi untuk menyelesaikan permasalahan ini. Permasalahan yang analog dengan hal ini adalah permasalahan elektrostatik yang dibahas dalam Contoh 11.9, di mana kita menghitung kapasitansi di antara pipa dan tanah konduktor sempurna. Kondisi ini dapat sedikit diubah agar sesuai dengan kasus kita kali ini. Rujuk Gambar 12.8, di mana dua konduktor silindris terpisah sejauh $2h$ dan dimuati pada V_0 dan $-V_0$. Terlihat jelas bahwa potensial pada bidang di tengah-tengah kedua pipa tersebut adalah nol. Maka, fungsi potensial dalam paruh ruang atas pada Gambar 12.8 akan identik fungsi potensial pada Contoh 11.9 dan Gambar 11.13.



Gambar 12.8 Dua konduktor silindris terpisah sejauh $2h$. Potensialnya akan nol pada bidang netral. Problem ini mirip dengan problem pada Gambar 11.13. Resistansi di antara dua silinder konduktor ini diselesaikan dengan prinsip analogi.

Dalam sistem yang ditunjukkan pada Gambar 12.8, beda potensial di antara kedua konduktor adalah $2V_0$, sedangkan dalam Gambar 11.13 beda potensialnya hanya sebesar V_0 . Muatan yang dibawa oleh masing-masing konduktor dianggap sama. Akibatnya, kapasitansi sistem pada Gambar 12.8 akan menjadi satu setengah kali dari yang ada pada Gambar 11.13 karena definisi kapasitansi:

$$C = \frac{Q}{V}$$

Jadi, kapasitansi untuk kasus ini adalah setengah dari yang dinyatakan dalam (11.40)

$$C = \frac{\pi\epsilon}{\cosh^{-1}(h/a)} (\text{F/m}) \quad (12.20)$$

Akibatnya, kapasitansi total sepasang pipa baja dengan panjang 1 meter adalah sebagai berikut:

$$C_t = C_\ell = \frac{\pi\epsilon\ell}{\cosh^{-1}(h/a)} (\text{F})$$

Dengan menggunakan prinsip analogi, konduktansi total di antara pipa baja yang ditanam dalam sebuah medium berkonduktivitas σ adalah sebagai berikut:

$$G_t = \frac{\pi\sigma\ell}{\cosh^{-1}(h/a)} (\text{mho})$$

Resistansi total yang dihasilkan adalah

$$R_t = \frac{\cosh^{-1}(h/a)}{\pi\sigma\ell} (\text{ohm}) \quad (12.21)$$

Untuk $h = 50$ m, $a = 0,1524$ m.

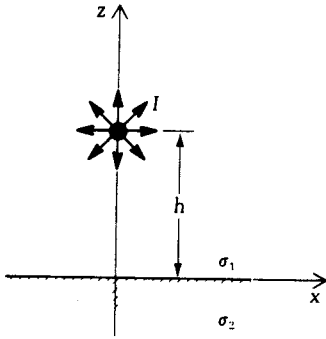
$$\cosh^{-1}\left(\frac{h}{a}\right) \cong \ln\left(\frac{2h}{a}\right) = 6,49$$

Oleh karena itu,

$$R_t = \frac{6,49}{\pi \times 0,01 \times 1000} = 0,21 \, \Omega$$

Contoh 12.5 Sebagaimana akan ditunjukkan dalam contoh ini, kita juga dapat menggunakan teorema bayangan untuk mencari fungsi potensial yang diakibatkan oleh adanya sumber arus di dekat batas dua medium konduktor. Teorema ini analog dengan teorema untuk muatan-muatan titik dalam dua medium dielektrik.

Sebuah elektroda mengeluarkan arus konstan I ampere. Elektroda ini terletak di dekat batas bidang dari dua medium dengan konduktivitas, σ_1 dan σ_2 , seperti terlihat pada Gambar 12.9. Tentukan fungsi potensial di dalam kedua medium. Gambarlah garis-garis arus dengan asumsi $\sigma_2 = 2\sigma_1$.



Gambar 12.9 Sumber arus menghasilkan I ampere di dekat batas bidang di antara dua media yang masing-masing memiliki konduktivitas, σ_1 dan σ_2 .

Solusi

Keadaan sekarang ini analog dengan yang terjadi pada Gambar 11.15. Dengan prinsip analogi, kita memperoleh fungsi potensial dari (11.45):

$$\Phi_1(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \left[\frac{I}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - h)^2}} + \frac{I'}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + h)^2}} \right] \quad \text{untuk } z \geq 0 \quad (12.22a)$$

$$\Phi_2(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\sigma_2} \frac{I''}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - h)^2}} \quad \text{untuk } z \leq 0 \quad (12.22b)$$

di mana

$$I' = I \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \right) \quad (12.23a)$$

$$I'' = I \left(\frac{2\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \right) \quad (12.23b)$$

Aliran arus akan mengikuti garis-garis medan listrik, yang ditunjukkan pada Gambar 11.17. Kita tidak perlu menggambar ulang karena hasilnya akan identik dengan Gambar 11.17 terkecuali bahwa q , σ_1 , dan σ_2 masing-masing diganti dengan I , σ_1 , dan σ_2 .

Logging Sumur

Setelah sebuah sumur dibor sampai suatu kedalaman tertentu untuk mencari cadangan minyak, pengeboran untuk sementara dihentikan untuk memberi kesempatan sumur untuk di-"log". Logging sumur adalah teknik penurunan peralatan-peralatan sumur (dinamakan "sonde") untuk mendeteksi apakah sumur telah mencapai lapisan bumi yang berisi minyak. Jika lapisan ini terdeteksi, maka dari pembacaan tanggapan beberapa sonde, analisis log-sumur dapat memperkirakan berapa banyak minyak di dalam reservoir.

Alat logging yang biasa digunakan adalah sonde yang mengukur resistivitas formasi di sekeliling sumur. Informasi tentang resistivitas mengundang perhatian para ahli karena struktur geologi yang diduga mengandung cadangan minyak biasanya terdiri dari batu-batu berpori yang mirip dengan batu pasir. Fluida yang mengisi ruang pori-pori tersebut biasanya air asin, yang konduktif, atau minyak, yang sangat resistif (lihat Tabel 12.1). Jadi, lapisan berisi minyak yang terjepit di antara dua lapisan pekat berisi air asin akan terlihat memiliki resistivitas yang jauh lebih tinggi dan akan terbaca ketika sonde resistivitas bergerak melintasi deposit minyak.

Di sini akan dibahas prinsip kerja dasar dari suatu sonde resistivitas logging sumur. Gambar 12.10 menunjukkan arus searah I konstan yang sedang dialirkan dari permukaan tanah menuju elektroda A melalui kabel isolator.

Seluruh tanah bertindak sebagai elektroda arus balik. Untuk menyederhanakan permasalahan, kita mengasumsikan bahwa konduktivitas fluida yang ditemukan di dalam sumur sama dengan yang ada di formasi sekelilingnya. Jadi, kita dapat menganggap elektroda arus terletak dalam media homogen yang luasnya tak terhingga. Fungsi potensial di mana pun pada formasi tersebut dinyatakan sebagai berikut:

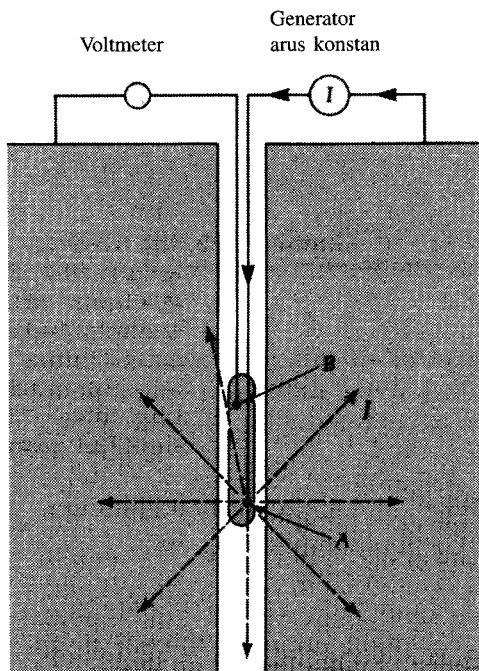
$$\Phi(r) = \frac{I}{4\pi\sigma r} \quad (12.24)$$

di mana r berada dalam sistem koordinat bola dan σ adalah konduktivitas formasi. Ingat bahwa (12.24) diperoleh dengan prinsip analogi. Kasus analognya adalah fungsi potensial sebuah muatan titik Q yang terletak di dalam medium dielektrik homogen dengan permitivitas ϵ .

Elektroda tegangan B ditempatkan d meter dari A untuk mengukur potensial di titik itu. Potensial berbanding lurus dengan aliran arus dalam formasi. Karena B terpisah dari A sejauh d

$$\Phi_B = \frac{I}{4\pi\sigma d} \quad (12.25)$$

Tegangan ini diukur dan dicatat di permukaan. Karena Φ_B , I , dan d sekarang sudah diketahui besarnya, konduktivitas dapat dinyatakan:



Gambar 12.10 Logging resistivitas. Alat untuk mengukur resistivitas formasi geologi untuk melihat apakah formasi ini mengandung minyak.

$$\sigma = \frac{I}{4\pi d \Phi_B}$$

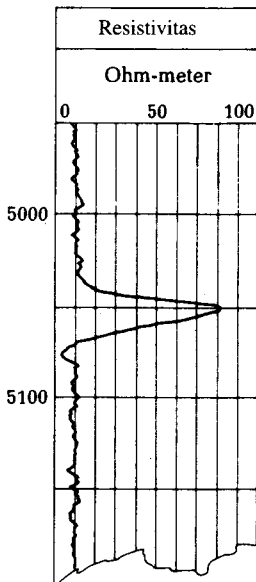
atau, secara ekivalen, resistivitasnya:

$$\rho_r = (4\pi d) \frac{\Phi_B}{I} \quad (12.26)$$

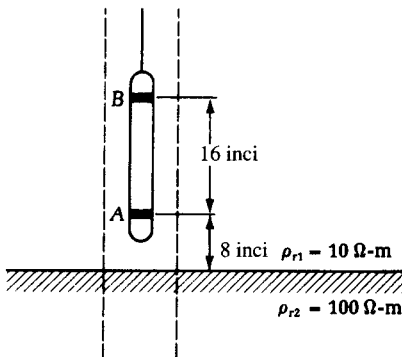
Resistivitas biasanya dihitung dari (12.26) dan dicatat sebagai fungsi kedalaman sumur. Grafik tempat pencatatan resistivitas ini dinamakan “log” resistivitas dan bentuknya seperti yang diperlihatkan pada Gambar 12.11. Dari log ini, kita melihat ada bukti yang kuat bahwa lapisan di antara 5040 kaki dan 5060 kaki mungkin mengandung minyak atau gas.*

Contoh 12.6 *Contoh ini menunjukkan prinsip alat logging sumur sederhana. Kita dapat memperkirakan apa yang akan dibaca alat ketika berada di dekat batas dua media konduksi yang berbeda.*

Sonde resistivitas logging sumur pada Gambar 12.10 terletak di dekat batas yang terdiri dari dua lapisan yang resistivitasnya, masing-masing $\rho_{r1} = 10 \Omega\text{-m}$ dan $\rho_{r2} = 100 \Omega\text{-m}$, seperti pada Gambar 12.12. Biasanya pembacaan ρ_r dikalibrasi sehingga harga yang tepat dibaca hanya jika mediumnya tak terbatas dan homogen. Hitung resistivitas aktual yang terdeteksi oleh sonde ini. Ambil $d = 16$ inci.



Gambar 12.11 Log resistivitas. Bukti kuat akan adanya lapisan minyak pada kedalaman 5050 kaki.



Gambar 12.12 Alat resistivitas logging sumur yang terletak di dekat batas dua lapisan tebal dengan resistivitas berbeda. Keberadaan batas ini dapat menyebabkan alat salah membaca resistivitas. Lihat contoh 12.6 untuk analisis kuantitatif permasalahan ini.

* Untuk bacaan selanjutnya lihat *Log Review 1* (Houston: Dresser-Atlas, 1974)

Solusi

Resistivitas yang dibaca sonde akan dipengaruhi medium 2. Jadi, sonde tidak akan membaca $\rho_r = 10 \Omega\text{-m}$, meskipun seluruhnya terletak di medium 1. Untuk mencari pembacaan yang diharapkan, pertama-tama kita harus menghitung potensial yang terdeteksi pada B . Kita sudah menyelesaikan permasalahan potensial dalam Contoh 12.5. Dalam kasus kali ini, kita memiliki $\sigma_1 = 0,1$, $x = 0$, $y = 0$, $z - h = 16 \text{ in} \times (2,54/100) \text{ m/in.} = 0,406 \text{ m}$, $z + h = 32 \times 2,54/100 \text{ m} = 0,813 \text{ m}$, dan

$$I' = I \left(\frac{0,1 - 0,01}{0,1 + 0,01} \right) = 0,818I$$

Oleh karena itu, sesuai dengan (12.22a),

$$\Phi_B = \frac{I}{4\pi \times 0,1} \left[\frac{1}{0,406} + \frac{0,818}{0,813} \right] = \frac{I}{4\pi} (34,7)$$

Substitusi nilai-nilai di atas ke dalam (12.26) akan menghasilkan

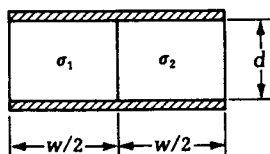
$$\rho_r = 4\pi \times 16 \times \frac{2,54}{100} \times \frac{1}{4\pi} \times 34,7 = 14,1 \Omega\text{-m}$$

RINGKASAN

1. Hukum Ohm menyatakan bahwa $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, di mana σ didefinisikan sebagai konduktivitas medium.
2. Hukum Joule menyatakan bahwa $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ adalah rugi daya yang dialami oleh medan listrik akibat pemanasan.
3. Konduktansi didefinisikan sebagai perbandingan antara arus yang mengalir di antara dua elektroda dengan beda tegangan di antara keduanya. Resistansi adalah kebalikan dari konduktansi.
4. Permasalahan medan elektrostatik yang melibatkan potensial, konstanta dielektrik, dan muatan-muatan adalah analog dengan permasalahan arus searah yang meliputi potensial konduktivitas, dan sumber arus. Prinsip analogi diringkas dalam Tabel 12.2.

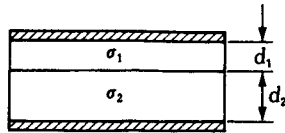
Soal-soal

- 12.1** Sebuah keping sejajar diisi dua bahan dengan konfigurasi seperti pada Gambar P12.1. Luas keping keseluruhan adalah A . Konduktivitas salah satu bahan adalah σ_1 dan bahan yang lain σ_2 . Tentukan resistansi keping sejajar ini, dan nyatakan dalam A , d , σ_1 , dan σ_2 .



Gambar P12.1

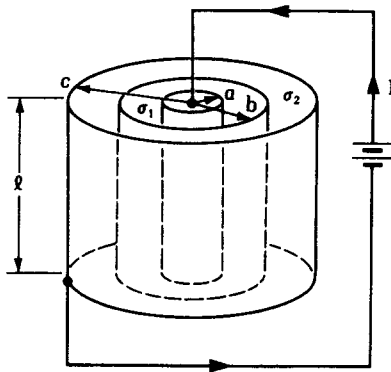
- 12.2 Sebuah keping sejajar diisi dua bahan dengan konfigurasi seperti pada Gambar P12.2. Tentukan resistansinya dan nyatakan dalam A , luas keping, dan d_1 , d_2 , σ_1 , dan σ_2 , yang ditunjukkan dalam gambar.



Gambar P12.2

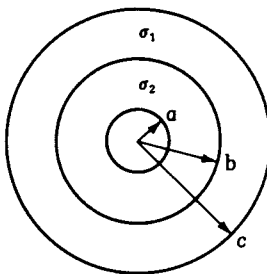
- 12.3 Sebuah kawat koaksial memiliki dua lapisan isolator. Gambar P12.3 menunjukkan geometrinya. Tentukan

- potensial Φ_1 untuk $a < \rho < b$
- potensial Φ_2 untuk $b < \rho < c$
- resistansi dari potongan kawat sepanjang ℓ meter



Gambar P12.3

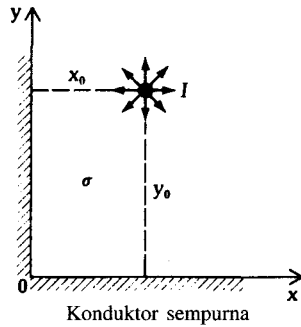
- 12.4 Konduktor bola dengan jari-jari a berada di dalam kulit bola konduktor dengan jari-jari c . Dua bahan digunakan untuk mengisi ruang di antara kedua konduktor. Konduktivitas bahan-bahan ini, masing-masing adalah σ_1 , dan σ_2 . Gambar P12.4 menunjukkan konfigurasi. Tentukan resistansi peralatan ini dan nyatakan dalam a , b , c , σ_1 , dan σ_2 .



Gambar P12.4

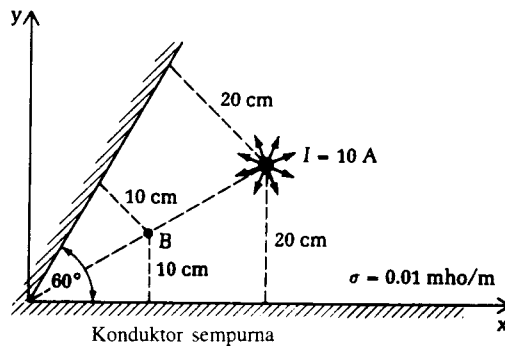
- 12.5 Dua sumur minyak terpisah sejauh 1 km. Resistansi di antara dua pipa baja di dalam sumur ini adalah $3,41 \Omega$. Berapakah konduktivitas tanah di dekat sumur-sumur ini? Gunakan data berikut: panjang kedua pipa = 1 km, dan diameter kedua pipa = 10 cm.
- 12.6 Sebuah elektroda arus berada di dekat keping konduktor sempurna yang ditekuk membentuk sudut 90° , seperti pada Gambar P12.6. Keluaran dari elektroda adalah I

ampere, dan bahan yang mengisi ruangnya mempunyai konduktivitas σ . Tentukan fungsi potensial $\Phi(x, y, z)$.



Gambar P12.6

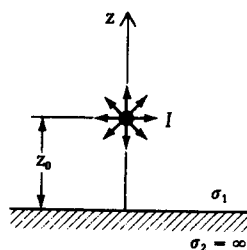
- 12.7 Sebuah elektroda arus berada di dekat keping konduktor sempurna yang ditekuk membentuk sudut 60° , seperti pada Gambar P12.7. Elektroda-elektrodanya menghasilkan arus 10 A, dan bahan yang mengisi daerah yang dibatasi oleh $0 < \phi < 60^\circ$ ini adalah air dengan konduktivitas 0,01 mho/m. Tentukan potensial pada titik B yang ditunjukkan dalam gambar.



Gambar P12.7

- 12.8 Sebuah elektroda titik mengeluarkan arus I ampere di atas suatu bidang konduktor, seperti ditunjukkan pada Gambar P12.8.

- Tentukan $\Phi(x, y, z)$ untuk $z > 0$.
- Tentukan rapat arus $J_s(x, y)$ pada permukaan konduktor.
- Gambarlah lintasan aliran arusnya.



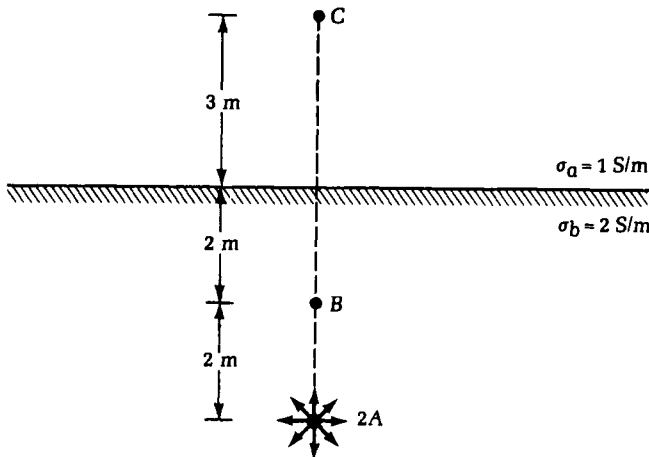
Gambar P12.8

- 12.9 Untuk kasus pada Gambar 12.9, tentukan persentase arus yang dipancarkan dari elektroda yang melintasi batas tersebut dan masuk di medium 2.

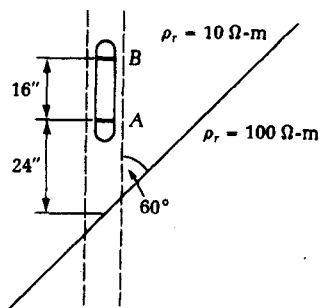
- 12.10 Sebuah sumber 4 meter di bawah antarmuka dua media konduktor memancarkan arus searah sebesar 2A, seperti pada Gambar P12.10.

- (a) Hitung potensial di titik B .
 (b) Hitung potensial di titik C .

Gambar P12.10



- 12.11** Alat resistivitas logging sumur yang mirip dengan yang diperlihatkan pada Gambar 12.12 berada di dekat batas antara dua lapisan, seperti pada Gambar P12.11. Batas tersebut membentuk sudut 60° dengan sumur. Cari resistivitas sebenarnya yang diukur dengan alat ini pada posisi yang ditunjukkan.



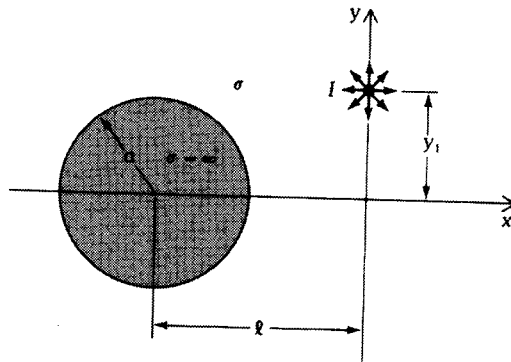
Gambar P12.11

- 12.12** Rujuk Contoh 12.6. Dapatkan ρ_a (resistivitas sebenarnya yang diukur alat oleh tersebut) sebagai fungsi posisi alat untuk $z_0 = +160$ inci hingga $z_0 = -160$ inci, di mana z_0 adalah posisi pusat alat (titik tengah di antara elektroda A dan B) relatif terhadap batas. Hitung ρ_a sedikitnya untuk 21 titik, dan plot ρ_a versus z_0 .

- 12.13** Ulangi soal 12.12 untuk keadaan yang ditunjukkan dalam Gambar P12.11.

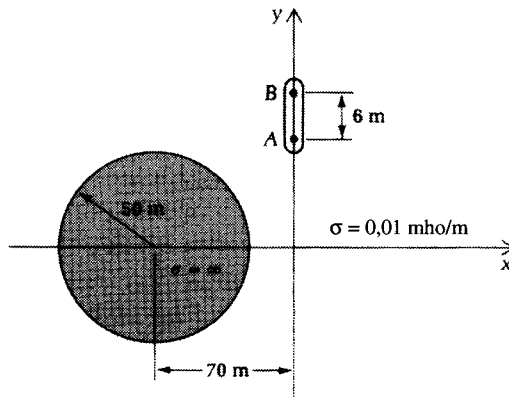
- 12.14** Sebuah elektroda titik ditempatkan pada $(0, y_1, 0)$, dan sebuah kulit bola konduktor sempurna dengan jari-jari a ditempatkan pada $(-\ell, 0, 0)$ seperti pada Gambar P12.14. Elektrodanya memberi arus sebesar I ampere. Konduktivitas mediumnya adalah σ . Tentukan potensial Φ pada sumbu y . Petunjuk: Gunakan (11.44)

Gambar P12.14



- 12.15** Perhatikan sebuah alat resistivitas logging sumur yang mirip dengan yang ditunjukkan oleh Gambar 12.10. Misalkan jarak antara elektroda arus A dan elektroda potensial B adalah 6 m. Alat tersebut mengukur konduktivitas formasi bumi pada saat alat tersebut melintasi sumur. Anggap sumur tersebut melintas di dekat sebuah deposit mineral yang dimodelkan sebagai bola konduktor sempurna, seperti ditunjukkan oleh Gambar P12.15. Cari resistivitas sebenarnya yang diukur oleh alat tersebut sebagai fungsi dari y . Gunakan data-data berikut: $\sigma = 0,01$ mho/m untuk tanah; radius deposit mineral = 50 m; dan jarak antara pusat bola dan sumur = 70 m. Plot $\sigma_{\text{sebenarnya}}$ versus y untuk $-70 < y < 70$. Petunjuk: gunakan hasil yang diperoleh dari soal sebelumnya.

Gambar P12.15



13 MEDAN MAGNETOSTATIK

Kita telah mempelajari elektrostatik pada bab 9-11, dan pada bab 12 kita sudah mendiskusikan asal-usul dan aplikasi arus searah J . Arus adalah sumber dari medan magnetostatik, seperti dapat kita lihat dari persamaan Maxwell pada limit statik. Medan magnetik diatur oleh dua persamaan berikut:

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (13.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (13.2)$$

Persamaan pertama adalah hukum magnetik Gauss. Kita sudah menggunakan hubungan konstitutif $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, dengan μ sebuah konstanta, untuk menurunkan (13.1). Kita akan mempelajari penyelesaian dari persamaan-persamaan ini. Medan magnet \mathbf{H} mewujudkan dirinya dalam hukum gaya Lorentz

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times (\mu\mathbf{H}) \quad (13.3)$$

Oleh karena itu, pada bab ini kita akan mendiskusikan gaya dan torsi yang bekerja pada partikel-partikel muatan dan kabel pembawa arus, energi magnetik, dan konsep induktansi.

13.1 MEDAN MAGNETOSTATIK

Ketika arus searah mengalir sepanjang kawat, arus itu akan menghasilkan medan magnetik tunak di sekelilingnya. Hubungan antara rapat arus \mathbf{J} dan medan magnetik \mathbf{H} diperlihatkan oleh (13.2). Dalam bentuknya sekarang, (13.2) tidak terlalu berguna untuk mendapatkan \mathbf{H} dari \mathbf{J} yang diberikan. Namun (13.2) dapat diubah sedemikian rupa sehingga menghasilkan bentuk baru yang mampu menghitung \mathbf{H} dari \mathbf{J} . Untuk melengkapi perubahan ini, kita integrasikan kedua ruas (13.2) terhadap luas A (lihat gambar 13.1):

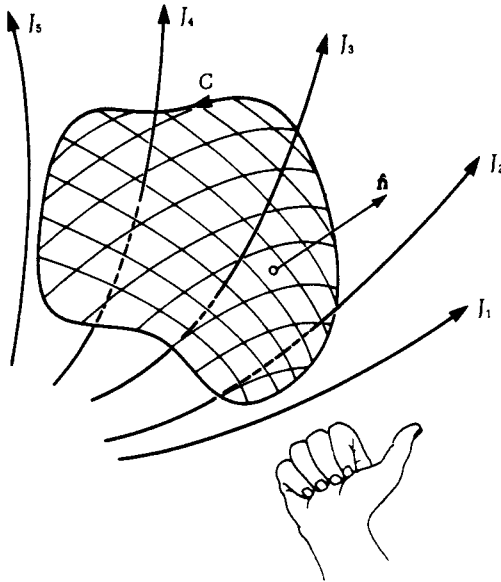
$$\iint_A \nabla \times \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da = \iint_A \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da \quad (13.4)$$

Dari teorema Stokes yang didiskusikan pada subbab 9.4, ruas kiri dari (13.4) dapat dinyatakan sebagai integral di sepanjang jalur tertutup C , dengan hasil sebagai berikut.:

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = I$$

(hukum Ampere, bentuk integral) (13.5)

Gambar 13.1 Integrasi dari H di sepanjang kontur C sama dengan jumlah arus I yang mengalir melalui luas A yang dibatasi C . Arah dari C dan normal \hat{n} dari A dihubungkan oleh aturan tangan kanan. I diperoleh dari J_2 , J_3 dan J_4 tetapi bukan dari J_1 atau J_5 .



di mana C adalah jalur yang membentuk batas A dan I adalah arus total yang mengalir melalui luas A . Arah kontur C dan vektor normal \hat{n} dari A dihubungkan oleh aturan tangan kanan, ditunjukkan pada gambar 13.1. Persamaan (13.5) disebut hukum Ampere bentuk integral, dan (13.2) adalah hukum Ampere bentuk diferensial.

Medan Magnetostatik Akibat Arus Garis

Perhatikan kawat panjang tak berhingga membawa arus searah I , seperti ditunjukkan pada Gambar 13.2a. Kita dapat menggunakan hukum Ampere (13.5) untuk mendapatkan medan magnetostatik H .

Kita buat sistem koordinat silinder dengan sumbu- z bertemu dengan kawat, seperti ditunjukkan pada gambar 13.2a. Kita terapkan hukum Ampere (13.5) terhadap lingkaran yang pusatnya terletak pada sebuah titik di sepanjang sumbu- z dengan radius ρ , dan akan kita dapatkan persamaan berikut:

$$\int_0^{2\pi} H_\phi \rho \, d\phi = I$$

Kita lihat bahwa H_ϕ tidak tergantung pada ϕ dan juga dapat kita keluarkan dari persamaan integral. Hasilnya adalah sebagai berikut:

$$H_\phi 2\pi\rho = I$$

artinya,

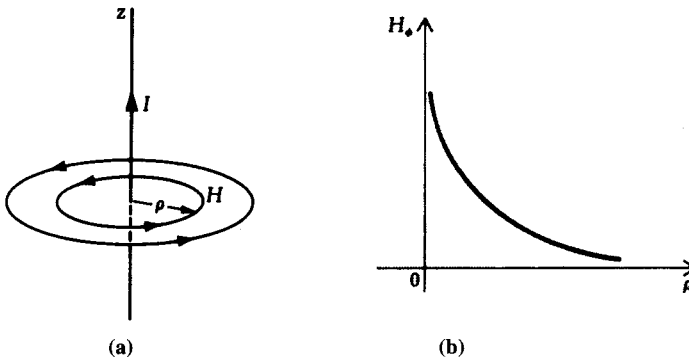
$$H = \hat{\phi} \frac{I}{2\pi\rho}$$

(medan H yang disebabkan oleh arus di sepanjang kawat panjang)

(13.6)

Gambar 13.2b menunjukkan gambar H_ϕ versus ρ . Jadi, medan magnetostatik akibat arus pada kawat yang panjangnya tak berhingga akan berada dalam arah $\hat{\phi}$ dan turun seiring turunnya $1/\rho$ dalam arah radial.

Gambar 13.2 Medan magnetostatik akibat arus dalam kawat yang panjangnya tak berhingga (a) medan magnetostatik berada dalam arah $\hat{\phi}$, (b) Medan ini proporsional dengan $1/\rho$ apabila ρ berubah-ubah.



Medan Magnetostatik Akibat Arus pada Saluran Koaksial

Kita lihat bahwa medan magnetostatik akibat kawat panjang dengan radius nol naik tanpa batas ketika ρ mendekati nol. Gambar 13.3a memperlihatkan model yang lebih realistis, saluran koaksial yang terdiri dari konduktor dalam padat dengan radius a dan kulit silinder dengan radius dalam b dan ketebalan $(c - b)$. Konduktor dalam membawa arus I ampere dalam arah \hat{z} , dan kulit luar membawa arus balik dalam arah negatif \hat{z} . Karena arusnya searah, kedalaman kulit tidak berhingga, dan arus-arus akan terdistribusi secara seragam pada konduktor-konduktor ini. Kita akan memecahkan medan magnetostatik yang berhubungan dengan arus-arus ini.

Kita terapkan hukum Ampere (13.5) terhadap area sirkular A pada sebuah titik di sumbu- z dengan radius ρ . Kita asumsikan bahwa $\rho < a$, sehingga area itu berada di sebelah dalam konduktor dalam, seperti ditunjukkan pada Gambar 13.3b. Perhatikan bahwa jumlah arus yang mengalir melalui luas A lebih kecil dari I , karena area tersebut berada di sebelah dalam konduktor dalam. Untuk tepatnya, (13.5) memiliki bentuk berikut di bawah kondisi-kondisi yang ditunjukkan pada Gambar 13.3b:

$$\int_0^{2\pi} H_\phi \rho \, d\phi = \left(\frac{\pi \rho^2}{\pi a^2} \right) I \quad (13.7a)$$

Sekali lagi, persamaan H_ϕ dapat dikeluarkan dari tanda integral akibat kesimetrisan permasalahan ini. Hasilnya adalah:

$$H_\phi = \frac{I\rho}{2\pi a^2} \quad 0 < \rho < a \quad (13.7b)$$

Perhatikan situasi di mana $a < \rho < b$, seperti ditunjukkan pada Gambar 13.3c. Arus yang mengalir melalui area A sekarang adalah tepat I . Karena itu, (13.5) memberikan hasil berikut:

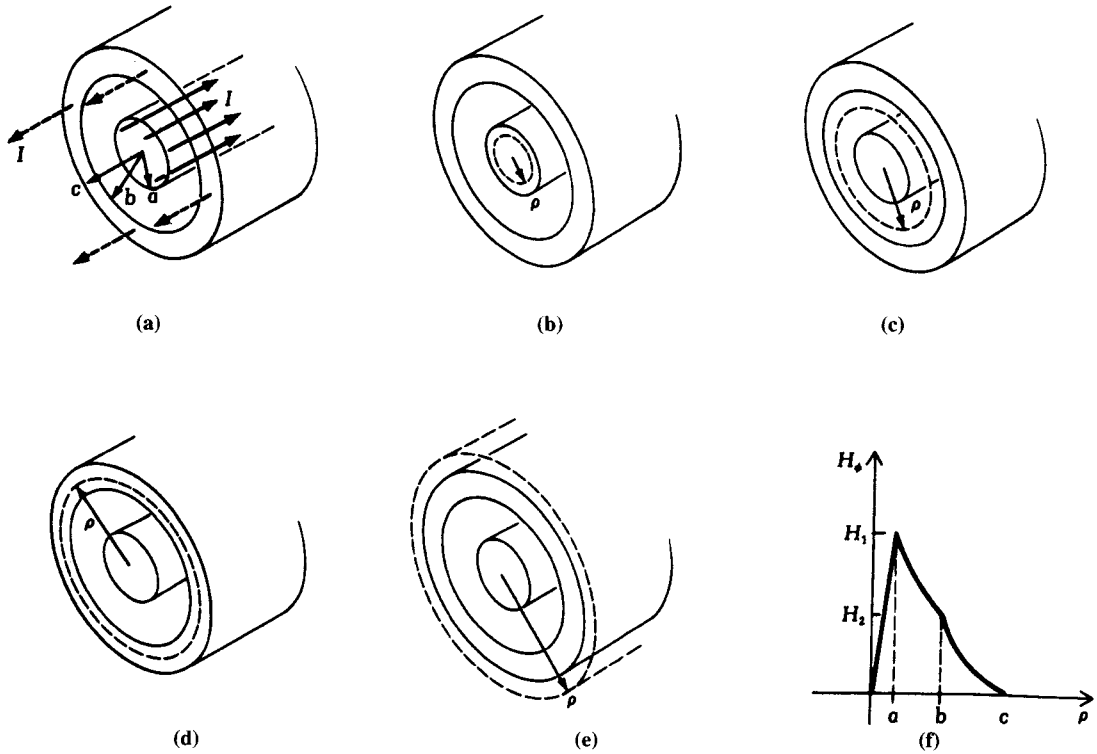
$$2\pi\rho H_\phi = I$$

Atau

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \quad a < \rho < b \quad (13.7c)$$

Gambar 13.3d menunjukkan keadaan untuk $b < \rho < c$. Jumlah arus yang mengalir melalui area A adalah I dikurangi arus balik yang melewati cincin antara ρ dan b pada konduktor luar. Akibatnya, (13.5) akan menghasilkan:

Gambar 13.3 (a) Saluran koaksial masing-masing membawa I dan $-I$ ampere arus pada konduktor dalam dan luarnya. (b) Hukum ampere diterapkan pada lingkaran dengan $\rho < a$. (c) $a < \rho < b$. (d) $b < \rho < c$. (e) $\rho > c$. (f) Gambar H_ϕ versus ρ , $H_1 = 1/2\pi a$, dan $H_2 = 1/2\pi b$.



$$2\pi\rho H_\phi = I - I \left(\frac{\pi\rho^2 - \pi b^2}{\pi c^2 - \pi b^2} \right)$$

Atau ekivalennya,

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \left(\frac{c^2 - \rho^2}{c^2 - b^2} \right) \quad (13.7d)$$

Akhirnya, untuk $\rho > c$, jumlah arus yang mengalir melalui area A akan sama dengan nol, sebagaimana ditunjukkan dalam Gambar 13.3c, dan kita mendapatkan

$$H_\phi = 0 \quad \rho > c \quad (13.7e)$$

Gambar 13.3f memperlihatkan plot H_ϕ versus ρ .

Medan Magnetostatik Akibat Keping Arus

Perhatikan suatu lembaran logam yang membawa arus dan mengalir pada arah \hat{z} , seperti ditunjukkan pada Gambar 13.4a. Gambar 13.4b memperlihatkan sudut pandang ujung dari keping. Rapat arusnya adalah \mathbf{J} , ampere per meter. Keping tersebut juga dapat dibayangkan sebagai terdiri dari beberapa kawat pembawa arus yang diatur secara sejajar, seperti diilustrasikan pada gambar 13.4c. Dari (13.6), kita tahu bahwa masing-masing kawat membangkitkan medan \mathbf{H} berarah $\hat{\phi}$. Ketika kita menggabungkan kawat-kawat tersebut ke bentuk keping, semua medan di atas keping tersebut ditambahkan dalam arah $-\hat{x}$ dan dibariskan dalam arah $+\hat{x}$ di bawah keping. Medan dalam arah \hat{y} saling meniadakan.

Dengan gambaran kualitatif dari distribusi medan H ini, kita sekarang dapat memprosesnya untuk mendapatkan medan H secara kuantitatif.

Kita pilih kontur C yang ditunjukkan pada Gambar 13.4b dan kita gunakan hukum Ampere (13.5) untuk mendapatkan hasil berikut:

$$\int_{AB + BC + CD + DA} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{\ell} = J_s w$$

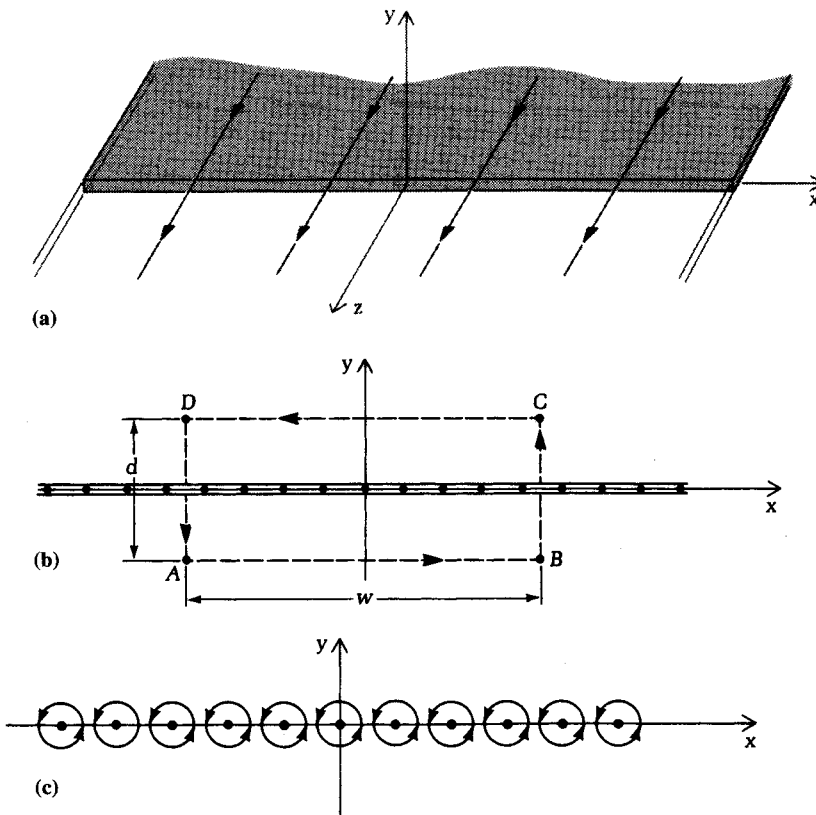
Tetapi

$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{\ell} = \begin{cases} H_x dx & \text{di } AB \\ 0 & \text{di } BC \\ (-H_x)(-dx) & \text{di } CD \\ 0 & \text{di } DA \end{cases}$$

Lebih jauh lagi, akibat simetri permasalahan ini, H_x dapat dianggap tidak tergantung pada x . Maka kita dapat memperoleh hasil sebagai berikut:

$$2H_x w = J_s w$$

Gambar 13.4 (a) Sekeping arus yang mengalir pada arah \hat{z} . Rapat arus adalah J_s ampere per meter. (b) Pandangan ujung dari (a). Arus mengalir keluar kertas. (c) Keping arus dapat dibayangkan sebagai kombinasi kawat-kawat sejajar, yang masing-masingnya menghasilkan medan H searah $\hat{\phi}$. Medan-medan H ini bergabung membentuk H total, masing-masing dengan arah $-\hat{x}$ dan \hat{x} di atas dan di bawah keping arus.



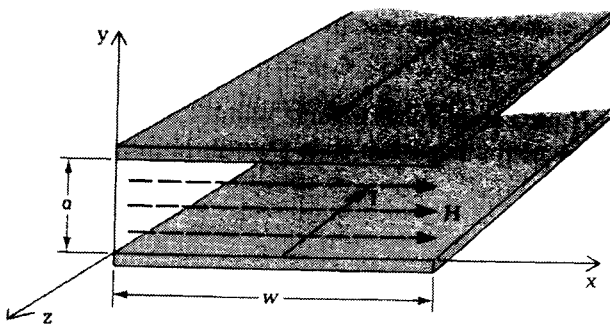
Atau

$$H = \begin{cases} \frac{-\hat{x}J_s}{2} & y > 0 \\ \frac{\hat{x}J_s}{2} & y < 0 \end{cases} \quad (\text{Medan } H \text{ akibat arus pada keping}) \quad (13.8)$$

Contoh 13.1 Prinsip superposisi dapat digunakan untuk mendapatkan medan magnet yang diakibatkan oleh beberapa sumber arus. Medan total adalah jumlah vektor dari medan-medan akibat masing-masing sumber.

Pemandu gelombang keping sejajar membawa I ampere arus searah yang mengalir pada arah \hat{z} di keping atas, dan arus itu kembali melalui keping bawah, seperti ditunjukkan pada Gambar 13.5. Asumsikan bahwa $w \gg a$. Tentukan medan magnetostatiknya.

Gambar 13.5 Medan magnetostatik akibat arus berlawanan pada konduktor keping sejajar dapat dicari dengan melakukan superposisi terhadap medan-medan akibat masing-masing keping.



Solusi

Karena w jauh lebih besar daripada a , kita dapat menggunakan (13.8) untuk masing-masing keping dan melakukan superimposisi terhadap medan-medannya.

Untuk $y > a$, H_x akibat keping atas akan negatif, sedangkan H_x keping bawah akan positif karena arus pada keping bawah memiliki arah yang berlawanan. Jadi, kedua medan saling meniadakan—artinya,

$$H = 0 \quad \text{untuk} \quad y > a \quad (13.9a)$$

Untuk $0 < y < a$, H_x akibat keping atas akan positif, dan H_x akibat keping bawah juga positif. Oleh karena itu, mereka saling memperkuat satu sama lain dan menghasilkan

$$H = \hat{x}J_s = \frac{\hat{x}I}{w} \quad \text{untuk} \quad 0 < y < a \quad (13.9b)$$

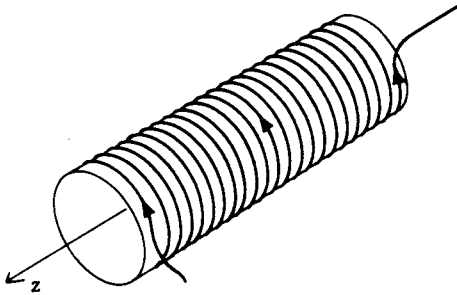
$$H = 0 \quad \text{untuk} \quad y < 0 \quad (13.9c)$$

Persamaan (13.9c) diperoleh sebagai akibat penghilangan H_x dalam daerah itu. Ingat bahwa hasil yang didapat di sini identik dengan yang diperoleh pada bab 5 untuk pemandu gelombang keping sejajar, jika kita anggap $k = 0$ pada (5.13) dan menukar koordinat x dan y .

Medan Magnet pada Solenoid

Solenoid terdiri dari banyak lilitan koil yang dibentuk menjadi struktur silindris, seperti ditunjukkan pada Gambar 13.6. Kita asumsikan bahwa solenoid panjang itu mempunyai n lilitan per meter. Akibat kesimetrisan konfigurasi ini, kita asumsikan bahwa medan magnetostatik tidak bergantung pada z (karena solenoid sangat panjang) dan ϕ (karena koil melingkar). Jika $\mathbf{H} = \hat{\rho}H_\rho(\rho) + \hat{\phi}H_\phi(\rho) + \hat{z}H_z(\rho)$, di mana H_ρ , H_ϕ , dan H_z adalah komponen dari \mathbf{H} masing-masing pada arah $\hat{\rho}$, $\hat{\phi}$, dan \hat{z} . Ingat bahwa mereka hanyalah fungsi ρ semata. Kita akan membuktikan bahwa H_ρ dan H_ϕ sama dengan nol.

Gambar 13.6 Solenoid panjang, dibuat dari lilitan koil yang dibentuk menjadi struktur silindris. Kedekatan lilitan koil diukur dengan jumlah n , jumlah koil per meter.



Kita integrasikan \mathbf{H} pada keseluruhan volume silindris V pada pusat solenoid dengan radius ρ dan panjang ℓ , seperti ditunjukkan pada Gambar 13.7a. Menurut (13.1) dan $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, kita dapatkan

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{H}) dv = 0$$

Dari teorema divergensi, persamaan di atas akan diubah menjadi persamaan yang melibatkan integral permukaan:

$$\oint_S \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = 0$$

Integral permukaan ini meliputi integrasi pada dua bagian ujung sirkular dan pada permukaan silindris. Pada kedua permukaan silindris itu kontribusi pada integral tersebut saling meniadakan, di pihak lain, integrasi pada permukaan silinder memperoleh hasil sebagai berikut:

$$2\pi\rho\ell H_\rho = 0$$

Hasil ini membuktikan bahwa di mana saja H_ρ akan sama dengan nol.

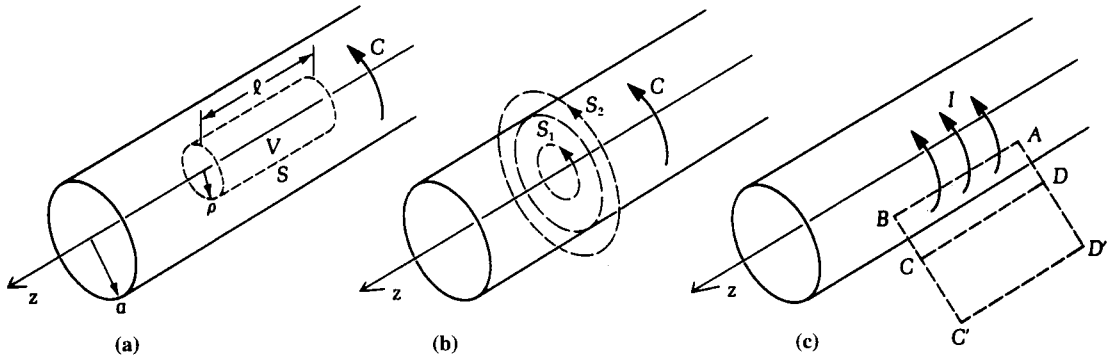
Misalkan kontur S_1 atau S_2 yang ditunjukkan pada Gambar 13.7b berada jauh dari kedua ujung solenoid. Dari hukum Ampere (13.5), kita dapatkan persamaan berikut:

$$\oint_{S_1 \text{ atau } S_2} H_\phi \rho d\phi = 0$$

karena tidak ada arus yang mengalir melalui baik S_1 maupun S_2 . Telah Kita simpulkan sebelumnya bahwa H_ϕ tidak tergantung pada ϕ ; maka, simbol itu dapat dihilangkan dari tanda integral, sehingga dihasilkan

$$2\pi\rho H_\phi = 0$$

Gambar 13.7 (a) Integrasi $\nabla \cdot \mathbf{H}$ pada volume V yang dibatasi oleh S . (b) Integrasi $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ sepanjang jalur S_1 atau S_2 . (c) Integrasi dari $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ sepanjang jalur $A-B-C-D$ atau $C-C'-D'-D$.



Jadi, H_ϕ akan sama dengan nol di mana saja. Akibatnya, H_z adalah satu-satunya komponen yang berada di dekat solenoid.

Kita sekarang menerapkan (13.5) pada kontur $DCC'D'$ di luar solenoid pada Gambar 13.7c. Kita dapatkan

$$\ell(H_z \text{ di } DC - H_z \text{ di } C'D') = 0$$

Karena posisi CD dan $C'D'$ berubah-ubah, persamaan di atas akan menghasilkan pernyataan berikut:

$$H_z = \text{konstanta} \quad \text{untuk} \quad \rho > a$$

Secara fisik kita tahu bahwa H_z harus habis pada saat ρ mendekati tak berhingga. Maka konstantanya harus nol atau

$$H_z = 0 \quad \text{untuk} \quad \rho > a \quad (13.10a)$$

Dengan cara yang sama, kita terapkan (13.5) pada kontur $ABCD$ dan hasil yang didapat adalah

$$\ell(H_z) = nI\ell$$

Oleh karena itu,

$$\boxed{H_z = nI} \quad \text{untuk} \quad \rho < a \quad (\text{medan } H \text{ pada solenoid panjang}) \quad (13.10b)$$

Kita simpulkan bahwa medan magnetostatik terkait untuk suatu solenoid panjang tak terhingga yang mempunyai n lilitan per meter dan membawa arus searah I akan sama dengan nI pada \hat{z} arah di dalam solenoid tersebut dan sama dengan nol di luar solenoid.

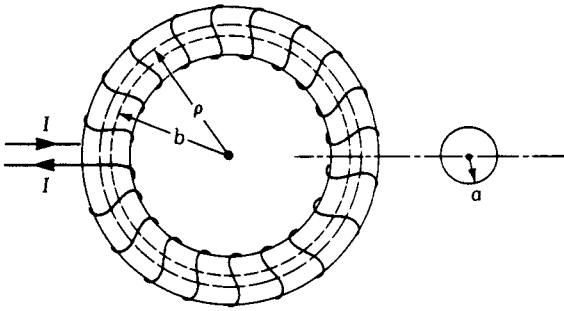
Medan Magnetik pada Koil Toroid

Sperti ditunjukkan pada Gambar 13.8, koil toroid adalah struktur yang menyerupai cincin dengan lilitan koil di sekelilingnya. Toroid pada dasarnya adalah solenoid (Gambar 13.6) yang dibengkokkan untuk membentuk cincin lingkaran. Jadi, pada koil toroid, kita memperkirakan bahwa medan magnetostatik tersebut akan terletak dalam arah $\hat{\phi}$. Di luar toroid tidak akan terdapat medan magnetik.

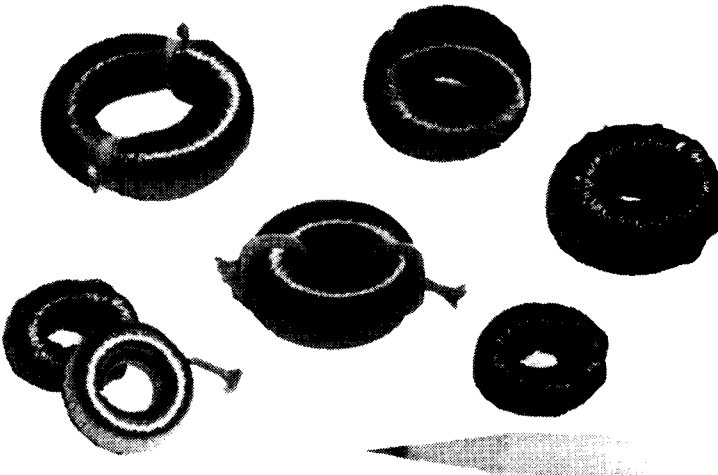
Menerapkan hukum Ampere (13.5) pada jalur sirkular dengan radius ρ di dalam toroid, akan menghasilkan

$$2\pi\rho H\phi = NI \quad (13.11)$$

Gambar 13.8 (a) Skema diagram toroid. Medan magnetik pada toroid bergerak berlawanan arah jarum jam ketika arus di dalam koil mengalir dalam arah yang ditunjukkan.



Gambar 13.8 (b) Koil toroid yang sekarang pada telepon dengan tombol tekan digunakan (Seizin Western Electric Co.)



di mana N adalah jumlah total lilitan pada koil toroid. Oleh karena itu,

$$H_{\phi} = \frac{NI}{2\pi\rho} \quad \text{untuk } (b - a) < \rho < (b + a) \quad (13.12)$$

Jika $b \gg a$, maka H_{ϕ} dapat dianggap seragam di dalamnya. Nilai rata-rata dari H di dalam dinyatakan sebagai berikut:

$$\boxed{H_{\phi} = \frac{NI}{2\pi b}} \quad \text{jika } b \gg a \text{ (medan } H \text{ pada toroid)} \quad (13.13)$$

Ingat bahwa $N/(2\pi b)$ adalah jumlah lilitan per meter. Jadi (13.13) ekuivalen dengan medan di solenoid yang diberikan oleh (13.10b) saat $b \gg a$. Selain itu, akibat cara koil dililitkan pada toroid yang ditunjukkan pada Gambar 13.8, medan magnetik akan berbalik melawan arah jarum jam. Ketika arus berbalik, medan magnetik akan menjadi searah jarum jam.

Hukum Biot-Savart

Sejauh ini kita sudah mempelajari beberapa kasus yang medan magnetostatiknya didapatkan dari distribusi arus yang telah diketahui. Kasus-kasus ini mempunyai satu kesamaan: mereka memiliki jenis simetri tertentu, sehingga hukum Ampere yang dinyatakan sebagai (13.5) dapat digunakan untuk mencari medan magnetik.

Untuk kasus-kasus yang tidak begitu simetris, (13.5) tidak dapat digunakan untuk menentukan medan magnetik. Untuk menentukan medan tersebut, kita harus kembali ke persamaan dasar (13.1) dan (13.2). Ingat bahwa Bab 7 memperkenalkan vektor potensial A , yang kemudian menghasilkan penyelesaian medan elektromagnetik akibat dipol antenna pendek. Kita telah mengetahui dari bab 7 bahwa, untuk kawat pendek yang mempunyai panjang Δz , ditempatkan pada titik asal, dan membawa arus $I e^{j\omega t}$ dalam arah \hat{z} , medan magnetik terkaitnya diberikan oleh (7.13), yang kembali diulang di bawah ini:

$$\Delta H = \hat{\phi} \frac{jkI \Delta z e^{-jkr}}{4\pi r} \left(1 + \frac{1}{jkr} \right) \sin \theta \quad (13.14)$$

Persamaan di atas menggunakan koordinat bola. Medan magnetostatik akibat segmen arus $I \Delta z \hat{z}$ didapat dari (13.14) dengan memisalkan k mendekati nol. Hasilnya adalah

$$\Delta H = \hat{\phi} \frac{I \Delta z \sin \theta}{4\pi r^2} \quad (13.15a)$$

Ingat bahwa persamaan di atas dapat ditulis sebagai berikut:

$$\Delta H = \frac{I \Delta z \hat{z} \times \hat{r}}{4\pi r^2} \quad (13.15b)$$

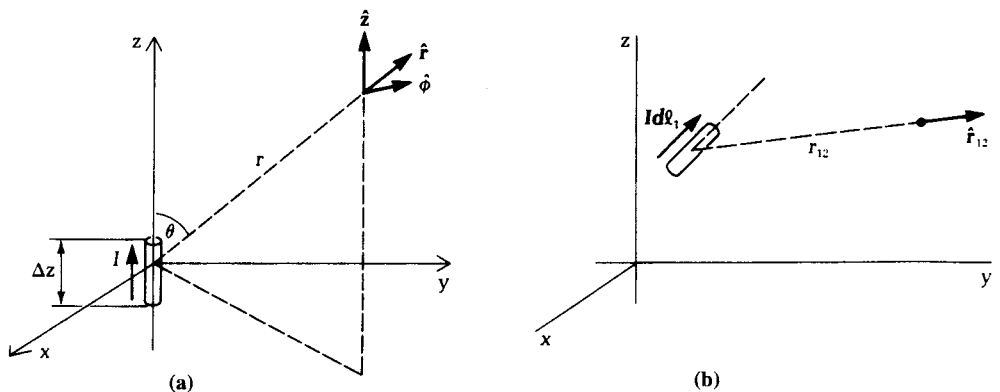
Jika elemen arus tidak terletak pada titik asal dan tidak diorientasikan dalam arah \hat{z} , maka kita harus memodifikasi (13.15b); dan kita dapatkan persamaan:

$$\boxed{dH = \frac{I d\ell_1 \times \hat{r}_{12}}{4\pi r_{12}^2}} \quad (\text{Hukum Biot-Savart}) \quad (13.16)$$

Gambar 13.9a menunjukkan situasi di mana (13.15) dapat diterapkan, dan Gambar 13.9b mengilustrasikan kasus di mana (13.16) dapat diterapkan pula.

Persamaan (13.16) dapat kita gunakan untuk menghitung kontribusi masing-masing segmen rangkaian pembawa arus pada medan magnetik. Dengan menjumlahkan semua kontribusi ini, kita dapat menemukan medan magnetik total akibat rangkaian lengkap. Persamaan (13.16) diketahui sebagai **Hukum Biot-Savart**.

Gambar 13.9 Hukum Biot-Savart **(a)** Segmen arus ditempatkan di titik asal dan diorientasikan dalam arah \hat{z} . **(b)** Segmen arus ditempatkan pada titik yang berubah-ubah dan diorientasikan dalam arah yang berubah-ubah.

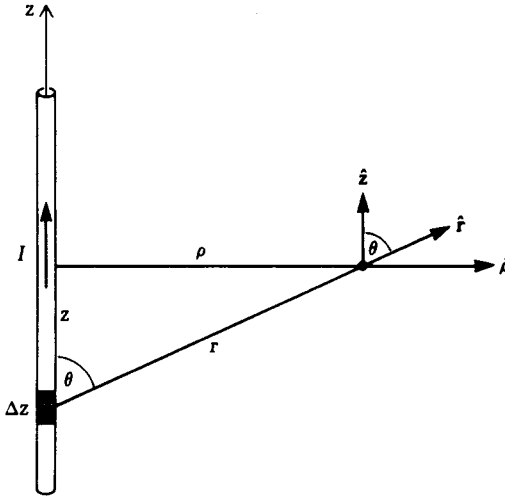


Contoh 13.2 *Contoh ini mendemonstrasikan hukum Biot-Savart dan prinsip superposisi. Medan total adalah jumlah vektor dari medan akibat masing-masing sumber.*

Dengan menggunakan Hukum Biot-Savart, tentukan medan magnetik \mathbf{H} akibat kawat panjang tak berhingga yang membawa arus I , seperti ditunjukkan dalam gambar 13.10

Solusi Dari hukum Biot-Savart, medan magnetik $d\mathbf{H}$ akibat bagian dz dari kawat diberikan oleh

Gambar 13.10 Penggunaan hukum Biot-Savart untuk menentukan medan magnetik akibat kawat panjang tak berhingga yang membawa arus I .



(13.15a). Dalam bentuk koordinat silinder, kita dapatkan

$$d\mathbf{H} = \hat{\phi} \frac{I dz \sin \theta}{4\pi r^2} = \hat{\phi} \frac{I dz}{4\pi(\rho^2 + z^2)} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

Medan magnetik total \mathbf{H} didapat dengan mengintegrasi z dari $-\infty$ sampai $+\infty$

$$\mathbf{H} = \hat{\phi} \frac{I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}$$

Dengan memisalkan $z = \rho \tan \alpha$, $dz = \rho \sec^2 \alpha d\alpha$, kita dapatkan

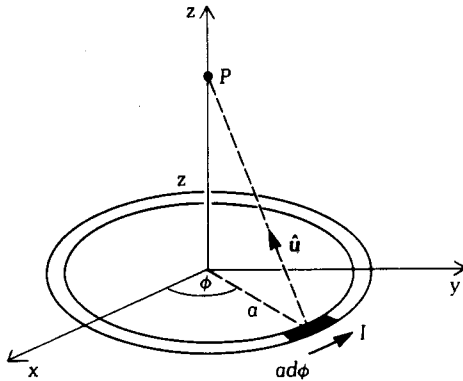
$$\mathbf{H} = \hat{\phi} \frac{I}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho \sec^2 \alpha d\alpha \frac{\rho}{\rho^2 \sec^3 \alpha} = \hat{\phi} \frac{I}{2\pi\rho}$$

Jawaban ini identik dengan (13.6), yang didapat dengan penggunaan langsung hukum Ampere.

Contoh 13.3 *Contoh ini adalah contoh lain perhitungan medan magnet dengan menggunakan hukum Biot-Savart. Simpal pembawa arus biasanya digunakan untuk membangkitkan medan magnetik (lihat koil Helmholtz yang diuraikan dalam soal 13.10).*

Simpal melingkar dengan radius a membawa arus searah I , seperti ditunjukkan dalam gambar 13.11. Hitung medan magnetik \mathbf{H} pada sumbu- z .

Gambar 13.11 Simpal melingkar membawa suatu arus melawan arah jarum jam (dilihat dari atas). Medan magnetik dalam arah sumbu-z dihitung pada contoh 13.3.



Solusi

Kita dapat menggunakan (13.16) untuk menyelesaikan soal ini. Kita tempatkan segmen yang sejenis dari simpal melingkar yang ditempatkan pada ϕ , yang panjangnya begitu kecil $a d\phi$, dan diorientasikan dalam arah $\hat{\phi}$. Pada titik P medan magnetik akibat segmen arus ini adalah:

$$d\mathbf{H} = \frac{I a d\phi \hat{\phi} \times \hat{u}}{4\pi(a^2 + z^2)} \quad (13.17)$$

di mana vektor satuan \hat{u} menunjukkan arah dari segmen arus ke titik P , seperti ditunjukkan dalam Gambar 13.11. Dengan menyatakan \hat{u} dari ρ dan z dalam koordinat silinder, kita dapatkan:

$$\hat{u} = \frac{-a\hat{\rho} + z\hat{z}}{\sqrt{a^2 + z^2}} \quad (13.18)$$

Substitusi (13.18) ke dalam (13.17) akan menghasilkan

$$d\mathbf{H} = \frac{I a d\phi (a\hat{z} + z\hat{\rho})}{4\pi(a^2 + z^2)^{3/2}} \quad (13.19)$$

Persamaan ini dapat diintegrasikan dari $\phi = 0$ hingga 2π untuk mendapatkan medan total \mathbf{H} pada P . Ingat bahwa z dan \hat{z} tetap tidak berubah walaupun ϕ berubah. Bagaimanapun juga, $\hat{\rho}$ akan berubah dengan berubahnya ϕ . Integrasi $\hat{\rho}$ pada jalur melingkar akan sama dengan nol. Kita lihat hasil ini dengan memisalkan $\hat{\rho} = \hat{x} \cos \phi + \hat{y} \sin \phi$. Integral kemudian dapat dilakukan sepanjang arah konstan \hat{x} dan \hat{y} . Hasil integrasi adalah nol. Akibatnya, kita dapatkan sebagai berikut:

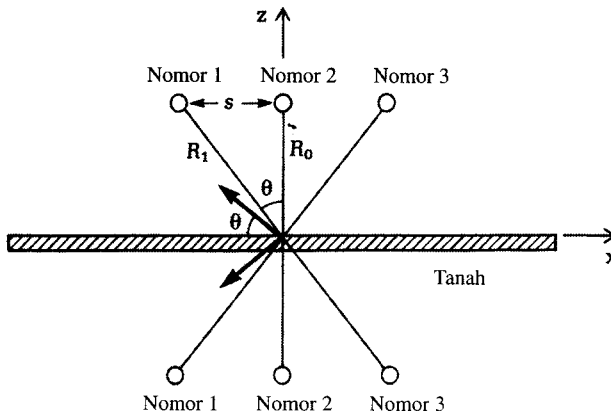
$$\mathbf{H} = \int_0^{2\pi} d\phi \frac{I a \hat{z}}{4\pi(a^2 + z^2)^{3/2}} = \hat{z} \frac{I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \quad (13.20)$$

Pernyataan di atas adalah untuk medan \mathbf{H} pada setiap di sumbu- z . Pernyataan dari medan \mathbf{H} pada sebarang titik di dalam ruang mungkin lebih rumit, tetapi dengan prosedur yang sama tetap dapat ditemukan.

Medan Magnetik Akibat Saluran Daya

Kita telah menghitung medan listrik akibat saluran daya pada Subbab 11.2 dan mendiskusikan kontroversi mengenai keamanannya. Sekarang kita akan melihat bagaimana menghitung

Gambar 13.12 Saluran transmisi daya tiga fasa dan bayangannya, arah \hat{y} (tegak lurus menuju kertas) adalah arah positif untuk arus.



medan magnetik yang dibangkitkan oleh saluran transmisi daya. Saluran tersebut terdiri dari 3 kawat sejajar yang ditempatkan R_0 meter di atas tanah. Masing-masing kawat terdiri dari bundel konduktor, tetapi dalam hal ini, bundel konduktor tersebut dimodelkan sebagai sebuah kawat tunggal yang mempunyai radius efektif a . Kawat-kawat ditempatkan di ruang dengan jarak s , seperti ditunjukkan pada Gambar 13.12. Arus yang dibawa kawat-kawat dinyatakan sebagai I_1 , I_2 , dan I_3 , secara berturut-turut. Kita lebih jauh mengasumsikan bahwa arus-arus ini adalah arus tiga fasa; yaitu $I_1 = I_0 \exp(-j\pi/3)$, $I_2 = I_0$, dan $I_3 = I_0 \exp(+j2\pi/3)$.

Seperti pada Subbab 11.2, masalah kali ini adalah masalah dinamik dan medan-medan bukan magnetostatik. Bagaimanapun juga, frekuensi saluran daya rendah, dan panjang gelombang di udara sangat besar (5000 km pada 60 Hz) dibandingkan dengan panjang fisik R_0 , s , dan a , yang sekitar 10 m atau lebih kecil. Oleh karena itu, kita gunakan rumus penurunan untuk medan-medan magnetostatik agar dapat menghitung medan magnet yang dibangkitkan oleh saluran daya dengan galat yang sangat kecil.*

Menurut Gambar 13.12, pengaruh dari tanah (bumi) dapat dihitung dengan menggunakan teori bayangan. Arus yang mengalir dalam arah \hat{y} pada kawat sejajar ke tanah dapat dianggap diproduksi oleh muatan-muatan positif yang bergerak dalam arah \hat{y} . Menurut teori bayangan, terdapat muatan-muatan negatif yang bergerak dalam arah \hat{y} , atau ekuivalennya, terdapat arus dengan jumlah sama dalam arah $-\hat{y}$. Karena itu, kawat Nomor 1' membawa $-I_1$, dan kawat Nomor 2' dan 3' masing-masing membawa arus $-I_2$ dan $-I_3$. Medan magnetik total selanjutnya dapat dihitung dengan menjumlahkan medan magnetik yang dibangkitkan oleh masing-masing kawat dan bayangannya.

Medan magnet akibat kawat yang membawa arus garis I diberikan oleh (13.6):

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho}$$

Oleh karena itu, medan \mathbf{H} di atas tanah tepat di bawah kawat nomor 2 akibat kawat nomor 1 adalah sebagai berikut:

$$H_1 = \frac{I_1}{2\pi R_1}(-\hat{x} \cos \theta - \hat{z} \sin \theta)$$

di mana $R_1 = (s^2 + R_0^2)^{1/2}$. Serupa halnya, di lokasi yang sama,

* Penjelasan yang lebih terperinci akan diberikan pada Bab 15.

$$H_2 = \frac{I_2}{2\pi R_0}(-\hat{x})$$

$$H_3 = \frac{I_3}{2\pi R_1}(-\hat{x} \cos \theta + \hat{z} \sin \theta)$$

$$H_{1'} = \frac{I_1}{2\pi R_1}(-\hat{x} \cos \theta + \hat{z} \sin \theta)$$

$$H_{2'} = \frac{I_2}{2\pi R_0}(-\hat{x})$$

$$H_{3'} = \frac{I_3}{2\pi R_1}(-\hat{x} \cos \theta - \hat{z} \sin \theta)$$

Penjumlahan keenam persamaan menunjukkan bahwa komponen \hat{z} dari medan magnetik total sama dengan nol, dan komponen \hat{x} dinyatakan sebagai berikut:

$$H_{tx} = \frac{-2 \cos \theta}{2\pi R_1}(I_1 + I_3) - \frac{2I_2}{2\pi R_0}$$

Dengan mensubstitusi $I_1 = I_0 \exp(-j2\pi/3)$, $I_2 = I_0$, dan $I_3 = I_0 \exp(+j3\pi/3)$ ke dalam persamaan di atas, akan dihasilkan

$$H_{tx} = \frac{-2I_0 s^2}{2\pi R_1^2 R_0} \quad (13.21)$$

Untuk saluran transmisi tegangan tinggi, data berikut dapat digunakan:*

$$I_0 = 1 \text{ kA}$$

$$R_0 = 10,6 \text{ m}$$

$$s = 10 \text{ m}$$

dan

$$a = 0.15 \text{ m}$$

Substitusi data ini pada (13.21) dan menyatakan $B = \mu_0 H$, kita dapatkan

$$B_{tx} = -0,18 \times 10^{-4} \text{ Tesla}$$

Ini adalah fluks magnetik di atas tanah tepat di bawah kawat Nomor 2. Pada lokasi lain di atas tanah, fluks mempunyai nilai berbeda dengan magnitudo yang sama. Sebagai perbandingan, medan magnet bumi kurang lebih $0,5 \times 10^{-4}$ Tesla.

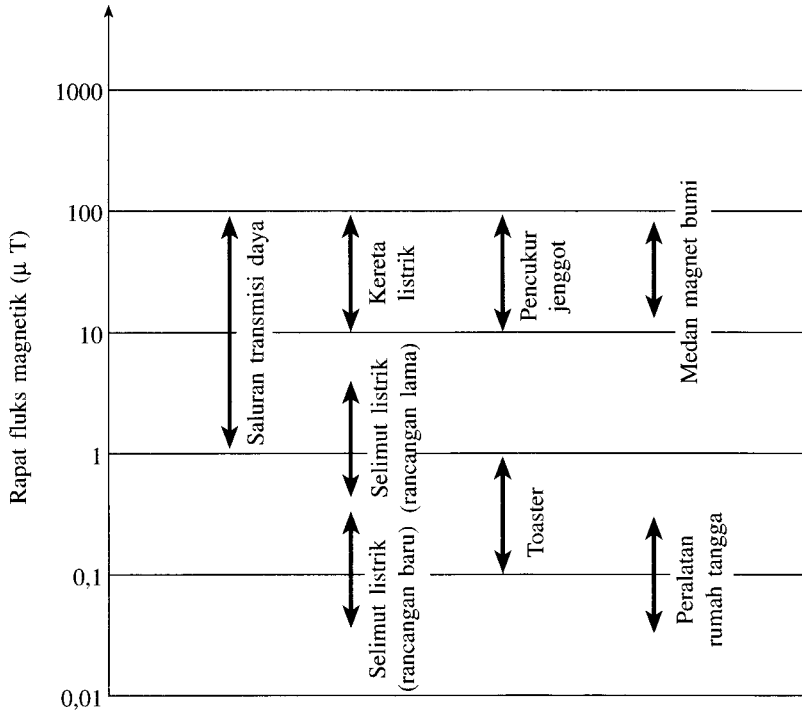
Gambar 13.13 menunjukkan jangkauan rapat fluks magnetik yang dibangkitkan oleh saluran daya listrik dan peralatannya pada jarak normal dari sumber-sumber ini.** Sebagai perbandingan, medan magnetik bumi juga diperlihatkan. Perlu dicatat bahwa medan magnetik bumi pada dasarnya adalah medan tunak, sedangkan medan yang diproduksi oleh sumber-sumber daya listrik berubah-ubah secara berubah-ubah secara sinusoidal dengan waktu. Perlu dicatat pula bahwa merancang secara hati-hati pengawatan dalam selimut listrik dapat mengurangi risiko terkena fluks magnetik.

Pertanyaan mengenai tingkat keselamatan dari medan elektromagnetik yang terpancar dari saluran daya dan perlengkapannya didiskusikan pada subbab 11.2. Karena opini para

* J. J LaForest, ed., *Transmission Line Reference Book*, Palo Alto, CA: Electric Power Institute, 1982, hal 332.

** P. Thomas, "Power Struggle," *Harvard Health letter*, Jilid 18, Juli 1993, hal. 1. W.R. Bennett, Jr., "Cancer and power lines," *Physics Today*, April 1994, hal. 23.

Gambar 13.13 Pemaparan pada manusia untuk kerapatan fluks magnetik yang dibangkitkan oleh sumber-sumber daya listrik.



ahli sangat beragam dan kontroversi yang selalu timbul, kami anjurkan (1) “pencegahan yang bijaksana” yaitu menghindari resiko terkena yang tidak diperlukan dari setiap medan EM buatan; dan (2) Merancang pengawatan listrik di dalam rumah-rumah dan produk konsumen yang bisa mengurangi kebocoran medan elektromagnetik.

13.2 GAYA MAGNETIK DAN TORSI

Pada Bab 10 kami telah memperkenalkan gaya dari partikel muatan q yang ditempatkan pada medan elektrostatik. Hukum gaya Lorentz menyatakan bahwa

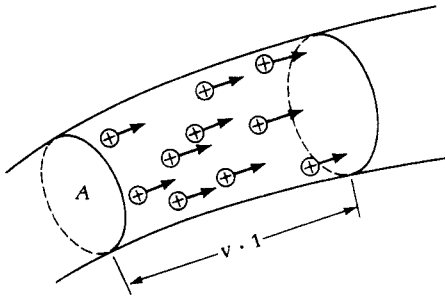
$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (13.22)$$

Suku kedua pada persamaan di atas tidak diperlukan ketika perhatian kita hanya bertumpu pada medan elektrostatik. Namun demikian, dalam bab ini kita hanya akan membahas medan-medan magnetostatik. Akibatnya, kita akan mempelajari kasus istimewa di mana \mathbf{E} sama dengan nol dan gaya Lorentz menjadi

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (\text{gaya magnetik pada muatan yang bergerak}) \quad (13.23)$$

Persamaan di atas menguraikan gaya akibat medan magnetik pada muatan q coulomb yang bergerak dengan kecepatan \mathbf{v} . Jika kita mempunyai beberapa muatan yang bergerak pada kecepatan sama \mathbf{v} , mereka membentuk arus. Berdasarkan Gambar 13.14, kita asumsikan bahwa terdapat n muatan per unit volume di dalam ruang, semuanya bergerak pada kecepatan konstan \mathbf{v} , dan masing-masing membawa q coulomb muatan. Arus I yang melewati area A didefinisikan sebagai muatan total yang melalui A dalam satu detik. Karena itu

$$I = nqAv \quad (13.24)$$



Gambar 13.14 Terdapat n muatan per meter kubik yang bergerak dengan kecepatan \mathbf{v} di ruang. Setiap muatan membawa q coulomb. Arus I pada silinder dengan luas A didefinisikan oleh $I = nqAv$.

Gaya magnetik total pada pengaturan muatan-muatan di dalam volume dV , menurut (13.23), adalah

$$d\mathbf{F} = nq\mathbf{v} dV \times \mathbf{B} \quad (13.25)$$

Menggunakan (13.24), dan hubungan $dV = A d\ell$, kita dapatkan

$$\boxed{d\mathbf{F} = I d\mathbf{\ell} \times \mathbf{B}} \quad (\text{gaya magnetik pada elemen pembawa arus}) \quad (13.26)$$

Persamaan di atas menyatakan gaya magnetik pada konduktor yang mempunyai panjang $d\ell$ dan membawa arus I dengan arah $d\ell$.

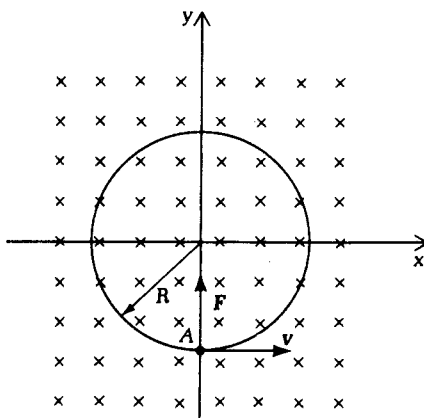
Contoh 13.4 Partikel bermuatan yang bergerak melalui medan magnetik seragam akan mengalami gaya yang membuatnya bergerak dengan lintasan melingkar. Fenomena ini telah menghasilkan beberapa aplikasi penting.

Partikel bermuatan dengan massa m dan muatan q mengawali pergerakan dengan kecepatan \mathbf{v} di dalam medan yang seragam \mathbf{B}_0 dengan arah menuju kertas atau dalam arah $-\hat{z}$, seperti ditunjukkan pada Gambar 13.15. Tentukan lintasan partikel.

Solusi Asumsikan bahwa partikel bermuatan tersebut diawali pada posisi A seperti diperlihatkan. Lalu $\mathbf{v} = v_0 \hat{x}$. Dengan menggunakan (13.23) kita dapatkan gaya \mathbf{F} :

$$\mathbf{F} = qv_0 \hat{x} B_0(-\hat{z}) = qv_0 B_0 \hat{y}$$

Ingat bahwa \mathbf{F} tegak lurus \mathbf{v} . Akibat hasil perkalian silang, \mathbf{F} selalu tegak lurus dengan \mathbf{v} . Ketegaklurusan ini menunjukkan adanya pergerakan melingkar. Untuk mempertahankan pergerakan melingkar ini, gaya harus sama dengan gaya sentrifugalnya — yaitu,



Gambar 13.15 Sebuah muatan yang bergerak melingkar di bawah pengaruh medan magnetostatik.

$$qv_0 B_0 = m \frac{v_0^2}{R}$$

Jadi, partikel bermuatan akan bergerak di sepanjang lingkaran dengan radius R , di mana

$$R = \frac{mv_0}{qB_0} \quad (13.27a)$$

Perhatikan bahwa frekuensi angular dari partikel ω_c tidak bergantung pada kecepatan v_0 .

$$\omega_c = \frac{v_0}{R} = \frac{qB_0}{m} \quad (13.27b)$$

Kuantitas $f_c = \omega_c/2\pi$ disebut **frekuensi siklotron** dari partikel di dalam medan magnetik yang kekuatannya B_0 . Jika kita suntikkan beberapa partikel bermuatan identik dengan kecepatan berbeda pada medan magnetik, mereka akan bergerak dalam lingkaran yang berbeda tetapi dengan frekuensi yang sama. Menurut (13.27), partikel yang lebih cepat akan bergerak di sepanjang lingkaran yang lebih besar dan yang lebih rendah bergerak di sepanjang lingkaran lebih kecil.

Ingat bahwa, karena \mathbf{F} selalu tegak lurus terhadap \mathbf{v} , gaya magnetik tidak akan pernah bekerja pada muatan. Dengan kata lain, medan magnetik dapat mengubah arah pergerakan muatan yang bergerak, tetapi tidak menaikkan atau menurunkan kecepatannya.

Pemisahan Isotop

Isotop adalah elemen-elemen yang menempati tempat yang sama di dalam tabel periodik tetapi mempunyai berat atom yang berbeda. Ratusan isotop yang berbeda terjadi secara alami. Sebagai contoh, uranium mempunyai 3 isotop alami: Uranium 238 (99,28%), Uranium 235 (0,715%), dan Uranium 234 (0,005%). Karena isotop-isotop ini menempati tempat yang sama pada tabel periodik, sifat kimianya mirip. Akibatnya, untuk memisahkan isotop-isotop ini dari campuran alaminya perlu digunakan suatu metode tertentu di luar metode kimia.

Gambar 13.16 memperlihatkan sebuah metode pemisahan isotop. Senyawa isotop ini pertama-tama diuapkan, lalu diionisasi oleh peluahan listrik. Kemudian ion-ion ini dilewatkan melalui celah di daerah keping sejajar, di mana mereka akan dipercepat oleh medan elektrostatik. Energi kinetik dari ion-ion yang dipercepat ini ratusan kali lebih besar dari pada energi termal rata-ratanya. Jadi energi kinetiknya mendekati qV , di mana q adalah muatan isotop yang diionisasi dan V adalah perbedaan potensial antara keping. Ingat bahwa energi kinetik tidak tergantung pada massa. Jadi, semua isotop mempunyai energi kinetik yang sama. Namun demikian, akibat perbedaan massa ini, isotop-isotop akan mempunyai kecepatan yang berbeda. Rasio kecepatan dari ^{235}U dan ^{238}U adalah sebagai berikut:

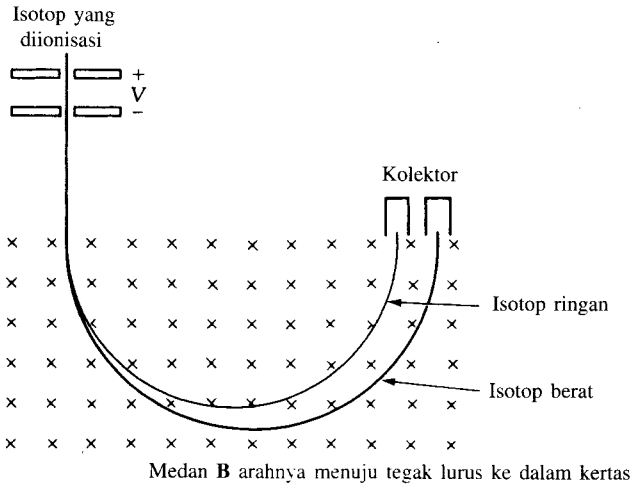
$$\frac{v_5}{v_8} = \left(\frac{m_8}{m_5} \right)^{1/2}$$

Di sini, v_5 dan m_5 masing-masing adalah kecepatan dan massa dari ^{235}U , dan v_8 dan m_8 adalah kecepatan dan massa dari ^{238}U .

Partikel-partikel ini kemudian masuk ke dalam medan magnetik seragam yang kuat. Menurut hasil yang didapat pada Contoh 13.4, mereka, akan bergerak mengikuti jalur melingkar dengan radius yang berlainan. Dari contoh kita dapatkan

$$\frac{R_5}{R_8} = \frac{m_5 v_5}{m_8 v_8} = \left(\frac{m_5}{m_8} \right)^{1/2} = \left(\frac{235}{238} \right)^{1/2} = 0,9937$$

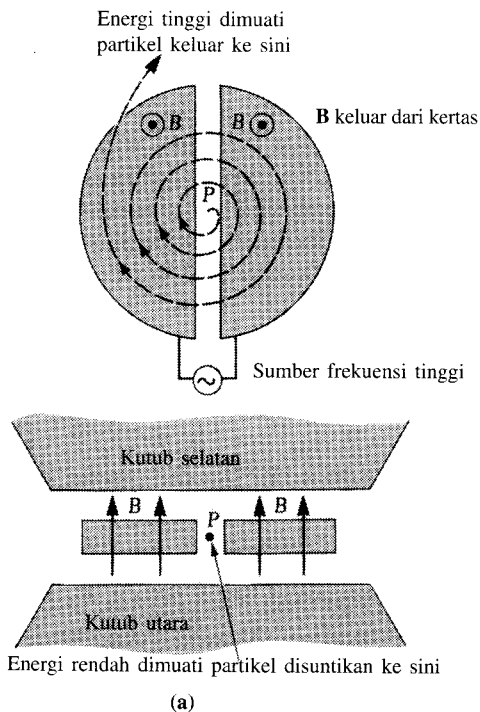
Gambar 13.16 Pemisah isotop elektromagnetik. Medan listrik dalam daerah keping sejajar akan mempercepat isotop-isotop terionisasi ini, yang kemudian dilewatkan melalui medan magnetik. Isotop yang lebih berat melintasi jalur melingkar yang lebih besar daripada isotop yang lebih ringan.



di mana R_5 dan R_8 adalah radius dari masing-masing jalur melingkar yang dilintasi oleh partikel ^{235}U dan ^{238}U . Jadi, untuk mendapatkan pemisah isotop, kolektor dapat ditempatkan berdasarkan rasio ini. Sampel ^{235}U murni dengan ukuran yang cukup memadai pertama kali diproduksi pada tahun 1942 oleh pemisah elektromagnetik dengan menggunakan prinsip yang diperlihatkan dalam Gambar 13.16.

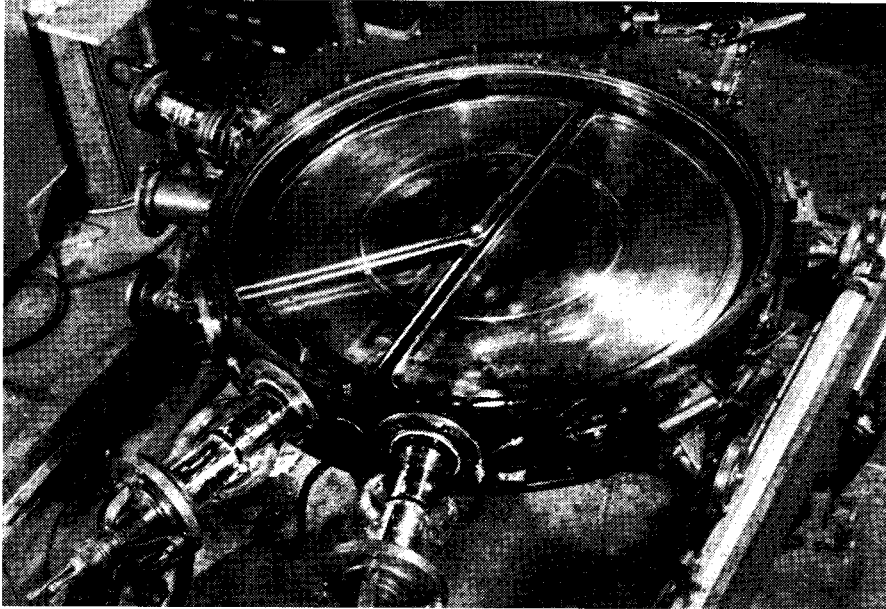
Siklotron

Siklotron dapat digunakan untuk menghasilkan partikel bermuatan energi tinggi (Gambar 13.17a). Dintara dua buah magnet listrik yang besar, terdapat dua elektroda tembaga bentuk



Gambar 13.17(a) Skema diagram siklotron.

Gambar 13.17(b) Siklotron yang dibuat di Universitas Harvard tahun 1931. (Seijin Universitas Harvard, fotografi oleh P.H. Donaldson dari Universitas Harvard, 1939).



D berlubang yang dihubungkan ke sumber tegangan bolak-balik frekuensi tinggi. Dimulai pada titik P , partikel bermuatan positif ditarik ke daerah bentuk D di sisi kanan. Muatan bergerak pada jalur semi melingkar di dalam daerah bentuk D, di mana medan listrik tidak ada tetapi medan magnet masih ada. Muatan tersebut akan kembali ke medan listrik dan dipercepat menuju daerah kiri bentuk D karena medan listrik bolak-balik sudah mengubah polaritasnya sendiri. Seperti kita ketahui, untuk melakukan aksi ini, medan listrik bolak-balik harus diterapkan pada frekuensi yang sama dengan frekuensi pergerakan melingkar dari partikel yang diberikan oleh (13.27):

$$f_c = \frac{qB_0}{2\pi m}$$

Perhatikan bahwa f_c tidak bergantung pada kecepatan linear partikel dan tetap tidak berubah pada saat partikel tersebut dipercepat berulang kali ketika melalui celah. Jadi, sumber frekuensi konstan dapat digunakan untuk membangkitkan tegangan bolak-balik ini bersamaan dengan pergerakan angular partikel. Setelah beberapa putaran, partikel akan keluar dengan kecepatan tinggi dan energi tinggi. Gambar 13.17b menunjukkan model siklotron yang pertama.

Contoh 13.5 *Satu aplikasi penting dari interaksi antara medan magnet dan partikel bermuatan adalah Siklotron. Contoh ini menunjukkan parameter yang sesuai dengan alat tersebut.*

Partikel deuterium dengan massa $m = 3,34 \times 10^{-27}$ kg dan muatan listrik $q = 1,6 \times 10^{-19}$ C diproduksi dan dipercepat di dalam siklotron dengan radius 1 m dan medan magnetik 20.000 G (2 Wb/m^2). Hitung energi partikel saat keluar.

Solusi

Kecepatan angular partikel deuterium tergantung hanya pada q , B_0 , dan m . Dari (13.27b), kita mempunyai

$$\omega_c = \frac{qB_0}{m} = 9,6 \times 10^7 \text{ rad/s}$$

Kecepatan linear pada tempat keluar adalah $R\omega_c$, atau

$$v = R\omega_c = 9,6 \times 10^7 \text{ m/s}$$

Energi kinetik partikel pada tempat keluar adalah W , di mana

$$W = \frac{1}{2}mv^2 = 1,53 \times 10^{-11} \text{ J} = 96 \text{ MeV}$$

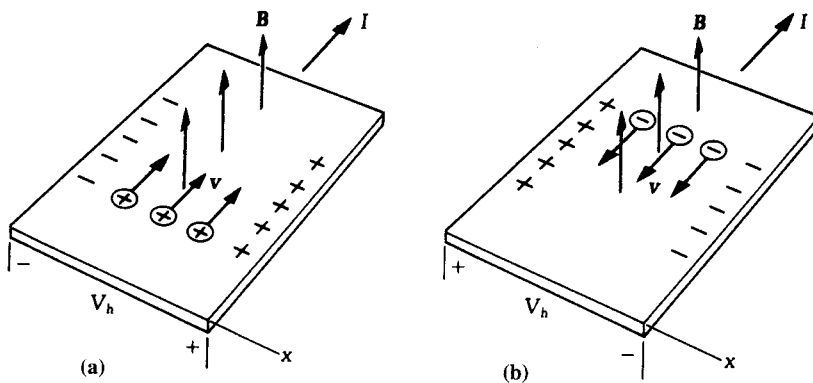
Perhatikan bahwa, pada perhitungan di atas, sebaiknya digunakan pendekatan relativitas yang lebih akurat pada saat kecepatan partikel mendekati kecepatan cahaya, yang tidak akan dapat dilampaui kecepatan partikel tersebut. Dari perhitungan di atas, kita juga dapat melihat bahwa siklotron tidak cocok dipakai untuk mempercepat elektron, karena massa elektron begitu kecil sehingga elektron tersebut akan mencapai batas kecepatan cahaya hanya dengan energi beberapa MeV. Kenaikan relatif massa elektron akan mempengaruhi frekuensi siklotron, dan elektron-elektron tersebut dengan cepat kehilangan “sink” dengan diterapkannya tegangan bolak-balik.

Efek Hall

Perhatikan arus muatan positif yang mengalir di dalam lempeng konduktor, seperti ditunjukkan dalam Gambar 13.18a. Ketika arus ditempatkan pada medan magnetik yang tegak lurus terhadap lempeng tersebut, gaya magnetostatik ($\mathbf{J} \times \mathbf{B}$) akan bekerja pada muatan-muatan ini dan memindahkan mereka pada arah \hat{x} seperti ditunjukkan. Muatan-muatan tersebut akan menimbulkan tegangan V_h pada kedua sisi lempeng tersebut, yang dalam ketiadaan medan magnetik tidak mempunyai perbedaan potensial. Fenomena ini disebut **efek Hall**, dan tegangan V_h disebut **tegangan Hall**.

Ketika arus timbul akibat pergerakan muatan-muatan negatif, kita melihat dari gambar 13.18b bahwa tegangan Hall akan berlawanan dengan yang diperlihatkan dalam Gambar 13.18a. Dengan mengukur tegangan Hall, kita dapat membedakan semikonduktor jenis p (di mana lubang positif hanyut membentuk aliran arus) dari semikonduktor jenis n (di mana elektron negatif mengalir).

Gambar 13.18 Efek Hall. Gaya magnetik mendorong muatan mengalir di dalam konduktor di sepanjang arah \hat{x} . Hasilnya adalah terciptanya tegangan arah transversal. (a) Arus diakibatkan oleh hanyutnya muatan-muatan positif atau lubang. (b) Arus diakibatkan oleh adanya muatan-muatan negatif.



Pembelokan Magnetik dari Berkas Elektron

Di dalam tabung sinar katoda (CRT) atau tabung gambar dari televisi (atau komputer), berkas elektron dibelokkan untuk mempersiapkan penentuan bintang pada layar oleh medan elektrostatik atau oleh medan magnetostatik. Subbab 10.2 menguraikan prinsip operasi dari CRT. Gambar 10.8 memperlihatkan sketsa dari CRT.

Keping pembelok yang ditunjukkan pada Gambar 10.8 membangkitkan medan elektrostatik untuk membelokkan sinar elektron. Mereka dapat digantikan oleh koil yang mampu memproduksi medan magnetik untuk menyelesaikan tugas yang sama, seperti dijelaskan dalam contoh berikut.

Asumsikan bahwa sebuah elektron dengan kecepatan 2×10^7 m/s memasuki medan magnetik $B_0 = 5 \times 10^{-4} \hat{y}$ weber per meter kuadrat, seperti ditunjukkan pada Gambar 13.19. Medan magnetik ini dianggap hanya terjadi di daerah sepanjang 4 cm. Kita akan menentukan lintasan elektron.

Dari analisis yang dilakukan dalam contoh 13.4, kita tahu bahwa elektron mengikuti jalur melingkar begitu elektron itu memasuki medan magnetik. Radius lingkaran adalah R , di mana

$$R = \frac{mv_0}{qB_0} = 0,228 \text{ m}$$

Menurut koordinat yang ditunjukkan pada Gambar 13.19, kecepatan elektron diberikan oleh

$$v_x = v_0 \cos(\omega_c t) \quad (13.28a)$$

$$v_z = -v_0 \sin(\omega_c t) \quad (13.28b)$$

di mana $v_0 = 2 \times 10^7$ m/s dan ω_c diberikan sebagai berikut:

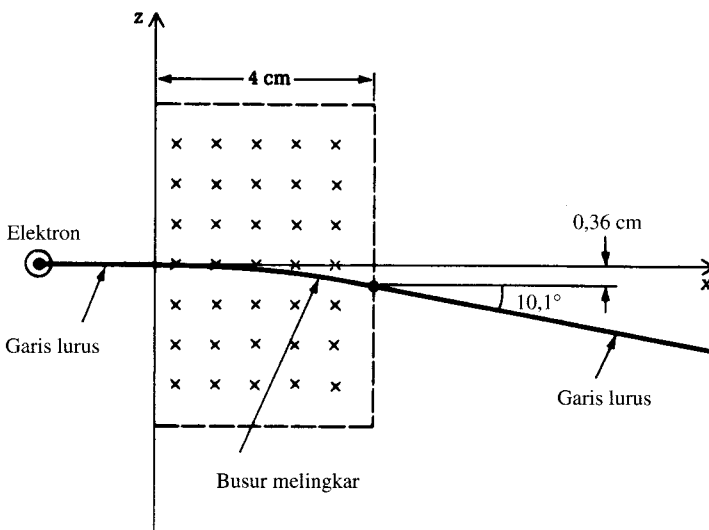
$$\omega_c = \frac{qB_0}{m} = 8,78 \times 10^7 \text{ rad/s}$$

Kita telah menetapkan t sama dengan nol pada waktu elektron memasuki medan magnetik. Kita dapatkan posisi elektron di daerah medan magnetik dari (13.28) dengan integrasi:

$$x = \frac{v_0}{\omega_c} \sin(\omega_c t)$$

$$z = -\frac{v_0}{\omega_c} [1 - \cos(\omega_c t)]$$

Gambar 13.19 Sebuah elektron dibelokkan oleh medan magnetik dengan arah menuju kertas. Lintasan di daerah medan magnetik ini adalah busur melingkar.



Pada titik keluar dari medan magnetik, $x_i = 0,04$. Oleh karena itu,

$$\sin \omega_c t_1 = \frac{0,04\omega_c}{v_0} = 0,176$$

sehingga

$$\cos \omega_c t_1 = 0,984$$

Titik keluar ini dengan demikian akan terletak pada $x_i = 0,04$ m, dan

$$z_1 = -0,0036 \text{ m}$$

Elektron akan mengikuti garis lurus setelah keluar. Garis lurus tersebut membentuk sudut θ dengan sumbu- x , di mana

$$\tan \theta = \frac{-v_z}{v_x} = \frac{0,176v_0}{0,984v_0}$$

$$\theta = 10,1^\circ$$

Gambar 13.19 menunjukkan lintasan keseluruhan. Adalah menarik untuk membandingkan hasil ini dengan hasil yang diperlihatkan oleh Gambar 10.1 untuk Contoh 10.2. Perhatikan bahwa kita sudah menganggap bahwa magnitudo gaya yang bekerja pada elektron tersebut sama seperti yang terdapat pada Contoh 10.2. Lintasan di medan listrik adalah parabola, dan berbentuk jalur melingkar di medan magnetik. Posisi keluar dan sudut dari lintasan garis lurus ini hampir identik pada kedua kasus tersebut.

Efek Medan Magnetik Bumi pada Layar CRT*

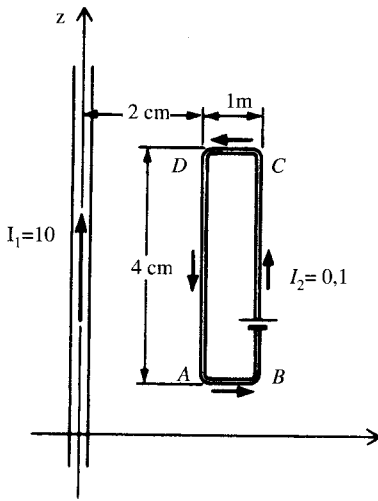
Medan magnetik alami bumi adalah $0,5 \times 10^{-4}$ Tesla. Komponen horisontal medan magnetik kira-kira menuju arah Utara-Selatan dan komponen vertikal menunjuk ke bawah di belahan bumi Utara dan ke atas di belahan bumi Selatan. (Sketsa garis-garis medan magnetik bumi ditunjukkan dalam gambar 14.8(a).

Dari hasil numerik yang diberikan dalam topik, terlihat bahwa kekuatan medan magnetik bumi cukup kuat untuk mempengaruhi lintasan berkas elektron di CRT. Pabrik-pabrik CRT selalu menyesuaikan batang magnetik yang dibelokkan dalam lingkungan yang menyerupai medan magnetik di daerah tujuan produk. Penggunaan CRT untuk menggantikan belahan bumi utara dengan belahan bumi selatan, dan sebaliknya, dapat menghasilkan pergeseran pusat layar sebesar 2 sampai 3 mm dan kemiringan diagonal dari sudut ke sudut sebesar 1 sampai 2 mm. Layar berwarna juga dapat kehilangan ketajamannya. Di samping itu, biasanya CRT di pabrik diperhalus dengan muka ke arah timur. Bahkan sekalipun CRT itu sudah disetel untuk belahan bumi yang benar, ia tetap terganggu jika diorientasikan dalam arah utara selatan. Televisipun akan terpengaruh. Namun, karena gambar pada televisi biasanya berubah secara cepat, pengaruh medan magnetik bumi tidak terasa.

Contoh 13.6 *Elemen pembawa arus dalam medan magnetik dihasilkan oleh sumber lain yang mengalami gaya magnetik. Contoh ini menunjukkan bagaimana menghitung gaya tersebut.*

Simpal persegi panjang $ABCD$, seperti ditunjukkan pada gambar 13.20, terletak di dekat suatu kawat panjang tak berhingga yang membawa arus 10 A. Tentukan gaya magnetik total pada simpal.

* K. Fitzgerald, "Don't move that CRT," *IEEE, Spectrum*, Desember, 1989, hal. 16.



Gambar 13.20 Simpal persegi panjang di dekat kawat panjang tak berhingga. Gaya total pada simpal dari medan magnetik kawat dihitung dalam Contoh 13.6.

Solusi

Medan magnetik H akibat kawat panjang tak berhingga diberikan oleh (13.6):

$$H = \frac{I_1}{2\pi x} \hat{y}$$

Menurut (13.26), gaya pada segmen AB diberikan di bawah ini:

$$F_{AB} = \int_{0,02}^{0,03} I_2 dx \hat{x} \times \frac{I_1 \mu_0}{2\pi x} \hat{y} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{3}{2}\right) \hat{z} = 0,81 \times 10^{-7} \hat{z} \text{ newton}$$

Gaya-gaya yang bekerja pada segmen BC , CD , dan DA didapatkan dengan cara yang sama:

$$F_{BC} = I_2 \times 0,04 \hat{z} \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(0,03)} \hat{y} = 2,67 \times 10^{-7} (-\hat{x}) \text{ newton}$$

$$F_{CD} = -F_{AB} = 0,81 \times 10^{-7} (-\hat{z}) \text{ newton}$$

$$F_{DA} = I_2 \times 0,04 (-\hat{z}) \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(0,02)} \hat{y} = 4,00 \times 10^{-7} \hat{x} \text{ newton}$$

Gaya total pada simpal adalah jumlah vektor dari keempat gaya yang diberikan di atas. Oleh karena itu,

$$F = F_{AB} + F_{BC} + F_{CD} + F_{DA} = 1,33 \times 10^{-7} \hat{z} \text{ newton}$$

Torsi Magnetik

Perhatikan simpal segi empat yang membawa arus searah I . Lup ditempatkan di medan magnetostatik seragam dengan $B = B_x \hat{x}$, seperti ditunjukkan pada Gambar 13.21a. Gaya-gaya magnetik pada masing-masing dari keempat sisinya diperoleh dengan menggunakan (13.26). Hasilnya adalah sebagai berikut:

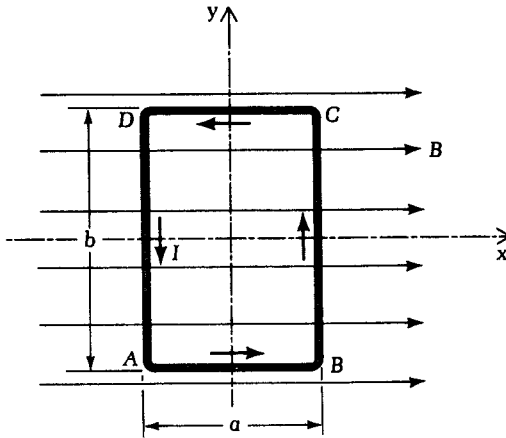
$$F_{AB} = 0$$

$$F_{BC} = -\hat{z} lb B_x$$

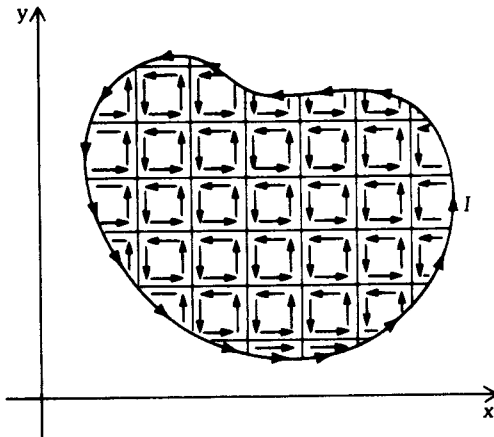
$$F_{CD} = 0$$

$$F_{DA} = \hat{z} lb B_x$$

Gambar 13.21(a) Simal persegi panjang pembawa arus di dalam suatu medan magnetik akan mengalami torsi, yang cenderung menyebabkan simpal berotasi di sekeliling sumbu-y.



Gambar 13.21(b) Simal bentuk tak beraturan pembawa arus di dalam medan magnetik akan sebanding dengan banyak subsimal persegi empat yang masing-masing membawa arus yang sama I .



Gaya total pada simpal ini sama dengan nol. Oleh karena itu, di bawah kondisi ini simpal tidak mempunyai pergerakan linier. Bagaimanapun juga, simpal akan mempertahankan putaran di sekeliling sumbu-y dalam arah yang ditentukan menurut aturan tangan kanan. Ibu jari tangan kanan menunjukkan arah \hat{y} , sedangkan telunjuk mengikuti arah dari arah simpal. Torsi adalah hasil interaksi antara simpal pembawa arus dan medan magnetostatik, yang diberikan di bawah ini:

$$\begin{aligned}
 T &= \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \frac{1}{2} a \hat{x} \times \mathbf{F}_{BC} - \frac{1}{2} a \hat{x} \times \mathbf{F}_{DA} = Iab B_x \hat{y} \\
 &= IAB_x \hat{y} \quad \text{untuk} \quad \mathbf{B} = B_x \hat{x}
 \end{aligned}
 \tag{13.29}$$

di mana $A = ab$ adalah luas simpal. **Momen magnetik** \mathbf{m} dari suatu simpal yang membawa arus didefinisikan sebagai berikut:

$$\mathbf{m} = AI\hat{\mathbf{u}} \quad (\text{momen magnetik dari simpal arus}) \quad (13.30)$$

di mana A adalah luas simpal dan $\hat{\mathbf{u}}$ adalah vektor satuan yang menunjukkan orientasi dari simpal saat menggunakan aturan tangan kanan; jari telunjuk tangan kanan mengikuti arus, sementara ibu jari menunjukkan arah $\hat{\mathbf{u}}$, yang mana tegak lurus pada simpal. Contoh di atas $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{z}}$, jika kita gunakan definisi \mathbf{m} yang diberikan pada (13.30), kita dapat menulis kembali torsi pada simpal persegi empat yang diberikan oleh (13.29) sebagai berikut:

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (\text{torsi pada simpal arus}) \quad (13.31)$$

Persamaan di atas diturunkan khusus untuk kasus simpal persegi empat dengan medan \mathbf{B} seragam dalam arah $\hat{\mathbf{x}}$. Kita dapat membuktikan bahwa hal tersebut juga dapat diterapkan pada bentuk simpal yang berubah-ubah (sepanjang bentuk simpal tersebut datar atau bidang) dengan \mathbf{B} diorientasikan pada arah yang sebarang. Jika \mathbf{B} mempunyai komponen $\hat{\mathbf{z}}$ selain komponen $\hat{\mathbf{x}}$ -nya, tidak terlalu sulit untuk membuktikan bahwa gaya-gaya pada sisi berlawanan dari simpal akan saling meniadakan satu sama lain dan bahwa mereka juga paralel pada bidang x - y . Jadi, komponen $\hat{\mathbf{z}}$ dari \mathbf{B} tidak akan memproduksi gaya ataupun torsi. Dengan mengikuti prosedur yang sama pada (13.29), kita dapat melihat bahwa pengaruh arah $\hat{\mathbf{y}}$ medan \mathbf{B} adalah untuk terjadinya torsi dengan arah $-\hat{\mathbf{x}}$, artinya,

$$\mathbf{T} = 0 \quad \text{untuk} \quad \mathbf{B} = B_z \hat{\mathbf{z}} \quad (13.32)$$

$$\mathbf{T} = IAB_y(-\hat{\mathbf{x}}) \quad \text{untuk} \quad \mathbf{B} = B_y \hat{\mathbf{y}} \quad (13.33)$$

Kombinasi (13.29), (13.32) dan (13.33), kita dapatkan (13.31).

Sekarang kita akan lihat bahwa agar (13.31) berlaku, bentuk dari simpal tidak diperdulikan. Perhatikan simpal bentuk tak beraturan yang ditunjukkan pada Gambar 13.21b. Lup dibagi menjadi banyak sublup persegi empat kecil. Dilihat dari atas, masing-masing sublup membawa arus yang berlawanan arah dengan jarum jam. Torsi untuk sublup ke- i diberikan oleh (13.31):

$$\mathbf{T}_i = \mathbf{m}_i \times \mathbf{B} = I A_i \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}$$

Jadi, \mathbf{T} total adalah jumlah dari semua sublup:

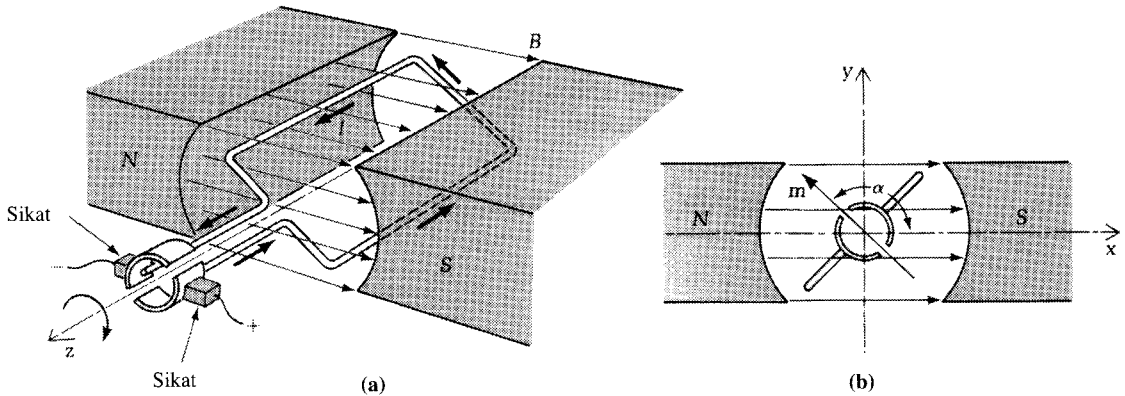
$$\mathbf{T} = \sum_i I A_i \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B} = I \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B} \sum_i A_i = I \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B} A$$

Persamaan di atas identik dengan (13.31). Perhatikan bahwa terdapat arus berlawanan pada batas bersama dari sublup yang bersebelahan dan bahwa mereka saling meniadakan satu sama lain. Jadi, dapat dimaklumi jika seseorang menganggap bahwa simpal arus bentuk tak beraturan ekuivalen dengan banyak simpal persegi empat kecil yang masing-masing membawa arus I yang sama. Kesimpulan ini melengkapi pembuktian kami untuk (13.31).

Motor DC (Arus Searah)

Motor arus searah, atau motor DC, adalah alat yang menggunakan (13.31) untuk memproduksi torsi dengan melewati arus searah melalui simpal yang dimasukkan ke dalam medan magnetostatik. Gambar 13.22 menunjukkan sketsa sederhana dari motor DC. Lup persegi empat N lilitan (disebut **armatur**) ditempatkan di dalam medan magnetik yang dihasilkan oleh koil yang lain (disebut **medan magnet**). Arus DC dilewatkan melalui simpal via dua buah semilup (disebut **komutator**), sehingga arus selalu mengalir dalam

Gambar 13.22 Motor Arus Searah (DC). (a) 2 buah cincin semi melingkar menjamin arus selalu mengalir dengan arah yang sama. (b) momen magnetik \mathbf{m} selalu mengarah menuju paruh atas dari bidang x - y .



satu arah dan momen magnetik selalu mempunyai komponen yang arahnya ke atas. Torsi pada simpal diberikan oleh (13.31)

$$T = NIAB \sin \alpha (-\hat{z})$$

Di mana α adalah sudut antara arah simpal dan medan magnetik. Perhatikan bahwa sudut α bervariasi antara 0 hingga π , maka $\sin \alpha$ selalu positif. Oleh karena itu, T selalu dalam arah $-\hat{z}$, dan motor DC selalu berotasi dengan arah yang sama.

13.3 ENERGI DAN INDUKTANSI MAGNETIK TERSIMPAN

Seperti halnya medan listrik menyatakan medan listrik tersimpan, medan magnetik juga menyatakan energi magnetik tersimpan. Diskusi mengenai teorema Poynting pada bab 2 sama seperti kasus energi magnetik yang disimpan U_H :

$$U_H = \frac{1}{2} \int \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} dV = \frac{1}{2} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV \quad (\text{energi magnetik tersimpan}) \quad (13.34)$$

Contoh 13.7 Piranti yang menahan medan magnetik juga menahan energi magnetik. Contoh ini menunjukkan bagaimana menghitung energi magnetik tersimpan dalam solenoid.

Tentukan medan magnetik tersimpan per satuan panjang dalam solenoid radius a dengan n lilitan per meter dan arus I dalam koil.

Solusi

Menurut (13.10), kita mengetahui bahwa medan magnetik di solenoid adalah

$$\mathbf{H} = \hat{z} nI$$

Substitusi ke dalam (13.34) akan menghasilkan energi magnetik tersimpan per satuan panjang:

$$U_H = \frac{1}{2} \mu n^2 I^2 (\pi a^2) \text{ joule per meter} \quad (13.35)$$

Contoh 13.8 *Alat yang umum dipakai untuk mempertahankan energi magnetik adalah toroid. Contoh ini menunjukkan bagaimana menghitung energi magnetik yang disimpan untuk toroid tipis.*

Tentukan energi magnetik tersimpan total untuk toroid yang ditunjukkan dalam Gambar 13.8. Asumsikan bahwa $b \gg a$.

Solusi Medan magnetik di dalam toroid diberikan oleh (13.13) untuk $b \gg a$. Oleh karena itu, dengan menggunakan (13.34), kita dapatkan:

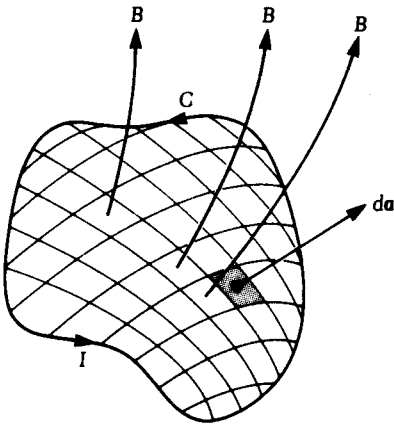
$$U_H = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{NI}{2\pi b} \right)^2 (\pi a^2)(2\pi b) = \frac{1}{4} \mu (NI)^2 \left(\frac{a^2}{b} \right) \text{ joule} \quad (13.36)$$

Induktansi

Misalkan arus searah I mengalir di dalam kontur tertutup, seperti ditunjukkan 13.23. Arus tersebut akan menghasilkan medan magnetik yang berhubungan dengan simpal. Fluks Total dari medan B yang bergerak melalui simpal, disebut **fluks linkage** ψ , dapat ditentukan dengan integral berikut:

$$\psi = \int da \cdot B \quad (\text{definisi fluks linkage}) \quad (13.37)$$

Gambar 13.23 Arus yang mengalir di dalam lup akan membangkitkan medan magnetik yang bergerak melalui lup. Induktansi diri didefinisikan sebagai fluks magnetik linkage total dibagi I .



Di mana da adalah luas diferensial yang diorientasikan dalam arah yang ditunjukkan. Saat simpal tertutup terdiri dari N lilitan dan membawa arus I yang sama, fluks linkage total adalah $\Lambda = N\psi$. Induktansi L dari simpal didefinisikan sebagai rasio dari fluks linkage magnetik total Λ dengan arus I pada simpal.

$$L = \frac{\Lambda}{I} = \frac{N\psi}{I} \quad (\text{definisi induktansi}) \quad (13.38)$$

Satuan dari induktansi adalah weber per ampere, yang juga disebut henry.

Fluks yang dihasilkan oleh I juga dapat terangkai dengan simpal lain di dekatnya. Terdapat 2 simpal dengan arus I_1 dan I_2 . Fluks yang dihasilkan oleh I_1 , yang terangkai

dengan simpal yang membawa I_2 , disebut ψ_{21} . Induktansi bersamanya didefinisikan sebagai

$$M_{21} = \frac{N_2 \psi_{21}}{I_1} \quad (\text{definisi induktansi bersama } M_{21}) \quad (13.39a)$$

Secara simetris, kita dapat mendefinisikan induktansi bersama M_{12} , yang terhubung dengan fluks linkage pada simpal 1 akibat arus I_2 :

$$M_{12} = \frac{N_1 \psi_{12}}{I_2} \quad (\text{definisi induktansi bersama } M_{12}) \quad (13.39b)$$

Kita akan buktikan bahwa

$$M_{12} = M_{21} \quad (\text{hasil yang penting tentang induktansi bersama}) \quad (13.40)$$

dengan menggunakan konsep energi.

Ingat bahwa kapasitor dapat dipandang sebagai sistem yang mempertahankan muatan-muatan listrik. Atau, seperti yang ditunjukkan pada subbab 10.3, kapasitor dapat didefinisikan sebagai sistem yang menyimpan energi listrik. Pada bagian ini kita akan definisikan induktansi dengan menggunakan (13.38). Kita dapat melihat bahwa induktor dapat didefinisikan sebagai alat untuk menyimpan energi magnetik. Khususnya, satu definisi yang sebanding untuk induktansi L adalah:

$$L = \frac{U_H}{\frac{1}{2} I^2} \quad (\text{definisi lain dari induktansi}) \quad (13.41)$$

Pada uraian vektor potensial A yang didefinisikan pada subbab 7.1, kita akan gunakan (13.34) untuk menulis

$$\begin{aligned} U_H &= \frac{1}{2} \iiint_V dV (\nabla \times A) \cdot H \\ &= \frac{1}{2} \left[\iiint_V dV \nabla \cdot (A \times H) + \iiint_V dV A \cdot (\nabla \times H) \right] \end{aligned} \quad (13.42)$$

di mana kita gunakan identitas vektor sebagai berikut:

$$\nabla \cdot (A \times H) = H \cdot (\nabla \times A) - A \cdot (\nabla \times H) \quad (13.43)$$

Teorema divergensi dapat mengganti suku pertama pada (13.42) menjadi integral permukaan. Permukaan integral adalah nol karena permukaan tersebut harus menutupi seluruh energi magnetik. Oleh karena itu, permukaan harus terletak di tak berhingga di mana A dan H adalah nol. Pada suku kedua dari (13.42), hukum Ampere (13.2) menghasilkan $\nabla \times H = J$, di mana hasilnya adalah integran dengan bentuk $A \cdot J dV$. Kita dapat menulis $J dV = I d\ell$ (ampere per meter), di mana $d\ell$ melambangkan filamen diferensial dan arah arus yang mengalir pada simpal seperti ditunjukkan pada Gambar 13.23. Integral volume sekarang menjadi integral garis di sekeliling simpal. Kita kemudian akan mendapatkan

$$U_H = \frac{1}{2} \oint A \cdot d\ell \quad (13.44)$$

Dengan memakai teorema Stoke dan mensubstitusikannya ke dalam (13.41), kita dapatkan

$$L = \frac{1}{I} \iint \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{I} \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

yang terlihat identik dengan (13.38) untuk lilitan tunggal ($N=1$) dari simpal.

Induktansi bersama M_{12} dan M_{21} dapat didefinisikan dengan cara serupa dengan definisi pengganti untuk induktansi diri sebagai berikut:

$$M_{12} = \frac{1}{I_1 I_2} \iiint_V \mu \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_2 dV \quad (13.45a)$$

$$M_{21} = \frac{1}{I_2 I_1} \iiint_V \mu \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{H}_1 dV \quad (13.45b)$$

yang sebanding dengan (13.39). Jelas bahwa (13.40) diperoleh langsung dari (13.45).

Contoh 13.9 *Alat yang dapat menyimpan energi magnetik disebut induktor. Contoh ini menunjukkan bagaimana menghitung induktansi pada induktor solenoid.*

Hitung induktansi per satuan panjang dari solenoid radius a dengan n lilitan per satuan panjang.

Solusi Energi magnetik tersimpan dari solenoida ini didapat dalam Contoh 13.7. Dengan menggunakan definisi L yang diberikan oleh (13.41), kita dapatkan induktansi per unit panjang dari solenoid sebagai berikut:

$$L = \mu n^2 \pi a^2 \text{ henry per meter} \quad (13.46)$$

Contoh 13.10 *Contoh ini menunjukkan bagaimana menghitung induktansi dari induktor toroid.*

Tentukan induktansi toroid yang ditunjukkan dalam Gambar 13.8. Asumsikan bahwa $b \gg a$.

Solusi Energi magnetik tersimpan total di dalam toroid ini ditentukan pada Contoh 13.8. Menggunakan definisi (13.41) untuk L , kita dapatkan

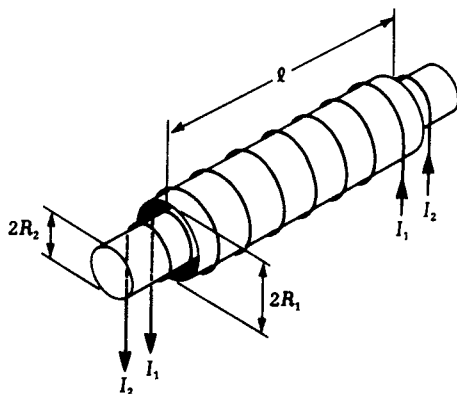
$$L = \frac{\mu N^2 a^2}{2b} \quad (13.47)$$

Toroid biasa digunakan sebagai induktansi untuk aplikasi seperti filter lewat pita (*band pass filter*). Perusahaan telepon membuat ratusan koil toroid setiap tahun untuk digunakan di dalam filter yang mengenal frekuensi dengan tombol tekan.*

Contoh 13.11 *Ketika 2 buah induktor berdekatan satu sama lain, medan magnetik dihasilkan oleh salah satu induktor dapat dirangkai dengan yang lain, dan sebaliknya. Derajat linkage bersama (kopling) diukur menurut induktansi bersama di antaranya. Contoh ini menunjukkan bagaimana menghitung induktansi bersama antara 2 buah induktor solenoid.*

* G. W. Ciszak, "More efficient winding of toroidal coils," *The Western Electric Engineer* 25, no. 3 (1981): 11.

Gambar 13.24 Dua buah solenoid koaksial mempunyai induktansi bersama $M_{12} = M_{21}$ diberikan oleh (13.48)



Perhatikan 2 buah solenoid konsentris yang masing-masing memiliki radius R_1 dan R_2 . Gambar 13.24 menunjukkan konfigurasi dari 2 buah solenoid tersebut. Asumsikan bahwa keduanya memiliki panjang yang sama ℓ . Panjang ℓ jauh di atas radius R_1 dan R_2 , sehingga pengaruh ujung dapat diabaikan. Tentukan induktansi bersama dari solenoid ini. Solenoid terluar mempunyai N_1 lilitan, dan yang di dalam mempunyai N_2 lilitan.

Solusi

Fluks yang dihasilkan oleh arus I_1 di solenoid terluar diperoleh dari (13.10b):

$$B_1 = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{\ell}$$

Jadi, fluks linkage yang melalui masing-masing lilitan koil dari solenoid dalam ini akan dinyatakan di bawah ini:

$$\psi_{21} = \frac{\mu_0 N_1 I_1 \pi R_2^2}{\ell}$$

Menggunakan (13.39a), kita dapatkan induktansi bersama M_{21} :

$$M_{21} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi R_2^2}{\ell} \quad (13.48a)$$

Kita juga dapat menyelesaikan permasalahan ini dengan cara lain — artinya, pertama-tama kita dapat menghitung medan akibat I_2 :

$$B_2 = \frac{\mu_0 N_2 I_2}{\ell}$$

Fluks linkage yang melalui masing-masing lilitan koil dari solenoid luar adalah B_2 kali luas penampang melintang solenoid *dalam*, bukan solenoid luar karena medan magnetik akibat I_2 di luar solenoid dalam adalah nol (lihat 13.10a). Akibatnya, kita dapatkan

$$\psi_{12} = \frac{\mu_0 N_2 I_2 \pi R_1^2}{\ell}$$

Dengan menggunakan (13.39b), kita dapatkan induktansi bersama M_{12} :

$$M_{12} = \frac{\mu_0 N_2 N_1 \pi R_1^2}{\ell} \quad (13.48b)$$

Ingat bahwa $M_{12} = M_{21}$

Koefisien Kopling

Perhatikan koil 1 di mana arus I_1 akan menghasilkan fluks linkage ψ_{11} . Koil 1 menggandeng koil 2 dengan fraksi ψ_{11} . Kita tulis

$$\psi_{21} = \kappa_1 \psi_{11}$$

Jelas bahwa $|\kappa_1|$ adalah lebih kecil atau sama dengan satu. Induktansi diri dari koil 1 adalah:

$$L_1 = \frac{N_1 \psi_{11}}{I_1}$$

Induktansi bersama antara kedua koil adalah:

$$M_{21} = \frac{N_2 \kappa_1 \psi_{11}}{I_1} = \kappa_1 \frac{N_2}{N_1} L_1$$

demikian juga

$$M_{12} = \kappa_2 \frac{N_1}{N_2} L_2$$

Karena $M_{12} = M_{21} = M_0$, kita dapatkan

$$M_0^2 = \kappa_1 \kappa_2 L_1 L_2$$

atau

$$M_0 = \pm \kappa \sqrt{L_1 L_2}$$

di mana

$$\kappa = \pm \sqrt{\kappa_1 \kappa_2}$$

disebut koefisien kopling antara kedua koil. Koefisien mempunyai nilai antara -1 hingga 1 . Dengan demikian, maksimum M_0 antara kedua koil ini adalah $(L_1 L_2)^{1/2}$.

Induktansi Saluran Koaksial

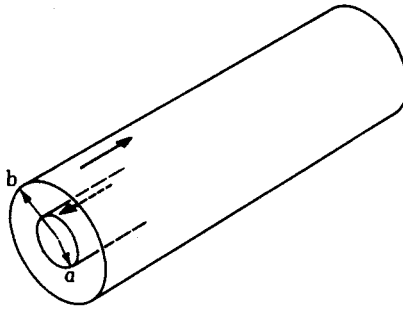
Saluran koaksial yang ditunjukkan pada gambar 13.3a dapat dipandang sebagai rangkaian simpal tertutup, terkecuali bahwa simpal tersebut dihubungkan di tak berhingga. Arus pada konduktor dalam mengalir dalam satu arah dan mengalir kembali melalui konduktor luar oleh suatu hubungan di tak berhingga. Karena rangkaian adalah rangkaian simpal tertutup, kita seharusnya dapat menemukan induktansi saluran koaksial. Untuk menyederhanakan, kita asumsikan bahwa arus hanya mengalir di lapisan tipis pada $r = a$ dan $r = b$, secara berturut-turut, sehingga model saluran koaksial akan seperti yang ditunjukkan pada gambar 13.25.

Karena medan magnet muncul pada saluran koaksial, kita mengetahui bahwa energi magnetik akan disimpan di sana. Medan magnetik diberikan oleh (13.7):

$$H_\phi = \begin{cases} \frac{I}{2\pi\rho} & b > \rho > a \\ 0 & \text{sembarang tempat} \end{cases}$$

Substitusi pernyataan di atas pada (13.34), akan kita dapatkan

$$U_H = \frac{1}{2} \mu \int_0^{2\pi} d\phi \int_a^b \rho d\rho \frac{I^2}{4\pi^2 \rho^2} = \frac{\mu I^2}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$



Gambar 13.25 Saluran koaksial yang terbuat dari 2 buah kulit silinder tipis mempunyai induktansi yang diberikan oleh (13.49)

Ini akan menghasilkan energi magnetik tersimpan per satuan panjang dari saluran koaksial. Akibatnya, kita dapat menghitung induktansi per satuan panjang untuk garis dari (13.41):

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \left(\frac{b}{a} \right) \quad (13.49)$$

Induktansi per satuan panjang juga timbul dalam representasi saluran transmisi dari saluran koaksial pada (6.19) bab 6.

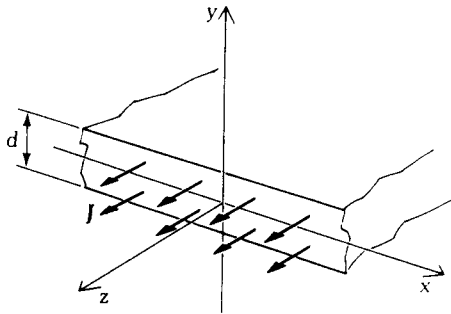
RINGKASAN

1. Medan magnetostatik dihasilkan oleh arus searah. Hukum Ampere menghubungkan medan \mathbf{H} dan arus I .
2. Untuk struktur pembawa arus yang simetris, seperti kawat, saluran koaksial, keping, solenoid, dan koil toroid, medan \mathbf{H} hasilnya dapat ditentukan dengan menggunakan hukum Ampere bentuk integral, yaitu persamaan (13.5).
3. Untuk elemen pembawa arus biasa, medan \mathbf{H} hasilnya dapat ditentukan dengan menggunakan hukum Biot-Savart, yaitu persamaan (13.16).
4. Partikel bermuatan yang bergerak di dalam medan magnetik akan mengalami gaya yang diberikan oleh persamaan (13.23). Gaya magnetik ini selalu tegak lurus dengan kecepatan partikel. Akibatnya, ia akan mengubah arah pergerakan partikel tetapi tidak mengubah kecepatan partikel.
5. Elemen pembawa arus akan mengalami gaya magnetik ketika ditempatkan dalam suatu medan magnetik luar (medan yang tidak dibangkitkan oleh arusnya sendiri).
6. Koil pembawa arus mengalami gaya magnetik dan torsi magnetik ketika ditempatkan dalam medan magnetik luar.
7. Keberadaan medan magnetik di suatu daerah tertentu menandakan bahwa energi disimpan di daerah tersebut. Piranti yang mempertahankan energi magnetik disebut induktor.
8. Induktansi dari suatu induktor dapat didefinisikan sebagai rasio antara energi magnetik tersimpan dan arus yang menghasilkan medan magnetik pada piranti tersebut. Lihat persamaan (13.41).

Soal-soal

- 13.1 Tentukan medan magnetik \mathbf{H} di tengah-tengah simpal segi empat yang membawa arus I . Sisi simpal segi empat adalah b meter.
- 13.2 Simpul melingkar yang mempunyai radius a dan yang membawa arus I menghasilkan kuat medan magnetik di pusatnya yang sama dengan kuat medan magnetik di pusat simpal segi empat yang mempunyai sisi b dan yang membawa arus yang sama I . Tentukan rasio b terhadap a .

- 13.3 Perhatikan keping konduktor besar dengan ketebalan d yang ditempatkan pada $-d/2 \leq y \leq d/2$, seperti ditunjukkan pada Gambar P13.3. Rapat arus J yang seragam mengalir pada arah \hat{z} . Tentukan \mathbf{H} di semua daerahnya.

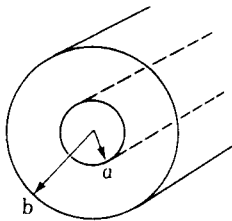


Gambar P13.3

- 13.4 Medan magnetik bumi di kutub utara magnetik diperkirakan sebesar 0,62 G ($1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ Wb/m}^2$). Asumsikan bahwa medan magnetik ini dihasilkan oleh simpal arus yang mengalir di sepanjang ekuator. Perkirakan magnitudo arus ini. Radius bumi kurang lebih 6.500 km.
- 13.5 Dalam daerah silinder, rapat arus diberikan sebagai berikut:

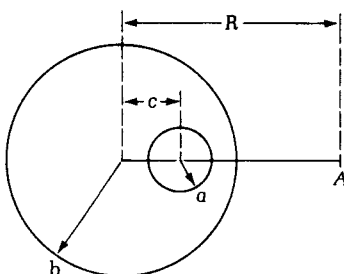
$$J_s = \begin{cases} 2 \text{ A/m}^2 & \text{untuk } 0 < \rho < a \\ 4 \text{ A/m}^2 & \text{untuk } a < \rho < b \\ 0 & \text{untuk } b < \rho \end{cases}$$

Tentukan medan \mathbf{H} di ketiga daerah tersebut (lihat Gambar P13.5).



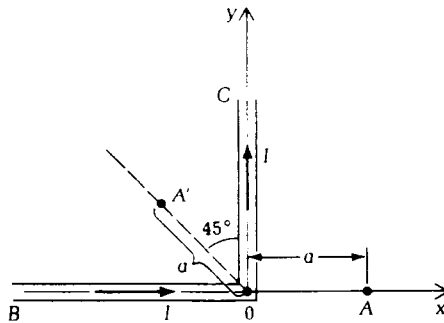
Gambar P13.5

- 13.6 Konduktor tabung panjang tak berhingga mempunyai jari-jari luar b dan jari-jari dalam a yang diimbangi oleh jarak c dari sumbu silinder luar, seperti ditunjukkan pada Gambar P13.6. Konduktor tabung ini membawa arus searah sebesar I ampere. Tentukan medan \mathbf{H} pada titik A seperti ditunjukkan pada gambar. Petunjuk: Tinjau tabung tersebut sebagai superposisi dari 2 buah silinder yang mempunyai radius b dan a dan membawa rapat arus seragam J dengan arah yang berlawanan.



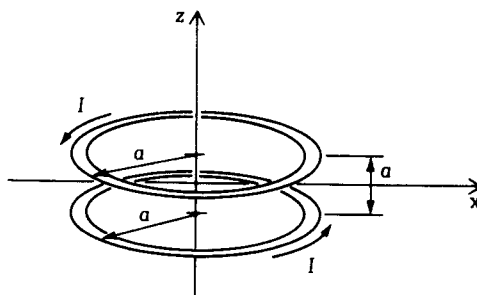
Gambar P13.6

- 13.7** Kawat panjang tak berhingga dibengkokkan membentuk sudut 90° , seperti ditunjukkan pada Gambar P13.7. Arus searah I mengalir dalam kawat. Pada titik A tentukan medan \mathbf{H} akibat arus ini. Ikuti langkah yang diberikan di bawah:
- Gunakan hukum Biot-Savart untuk menyatakan medan \mathbf{H} pada A akibat segmen khas kawat dy pada sumbu kawat. Nyatakan medan di dalam koordinat empat khas persegi panjang!
 - Integrasikan hasil yang didapat pada (a) untuk medan \mathbf{H} pada A akibat kawat semi tak berhingga OC . Catatan: Untuk mempermudah integrasi, misalkan $y = a \tan \theta$, sehingga $dy = a \sec^2 \theta d\theta$.
 - Tentukan medan \mathbf{H} pada A akibat kawat semi tak berhingga BO .
 - Tambahkan hasil yang didapat pada (b) dan (c) untuk menghasilkan medan total pada A akibat arus di kawat BOC .



Gambar P13.7

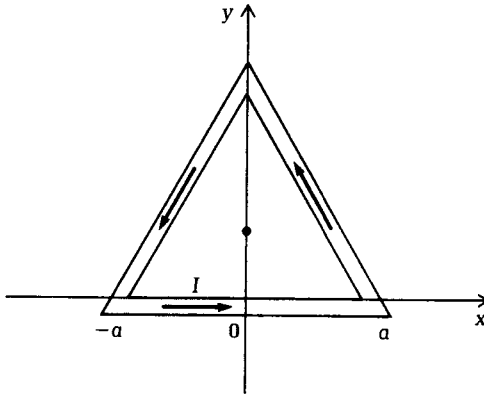
- 13.8** Ikuti prosedur yang sama dengan prosedur di Soal 13.7 untuk menentukan medan \mathbf{H} pada titik A' , seperti ditunjukkan pada Gambar P13.7.
- 13.9** Perhatikan simpal melingkar yang membawa arus I melawan arah jarum jam, seperti ditunjukkan dalam Gambar 13.11. plot medan magnetik H_z pada sumbu z untuk $-a/2 < z < a/2$. Tentukan nilai z_0 dalam a , sehingga, jika $|z| < z_0$, maka H_z seragam dalam rentang 10% dari nilai H_z di pusat tengah simpal.
- 13.10** Untuk memperbaiki keseragaman medan magnetik di sepanjang sumbu simpal melingkar (lihat Soal 13.9), kita dapat menggunakan dua buah simpal identik yang dipisahkan oleh jarak yang sama dengan radiusnya, seperti ditunjukkan pada Gambar P13.10. Pasangan simpal yang membawa arus ini disebut **koil Helmholtz**. Tentukan H_z sebagai fungsi dari z pada arah koil Helmholtz. Plot H_z untuk $-a < z < a$. Tentukan dalam suku a , nilai z_0 sehingga dalam jangkauan $|z| < z_0$, H_z akan seragam di dalam 10% medan magnetik di tengah-tengah kedua koil. Bandingkan hasilnya dengan yang didapat pada soal 13.9 untuk simpal tunggal.



Gambar P13.10 Koil Helmholtz

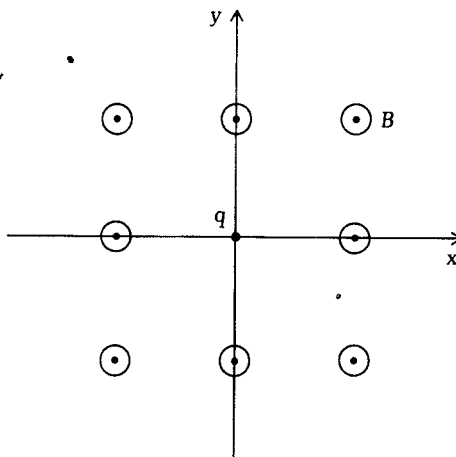
- 13.11** Arus searah I mengalir di rangkaian segitiga ekilateral, seperti ditunjukkan pada Gambar P13.11. Panjang pada masing-masing sisi adalah $2a$. Tentukan medan H di pusat segitiga. Petunjuk:

$$\int_{-a}^a \frac{dx}{(x^2 + b^2)^{3/2}} = \frac{2a}{b^2(a^2 + b^2)^{1/2}}$$



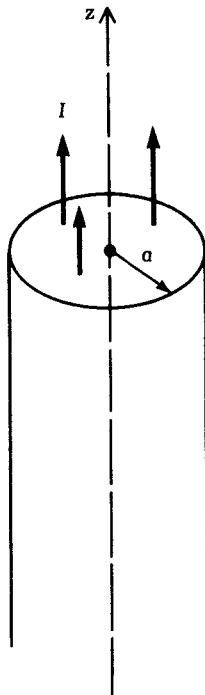
Gambar P13.11

- 13.12** Muatan permukaan ρ_s C/m² terdistribusi seragam dalam piringan rekaman. Radius dalam piringan adalah a dan radius luarnya adalah b . Piringan tersebut berputar dengan kecepatan angular konstan ω rad/s searah jarum jam. Tentukan medan magnetik di pusat piringan akibat muatan permukaan pada piringan yang berputar tersebut. Abaikan keberadaan batang logam pada meja pemutar.
- 13.13** Medan magnetik bumi di ekuator mendekati $B = 10^{-4}$ Wb/m². Hitung frekuensi siklotron dari elektron dalam ionosfir.
- 13.14** Karena uranium alami mengandung sejumlah kecil Uranium 234, pemisah isotop elektromagnetik juga dapat menghasilkan ²³⁴U. Jika jari-jari dari jalur melingkar untuk partikel ²³⁸U (Lihat Gambar 13.16) sama dengan 10 m, di manakah seharusnya kita menempatkan kolektor untuk partikel ²³⁵U dan ²³⁴U? Nyatakan jarak dalam meter.
- 13.15** Berdasarkan Gambar 13.19, medan magnetik berubah dari 5×10^{-4} menjadi 10^{-3} Wb/m². Semua parameter lain tetap tidak berubah. Tentukan:
- Posisi elektron pada sisi keluar dari daerah medan magnetik
 - Sudut keluar (sudut antara lintasan dan sumbu- x setelah elektron tersebut melewati medan magnetik).
- 13.16** Muatan positif q dengan massa m terletak di titik asal pada $t = 0$ di dalam medan magnetik seragam $B = B_0 \hat{z}$, seperti ditunjukkan dalam Gambar P13.16.



Gambar P13.16

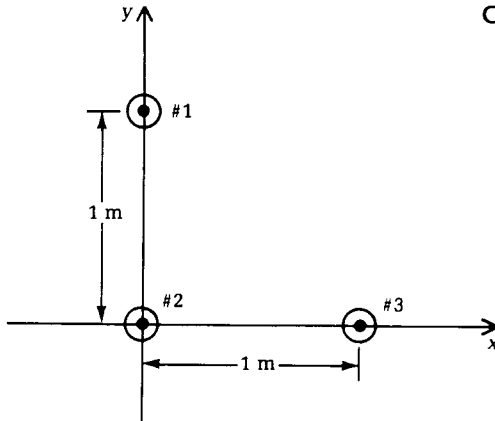
- (a). Berapakah koordinat posisi partikel sebagai fungsi t , jika $\mathbf{v} = v_0 \hat{\mathbf{y}}$ pada $t = 0$? Nyatakan dalam suku-suku parameter yang diberikan. Seperti apakah bentuk geometris lintasannya?
- (b). Ulangi (a) jika $\mathbf{v} = v_0 \hat{\mathbf{y}} + v_z \hat{\mathbf{z}}$ pada $t = 0$.
- 13.17** Dua buah kawat paralel membawa arus sebesar 100 A dalam arah yang berlawanan. Pada masing-masing kawat tentukan gaya per unit panjang akibat medan magnetik yang dihasilkan oleh kawat yang lain. Apakah gaya tersebut tolak menolak atau tarik menarik? Asumsikan bahwa garis-garis tersebut terpisah sejauh 1,5 m.
- 13.18** Dua buah simpal melingkar identik dengan radius a dipisahkan sejauh d , di mana $d \ll a$. Salah satu koil membawa arus I searah jarum jam., dan yang lain membawa arus I ampere melawan arah jarum jam. Tentukan gaya antara koil-koil ini. Petunjuk: Karena koil-koil ini berdekatan, anda dapat memperkirakan medan magnetik yang terjadi pada salah satu koil dan diproduksi oleh arus pada koil lainnya sebagai $H_1 = I_2/(2\pi d)$, yaitu medan akibat kawat panjang tak berhingga. Misalkan $a = 1$ m dan $d = 0,05$ m. Berapakah jumlah arus yang diperlukan untuk menghasilkan gaya 9,8 N?
- 13.19** Lup melingkar dengan jari-jari 0,5 m dan 100 lilitan dieksitasi oleh arus searah 2 A. Lup ini ditempatkan pada medan magnetik bumi, yang diperkirakan sebesar 5×10^{-5} Wb/m² dan menunjuk arah utara. Bagaimana Anda mengorientasikan simpal ini untuk menghasilkan torsi maksimum? Berapa nilai torsi ini? Tentukan orientasi simpal sehingga simpal tersebut tidak mengalami torsi.
- 13.20** Rangkaian segitiga yang diuraikan dalam Soal 13.11 ditempatkan pada medan luar seragam $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{x}}$. Tentukan gaya pada ketiga sisinya dan torsi pada seluruh rangkaian tersebut. Sertakan amplitudo dan arah dari gaya-gaya dan torsi tersebut. Jelaskan bagaimana rangkaian tersebut akan bereaksi jika ia bebas bergerak dan berputar.
- 13.21** Konduktor panjang tak berhingga dengan jari-jari a membawa arus searah I seperti ditunjukkan dalam Gambar P13.21.



Gambar P13.21

- (a). Tentukanlah \mathbf{H} dalam daerah $0 < \rho < a$.
- (b). Hitung energi magnetik tersimpan per satuan panjang dalam daerah $0 < \rho < a$.
- (c). Tentukan induktansi per satuan panjang dari konduktor yang harus ditinjau hanyalah energi magnetik di daerah $0 < \rho < a$.

13.22 Tiga buah Kawat paralel panjang tak berhingga masing-masing membawa arus sebesar 10A dalam arah \hat{z} , seperti ditunjukkan pada Gambar P13.22. Tentukan gaya per unit panjang yang bekerja pada kawat Nomor 3 akibat medan magnetik yang dihasilkan oleh kedua kawat lainnya. Berikan nilai numerik dari gaya, arahnya dan satuannya.



Gambar P13.22

13.23 Medan magnetik dalam saluran koaksial dinyatakan oleh

$$H_{\phi} = \begin{cases} 1/\rho & \text{untuk } 0,1 \text{ m} < \rho < 0,2 \text{ m} \\ 0 & \text{di tempat lain} \end{cases}$$

Mediumnya adalah udara. Berapakah energi magnetik tersimpan total per satuan panjang pada saluran tersebut? Berikan nilai numerik dan satuannya.

- 13.24** (a) Hitung energi magnetik tersimpan per satuan panjang dari konduktor keping sejajar yang ditunjukkan pada Gambar 13.5
- (b) Jika keping sejajar tersebut digunakan sebagai kapasitor untuk menyimpan energi listrik, tentukan tegangan V_0 sehingga energi listrik tersimpannya akan sama dengan energi magnetik tersimpan yang diperoleh di (a). Misalkan $I = 1 \text{ A}$, $w = 10 \text{ cm}$. Nyatakan V_0 dalam volt. Mediumnya adalah udara.
- 13.25** Hitung induktansi per satuan panjang dari saluran koaksial yang ditunjukkan dalam Gambar 13.3a.
- 13.26** Hitung induktansi per satuan panjang dari konduktor keping sejajar yang ditunjukkan dalam Gambar 13.5.

14 BAHAN MAGNETIK DAN RANGKAIAN MAGNETIK

Bahan magnetik digunakan pada peralatan tradisional dan modern. Magnet permanen telah digunakan manusia selama lebih dari 5000 tahun seperti medium perekam pada komputer dan peralatan audio dan video. Pada bab ini pembahasannya ditekankan pada bahan feromagnetik dan aplikasinya.

Dalam mendesain peralatan magnetik, seperti head perekam pada disk drive komputer atau transformator dalam sistem tenaga, kita harus mengetahui besarnya eksitasi yang dibutuhkan untuk mendapatkan kekuatan medan magnet. Alasan inilah yang ingin diketahui pada pembahasan rangkaian medan magnet pada bab ini. Kita akan lihat bahwa permasalahan rangkaian magnetik analog dengan permasalahan rangkaian magnetik.

14.1 BAHAN MAGNETIK

Pada bab 13 telah kita diskusikan beberapa contoh tentang bagaimana mendapatkan medan magnet dari distribusi arus yang telah diketahui. Rumus utama yang berhubungan dengan medan magnet dan arus adalah hukum Ampere:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (14.1a)$$

atau

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = I$$

Persamaan hukum Ampere

(14.1b)

Ingat bahwa arus berhubungan dengan \mathbf{H} , kekuatan medan magnet. Ketika kita mempelajari interaksi antara medan magnet dan partikel pelepasan atau kawat pembawa arus, gaya Lorentz tidak dinyatakan dengan \mathbf{H} tetapi dengan \mathbf{B} , kerapatan fluks magnet:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (14.2a)$$

atau

$$\mathbf{F} = I d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B} \quad (14.2b)$$

Kuat medan H dan rapat fluks B dihubungkan dengan:

$$\boxed{B = \mu H} \quad (\text{hubungan antara medan } B \text{ dan medan } H) \quad (14.3)$$

Bahan yang berbeda memiliki nilai μ yang berbeda, yang merupakan sifat magnetik medium tersebut. Sifat ini disebut **permeabilitas magnetik** atau **permeabilitas** dari suatu medium. Pada hampa udara:

$$\boxed{\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}} \quad (\text{permeabilitas hampa udara})$$

Medium lain bisa saja memiliki permeabilitas yang lebih besar atau lebih kecil daripada permeabilitas hampa udara.

Pada beberapa aplikasi praktis, untuk tujuan tertentu kita perlu mendesain konfigurasi koil secara khusus untuk menghasilkan medan magnet. Terkadang kita menginginkan medan magnet B yang kuat dengan arus pada koil yang sekecil mungkin. Karena arus sebanding dengan H dan B sebanding dengan μH , pertimbangan ini sering menuntut agar bahan memiliki permeabilitas tinggi. Beberapa bahan memiliki permeabilitas yang lebih tinggi dibandingkan dengan μ_0 . Bahan-bahan ini disebut **feromagnetik**. Sekarang kita akan menelaah mengapa bahan memiliki μ yang berbeda-beda dibandingkan nilainya pada kondisi hampa udara.

Pada dasarnya, kita dapat menyebut bahwa, karena terjadinya interaksi antara medan magnet eksternal dan pergerakan pelepasan atom bahan, fluks magnetik B bisa meningkat atau menurun dari nilai ruang bebasnya, sehingga dikatakan bahwa μ lebih besar atau lebih kecil dari μ_0 . Medan magnetik internal terutama dihasilkan oleh pengorbitan elektron mengelilingi nukleusnya atau perputaran elektron itu sendiri. Kedua masalah tersebut analogi dengan simpal arus yang menghasilkan medan B tanpa eksitasi arus eksternal. Gambar 14.1 menerangkan hal tersebut.

Simpal arus ekivalennya merupakan momen magnetik m , yang didefinisikan (13.30):

$$\boxed{m = I\pi a^2 \hat{z}} \quad (\text{momen magnetik simpal arus}) \quad (14.4)$$

Di mana πa^2 adalah luas daerah simpal. Simpal ini berukuran atomik atau mikroskopik. Untuk volume makroskopik yang terdiri dari beberapa simpal semacam ini, kita dapat memvisualisasikan keadaannya menjadi sama seperti yang ditunjukkan dalam Gambar 14.2. Kita dapat menggunakan pendekatan kolomnya sebagai solenoid. Kemudian diasumsikan bahwa ada N simpal dalam kolom; berdasarkan persamaan (13.10b), maka medan magnet H dinyatakan oleh:

$$H_z = \frac{N}{\ell} I \quad (14.5)$$

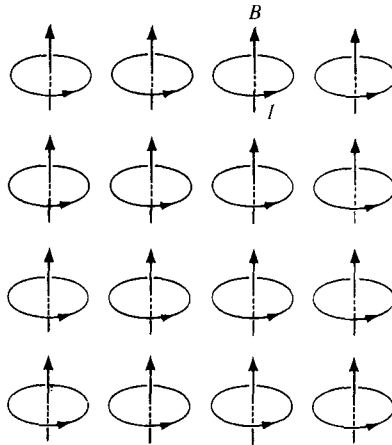
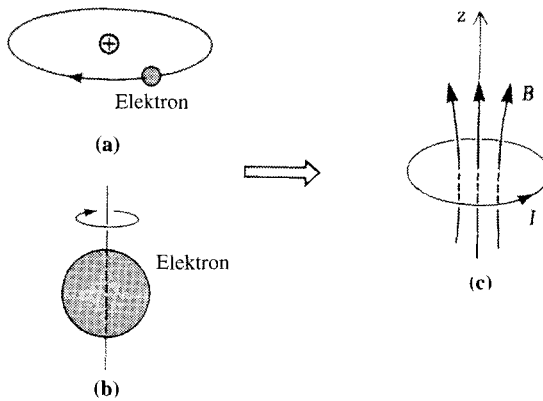
di mana ℓ adalah panjang kolom. Jika ditulis kembali maka persamaan tersebut, menjadi:

$$H_{\text{internal}} = \frac{NI(\pi a^2)\hat{z}}{\ell(\pi a^2)} = \frac{Nm}{\text{volume}} = M \quad (14.6)$$

Perhatikan bahwa M adalah rapat momen magnetik, yang sebanding dengan jumlah momen magnet m per satuan volume. Kita perhatikan bahwa intensitas medan magnet yang dihasilkan oleh perputaran elektron ini sama dengan rapat medan magnet. Sehingga fluks magnet yang disebabkan oleh H internal adalah

$$\boxed{B_{\text{internal}} = \mu_0 M} \quad (14.7)$$

Gambar 14.1 (a) Orbit elektron atau (b) perputaran elektron yang sebanding dengan (c) simpal arus yang memiliki momen magnet dalam arah \hat{z} .



Gambar 14.2 Dalam volume yang berisi beberapa momen magnet, tiap kolom menyerupai solenoid di mana telah diketahui medan magnet.

Ingat bahwa (14.6) dan (14.7) merupakan persamaan yang menunjukkan medan internal yang diakibatkan oleh perputaran elektron dalam bahan.

Dalam kelas bahan yang disebut bahan **diamagnetik**, medan magnet yang dihasilkan oleh orbital dan perputaran elektron dapat ditiadakan sepenuhnya. Bagaimanapun, di bawah medan magnet eksternal, kombinasi dari interaksi medan magnet, elektron dan gaya mekanika kuantum mengganggu kesetimbangan, sehingga medan magnet hasil orbital dan perputaran elektron tidak dapat ditiadakan sepenuhnya. Sebagai hasilnya, rapat momen magnet diinduksikan dalam suatu medium berlawanan dengan medan magnet eksternal terpakai. Jadi pada kasus ini, total rapat fluks (eksternal dan yang diinduksikan) dapat dinyatakan oleh:

$$B_{\text{total}} = \mu_0(H_{\text{eksternal}} + M) \quad (14.8)$$

di mana M berlawanan dengan $H_{\text{eksternal}}$ dalam bahan diamagnetik. Magnitudo dari M sebanding dengan H eksternal yang diterapkan:

$$M = \chi_m H_{\text{eksternal}} \quad (14.9)$$

Oleh karena itu, kita mendapatkan:

$$B_{\text{total}} = \mu_0(1 + \chi_m)H_{\text{eksternal}} \quad (14.10)$$

Dari sini, kita akan menulis:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

(Suseptibilitas magnetik)

$$(14.11a)$$

$$\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$$

$$(14.11b)$$

Dengan pemahaman bahwa \mathbf{H} adalah medan H eksternal yang diterapkan dan \mathbf{B} adalah fluks magnet total akibat sumber eksternal dan perputaran internal elektron.

χ_m disebut **suseptibilitas magnetik** dari bahan. Untuk bahan diamagnetik, χ_m bernilai negatif dan mempunyai orde -10^{-5} . Tabel 14.1 memuat sejumlah bahan diamagnetik.

Tabel 14.1 Bahan paramagnetik dan diamagnetik.

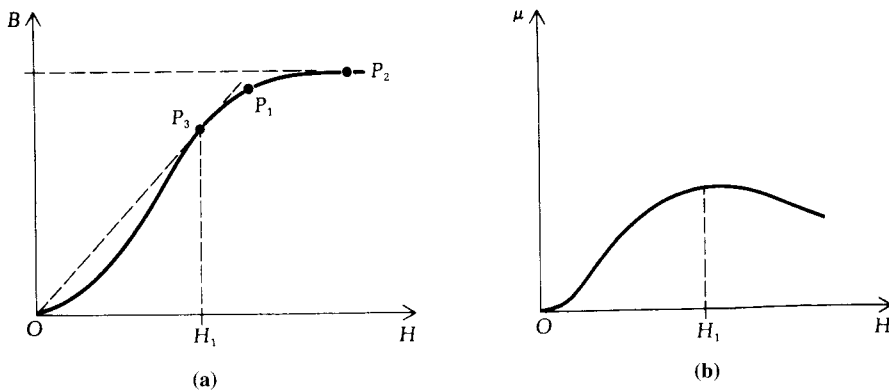
Zat	χ_m
Tembaga	$-0,94 \times 10^{-5}$
Timbal	$-1,70 \times 10^{-5}$
Air	$-0,88 \times 10^{-5}$
Vakum	0.00
Udara	$+3,60 \times 10^{-7}$
Platina	$+2,90 \times 10^{-4}$
Aluminium	$+2,10 \times 10^{-5}$
Oksigen cair	$+3,50 \times 10^{-3}$

Dalam bahan **paramagnetik**, medan magnet akibat elektron orbital dan perputaran elektron tidak hilang sepenuhnya. Bagaimanapun, karena agitasi termal, titik momen magnet akan berada dalam arah yang acak dan tidak menghasilkan kerapatan medan magnet bersih. Di bawah pengaruh medan eksternal, mereka menyebariskan diri mereka sendiri karena torsi yang dihasilkan [lihat (13.3)]. Ingat bahwa torsi adalah nol jika $\mathbf{m} \times \mathbf{B}$ adalah nol—, kondisi ketika \mathbf{m} diparalelkan ke \mathbf{B} . Dengan jelas terlihat bahwa dalam bahan paramagnetik, medan \mathbf{B} yang dihasilkan akan lebih besar dibandingkan dengan nilai dalam hampa udara. Suseptibilitas magnet χ_m dari bahan paramagnetik adalah positif dan berada dalam skala 10^{-5} sampai 10^{-3} . Tabel 14.1 juga memuat beberapa bahan paramagnetik yang umum.

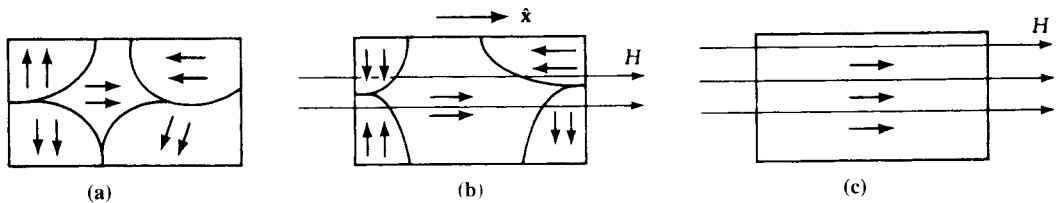
Jenis ketiga bahan yang disebutkan di awal pembahasan memperlihatkan suseptibilitas yang sangat tinggi. Bahan jenis ini sangat berguna karena menghasilkan medan \mathbf{B} yang kuat dengan arus yang relatif kecil dalam koil, yaitu **feromagnetik**. Bahan ini akan dijelaskan di bawah ini.

Bahan tersebut memiliki banyak **domain** kecil, dengan dimensi linear sekitar 10^{-6} m. Tiap domain berisi beberapa dipol magnet hasil perputaran elektron, yang disusun secara paralel oleh gaya yang kuat antara dipol–dipol yang berdekatan. Arah susunan dari dipol magnet dari domain yang satu dengan yang lainnya berbeda, sehingga biasanya tidak terdapat medan magnet spontan dalam bahan tersebut sebagai satu keseluruhan. Tidak adanya medan magnet ini berhubungan dengan titik O dalam kurva magnetisasi seperti yang ditunjukkan oleh Gambar 14.3a. Gambar 14.4a menampilkan hubungan keadaan untuk domain tersebut. Pada saat suatu medan \mathbf{H} eksternal diterapkan pada arah \hat{x} , sebagai contoh, domain–domain di mana dipol magnet paralel terhadap medan yang diterapkan akan bertambah besar dan ukuran dari domain yang lain akan berkurang. Medan magnet hasil perputaran elektron dan medan eksternal aslinya akan bergabung untuk menghasilkan medan total \mathbf{B} yang kuat. Hasil ini ditampilkan oleh kurva di antara titik O dan titik P_1 dalam Gambar 14.3a, dan Gambar 14.4b memperlihatkan keadaan untuk domain tersebut. Pada saat medan

Gambar 14.3 (a) Kurva magnetisasi. (b) Permeabilitas vs H . Nilai μ maksimum terjadi pada H_1 , di mana garis OP_3 adalah tangen pada kurva magnetisasi.



Gambar 14.4 Domain-domain dalam material feromagnetik. (a) Dalam ketiadaan medan eksternal, momen magnet dalam tiap domain akan paralel, tetapi domain-domain diorientasikan secara acak. (b) Domain yang terdistorsi karena pengaruh medan eksternal. Domain dengan momen magnet paralel terhadap medan eksternal akan mengembang sementara yang lainnya mengerut. (c) semua domain akan menyebarkan dengan medan eksternal pada titik saturasi.



H eksternal ditingkatkan, seluruh permukaan akan termagnetisasi menjadi domain tunggal dan seluruh elektron yang berputar tersebut akan disebariskan. Medan B dengan demikian mencapai nilai saturasi dan tidak dapat ditingkatkan lebih jauh lagi. Titik saturasi ini dinyatakan oleh titik P_2 seperti yang ditunjukkan dalam Gambar 14.3a dan Gambar 14.4c menunjukkan keadaan untuk domain tersebut. (Untuk tepatnya, fluks magnet B meningkat dengan laju sebesar μ_0 pada saat H dinaikkan melewati P_2 . Tetapi kenaikan ini praktis sangat kecil dibandingkan dengan laju kenaikan di dekat titik P_3 dalam Gambar 14.3). Permeabilitas magnet μ adalah fungsi nonlinear dari H . Perhatikan bahwa μ adalah kemiringan dari garis yang menghubungkan titik asal dari kurva B - H ke suatu titik pada kurva B - H . Tabel 14.3b menampilkan plot dari μ vs H . Nilai μ akan maksimum pada titik di mana garis yang menghubungkan titik asal ke sebuah titik pada kurva magnetisasi adalah tangen terhadap kurva. Garis ini adalah garis OP_3 yang ditunjukkan pada Gambar 14.3a.

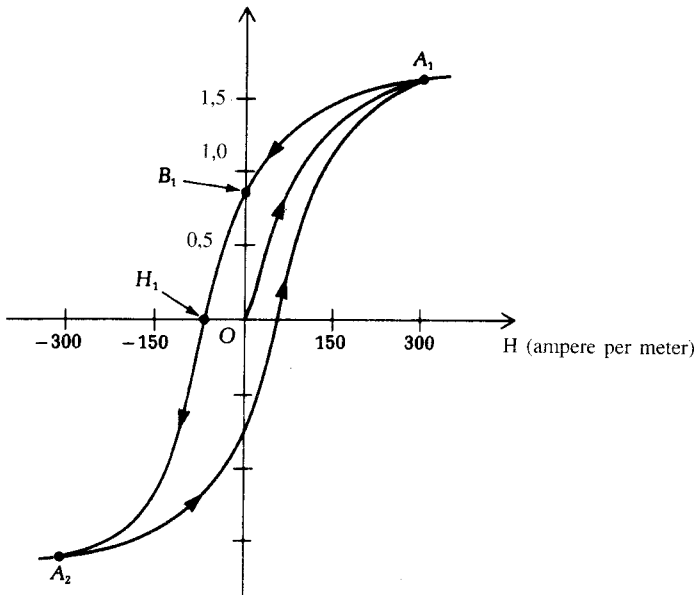
Histeresis

Perhatikan sebuah toroid yang sama seperti pada Gambar 13.8. Bahan dalam toroid adalah feromagnetik. Medan H dalam toroid diberikan oleh (13.13):

$$H_\phi = \frac{NI}{2\pi b} \quad (14.12)$$

Sekarang kita akan mengubah arus dan mengukur medan B yang dihasilkan dalam toroid. Asumsikan bahwa pada awalnya toroid feromagnetik tersebut tidak memiliki medan magnet yang spontan. Pada saat I meningkat, H akan meningkat berdasarkan (14.12). Medan B mulai beranjak naik dari nol. Jika B vs H diplot, maka kurva hasilnya akan sama dengan

Gambar 14.5 Sebuah kurva histeresis yang lazim untuk besi. B_1 adalah remanen besi dan H_1 adalah gaya paksaan.

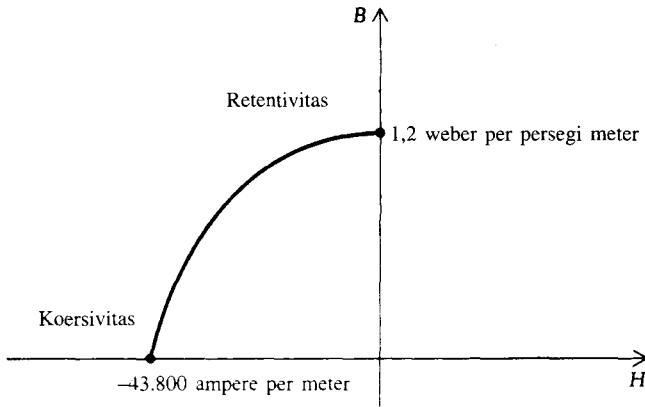


kurva OA_1 yang ditunjukkan dalam Gambar 14.5. Jika setelah magnetisasi permulaan terhadap titik A_1 , medan H akan turun dengan mengurangi arus dalam koil, medan B terkaitnya juga akan turun, tetapi kurva B - H ternyata tidak mengikuti kurva magnetisasi aslinya! Sebagai gantinya, ia akan menjejaki kurva yang sama dengan A_1B_1 yang ditunjukkan pada Gambar 14.5. Ingat bahwa pada titik B_1 , arus dalam suatu koil toroid sama dengan nol, demikian pula halnya H , fluks magnet residu tidak ada dalam toroid. Fluks residu ini diakibatkan oleh adanya fakta bahwa momen magnet domain dalam bahan feromagnetik masih menyebar dalam arah yang sama. Magnitudo dari B residu ini disebut **remanen**.

Jika sekarang kita membalik arus untuk membalik H , kurva B - H akan membentuk kurva B_1H_1 , seperti Gambar 14.5. Ingat bahwa dibutuhkan sejumlah nilai negatif dari H untuk menolak medan B . Nilai H dalam arah negatif magnetisasi awal yang diperlukan untuk menolak medan B disebut gaya paksaan (*corcive force*). Jika arus balik dinaikkan melampaui titik tersebut, medan B mulai berbalik dan kurva B - H akan mengikuti kurva H_1A_2 pada Gambar 14.5. Jika arus sekarang sudah berkurang, kurva B - H akan membentuk kurva baru A_2A_1 . Simpul tertutup $A_1B_1H_1A_2A_1$ disebut simpul histeresis (*Hysteresis simpal*). Jika arus diubah ke siklus yang lebih kecil, simpul histeresis terkaitnya akan lebih kecil. Jika bahan mengalami saturasi pada kedua ujung kurva magnetisasi, remanen B disebut **retentivitas bahan** (*retentivity*) feromagnetik dan gaya paksaan H disebut **koersivitas** bahan (*coercivity*).

Magnet Permanen

Bagian simpul histeresis pada kuadran kedua dikenal sebagai **kurva demagnetisasi** (*de-magnetization curve*). Gambar 14.6 menunjukkan kurva demagnetisasi dari suatu paduan yang disebut alnico V, yang memiliki retentivitas yang tinggi, sehingga dapat digunakan sebagai magnet permanen yang kuat. Perhatikan bahwa koersivitasnya juga tinggi. Dibutuhkan nilai H 43.800 A/m untuk mendemagnetisasi bahan tersebut. Retentivitas dan paksaan yang tinggi adalah sifat yang diinginkan dari magnet permanen. Ingat bahwa magnet permanen akan kehilangan magnetisasi permanennya pada suhu yang lebih tinggi dari nilai kritis yang disebut **suhu Curie**. Untuk kebanyakan bahan feromagnetik, suhu Curie mendekati 500°C.

Gambar 14.6 Kurva demagnetisasi paduan alnico V.

Sekarang asumsikan bahwa suatu magnet permanen terbuat dari alnico V dan retentivitasnya adalah:

$$B_r = 1,2 \text{ Wb/m}^2 \quad (14.13)$$

Dalam solenoid yang sama dengan udara sebagai intinya, kita akan hitung arus yang akan menghasilkan fluks magnet yang sama. Untuk solenoid yang terdiri dari n lilitan per meter, medan H dinyatakan oleh (13.10b):

$$H_z = nI$$

Oleh karena itu,

$$B_z = \mu_0 nI$$

Misalkan B_z sebanding dengan kerapatan fluks remanen pada (14.13), kita dapatkan:

$$nI = \frac{1,2}{\mu_0} = 0,95 \times 10^6 \text{ ampere lilitan/meter}$$

Jumlah lilitan ampere yang banyak ini mungkin akan mengejutkan pada awalnya. Jumlah ini merupakan hasil dari perputaran elektron dalam magnet permanen. Ingat bahwa terdapat elektron sejumlah 10^{30} tiap meter kubik dalam magnet!

Jika magnet permanen alnico V dipotong menjadi sebuah cakram, seperti pada Gambar 14.7, dapat diperkirakan bahwa medan magnet akan lebih kecil daripada retentivitasnya sebesar $1,2 \text{ Wb/m}^2$ karena ia berbentuk cakram yang tipis. Cakram ini dapat dimodelkan sebagai simpul arus lingkaran dengan arus I . Kita telah mengetahui solenoid sebesar $0,95 \times 10^6 \text{ A-t/m}$ dapat menghasilkan medan remanen sebesar $1,2 \text{ Wb/m}^2$. Jadi, sebuah cakram setebal 2 mm, akan setara dengan simpul arus lingkaran, di mana:

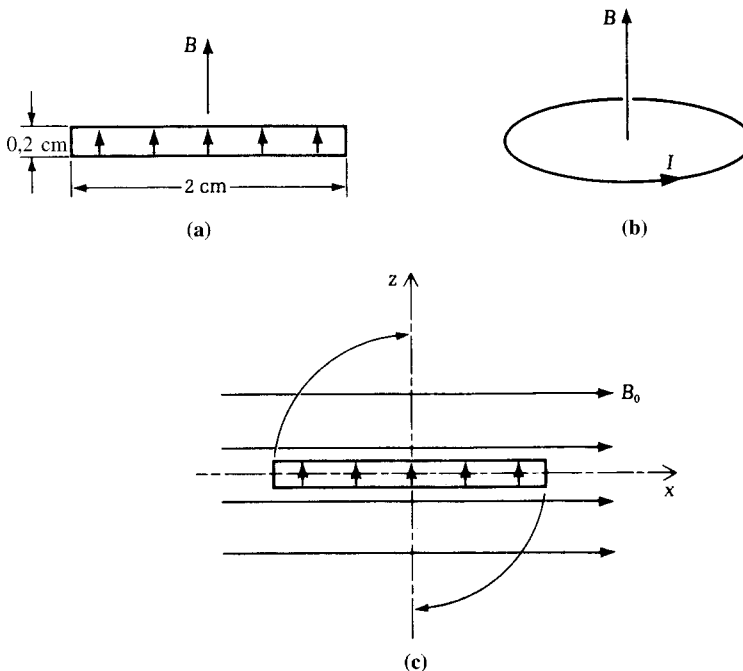
$$I = 0,95 \times 10^6 \times 0,002 = 1,9 \times 10^3 \text{ A}$$

Untuk mengetahui nilai B , kita menggunakan rumus medan magnet pada sumbu dari simpul lingkaran yang diberikan oleh (13.20):

$$B = \frac{Ia^2\mu_0}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z}$$

untuk setiap titik pada sumbu cakram sejauh z meter. Pada permukaan cakram $z = 0$ dan:

Gambar 14.7 (a) Magnet permanen dari sebuah cakram tipis. (b) Simpal arus yang ekuivalen. (c) cakram magnet permanen mengalami torsi yang dikarahkan oleh medan magnet eksternal B_0 .



$$B = \frac{I\mu_0}{2a}\hat{z} = 0,12\hat{z} \text{ weber per meter persegi}$$

Jika cakram magnet permanen diganti dengan medan magnet bumi maka:

$$B_e = 0,6 \times 10^{-4} \hat{x} \text{ weber per meter persegi}$$

Cakram akan mengalami torsi yang akan memutarinya sehingga sebaris dengan medan magnet bumi. Untuk menghitung torsi, kita pertama-tama menghitung momen magnet m :

$$m = \pi a^2 I \hat{z} = 0,60 \hat{z}$$

Substitusi ke dalam (13.31) akan menghasilkan

$$T = m \times B_e = 0,36 \times 10^{-4} \hat{y} \text{ newton per meter}$$

Bahan Permeabilitas Tinggi dan Bahan Magnet Permanen

Tabel 14.2 Mendaftar beberapa bahan permeabilitas tinggi dan bahan magnet permanen.

Tabel 14.2. Bahan permeabilitas tinggi dan magnet permanen.*

Material permeabilitas tinggi	Permeabilitas relatif	Rapat flux saturasi (Wb/m ²)	Bahan magnet permanen	Retentivitas (Wb/m ²)	Koersivitas (A/m)
Besi tuang	100-1600	2,0	Baja karbon	0,86	3800
Pemendure	800-4500	2,4	Alnico V	1,20	43.800
Supermalloy	10 ⁵ -10 ⁶	0,8	Cunico	0,34	52.500

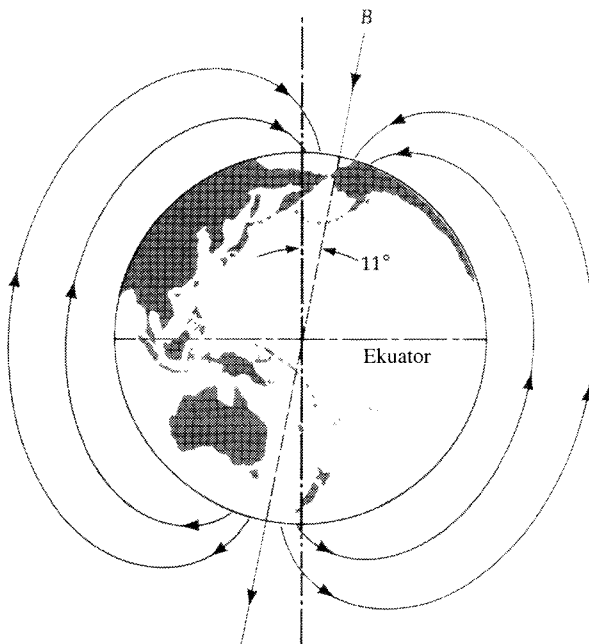
* R. M. Bozorth, *Ferromagnetism*, New York: Van Nostrand Reinhold, 1951; atau E. C. Jordan *Reference Data for Engineers*, ed. ke-7., Indianapolis, Ind.: Howard W. Aams & Co., 1985, hal. 4-25

Medan Magnet Bumi

Diyakini bahwa arus listrik mengalir dalam inti besi cair dari bumi dan menghasilkan medan magnet seperti simpal arus pada Gambar 13.11. Kerapatan fluks magnet sekitar $0,62 \times 10^{-4} \text{ Wb/m}^2$ di kutub utara magnet dan sekitar $0,5 \times 10^{-4} \text{ Wb/m}^2$ di garis lintang 40° . Sumbu simpal arus magnet efektif berada pada inklinasi 11° dari sumbu rotasi bumi seperti pada Gambar 14.8a. Ingat bahwa kutub *utara* magnet bumi adalah kutub *selatan* magnet jika bumi dianggap sebagai sebuah magnet permanen besar— artinya, titik medan B menunjuk ke bawah menembus tanah pada kutub utara magnet. Batang magnet permanen akan cenderung berputar sehingga momen magnetiknya akan menunjuk ke kutub utara magnet bumi. Menurut legenda Cina yang tercatat pada sebuah buku sejarah kuno, seorang kepala suku bernama Huang Di (Gambar 14.8b) telah menemukan batang besi yang cenderung untuk selalu menunjuk arah utara. Dia memasang batang tersebut di kereta perang dan dengan bantuan batang itu ia dapat memimpin pasukannya menembus kabut tebal dan mengalahkan musuh. Pertempuran tersebut mungkin merupakan kali pertama elektro magnetisme dimanfaatkan karena peristiwa ini diperkirakan terjadi pada tahun 2700 sebelum masehi.

Sebelumnya kami mengatakan bahwa magnet permanen akan kehilangan magnetisasi permanennya jika suhu meningkat di atas titik kritis yang disebut suhu Curie. Kebalikan pernyataan tersebut juga benar. Sebagai contoh, batu feromagnetik tidak akan termagnetisasi sampai lava mendingin di bawah suhu Curie, suhu di mana batu akan dimagnetisasi oleh medan magnet bumi. Fakta menakjubkan yang ditemukan oleh ahli geologi adalah bahwa lapisan lava memiliki arah magnet yang bolak balik. Lapisan bolak balik ini menandakan bahwa medan magnet bumi sudah membalik arahnya berkali-kali selama 6 juta tahun. Pembalikan arah yang terakhir terjadi sekitar 30 ribu tahun lalu. Bahkan, seorang pelajar Australia beberapa waktu yang lalu menemukan perapian kuno tempat manusia purba memasak makanannya. Ia dengan hati-hati mengukur magnetisasi dari beberapa batu di

Gambar 14.8 (a) Medan magnet bumi. Utara magnet adalah 11° dari sumbu rotasi bumi. Titik medan magnet menunjuk ke bawah di kutub utara.



* Sebuah peta kuat medan magnet bumi disajikan dalam D. N. Lapedes, ed., *Mcgraw-Hill Encyclopedia of the Geological Sciences*, New York: Mcgraw-Hill, 1977, hal. 299.



Gambar 14.8(b) Huang Di, digambarkan pada bebatuan beberapa abad lalu, dipercaya telah menggunakan magnet permanen sebagai kompas pada tahun 2700 sebelum masehi.

perapian tersebut dan mendapatkan bahwa batu tersebut termagnetisasi berlawanan dengan medan geomagnetik yang ada sekarang. Pelajar tersebut kemudian dengan berani mengajukan ke profesornya bahwa sekitar 30.000 tahun lalu medan geomagnetik menunjuk arah yang berlawanan!

Hal-hal mengejutkan lainnya dapat ditemukan pada cabang baru dari ilmu geologi yang disebut **paleomagnetisme** (*paleomagnetism*), pengujian batu magnet pada sejumlah tempat yang berbeda dan sejumlah kedalaman yang berbeda untuk mempelajari sejarah medan geomagnetik dan sejarah permukaan bumi. Sebagai contoh, kutub utara magnet diperkirakan telah berpindah-pindah selama 500 juta tahun. Sekitar 250 juta tahun yang lalu, kutub ini mulai terletak di Eropa. Beberapa ahli geofisika menjelaskan bahwa sebenarnya bukan kutub tersebut yang berpindah tetapi permukaan bumi, yaitu litosfirnya.* Litosfir tersebut meluncur pada inti bumi relatif terhadap kutub magnet yang diam.

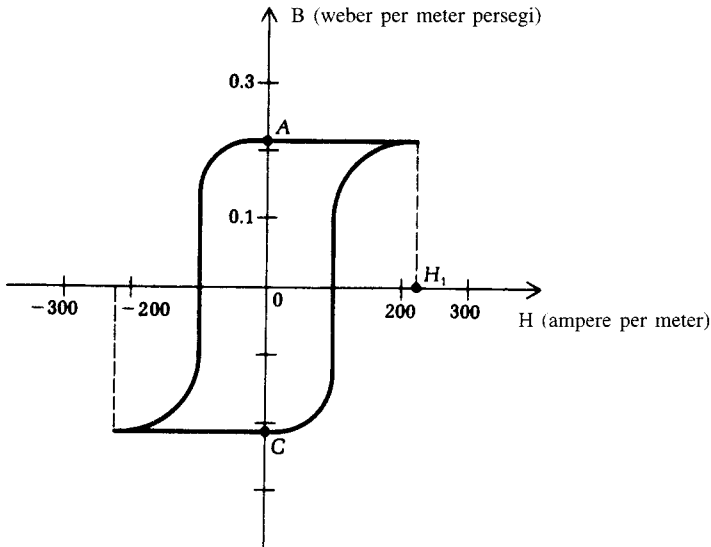
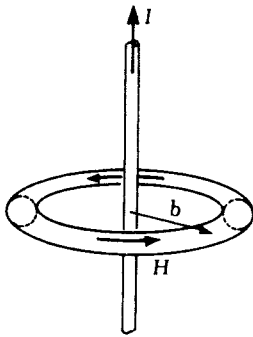
Memori Inti Magnet

Suatu kelas bahan magnet yang disebut **ferit** memiliki simpal histeresis yang menyerupai persegi. Gambar 14.9 memperlihatkan sketsa simpalnya. Terlihat bahwa bahan kemungkinan memiliki dua keadaan remanen, yang ditunjukkan oleh titik A dan C pada Gambar 14.9. Dua keadaan ini dapat digunakan untuk menunjukkan satu dan nol dalam sistem memori biner.

Perhatikan sebuah toroid yang terbuat dari bahan ferit. Kabel berarus I ditempatkan secara koaksial pada toroid, seperti pada Gambar 14.10. Toroid ini sedikit berbeda dengan toroid pada Gambar 13.8, yang memiliki banyak lilitan koil pada permukaannya. Dalam kasus ini, dapat dikatakan bahwa toroid hanya memiliki satu lilitan. Menggunakan hasil dari (13.13) didapatkan:

$$H_{\phi} = \frac{I}{2\pi b} \quad (14.14)$$

*F. Press dan R. Siever, *Earth*, San Fransisco: W.H. Freeman, 1978, bab 18.

Gambar 14.9 Suatu Simpal histeresis tipikal dari suatu "simpl persegi" ferit.**Gambar 14.10** Kabel berarus I melalui toroid ferit.

Perhatikan bahwa hasil ini juga merupakan kuat medan magnetik akibat kawat panjang seperti pada (13.6).

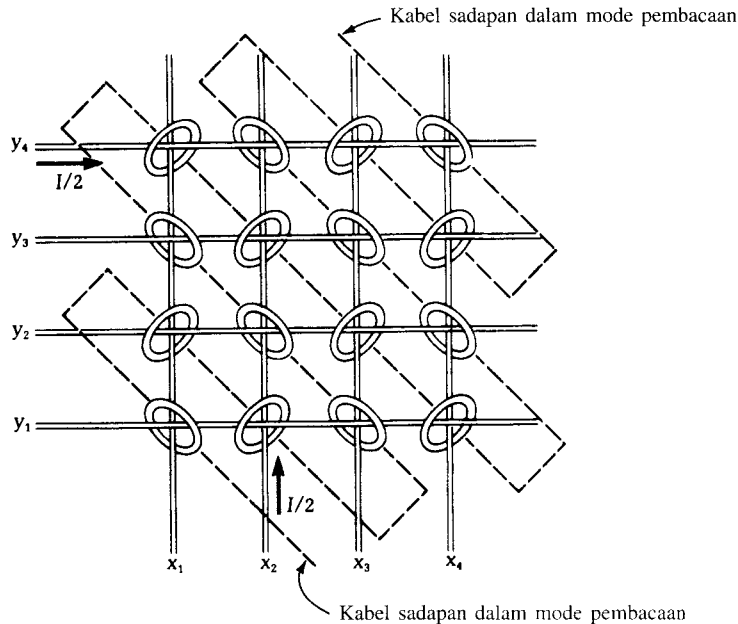
Diasumsikan bahwa toroid pada awalnya berada pada keadaan C yang ditunjukkan pada Gambar 14.9. Jika arus I positif dan H_ϕ yang sesuai dengan (14.14) lebih besar daripada H_1 , maka fluks toroid akan terbalik dan akan tetap terbalik sekalipun I berhenti mengalir. Dengan kata lain, jika kita memberikan pulsa dengan amplitudo tinggi maka pulsa akan mengubah keadaan toroid dari C menjadi A. Di lain pihak, jika toroid awalnya berada pada keadaan A, pulsa arus positif tidak akan mengubah keadaan toroid. Lebar pulsa ditentukan dari kecepatan toroid dalam mengubah fluksnya. Untuk ferit, waktu pergantian keadaannya berada pada skala mikrodetik.*

Memori inti magnetik dalam komputer digital terdiri dari ribuan toroid ferit kecil, yang disebut inti, tersusun sedemikian rupa seperti yang ditunjukkan pada Gambar 14.11. Tiap inti ferit dilalui oleh dua kawat ortogonal. Inti di sekitarnya ditata secara ortogonal sehingga sambungan mutual antar mereka dijaga pada jarak yang minimum.

Seperti pada Gambar 14.9, diasumsikan bahwa seluruh inti berada pada keadaan C, yang menyatakan nol. Misalkan sekarang kita ingin mencatat "satu" ke dalam inti memori x_2y_4 . Kita dapat mengirim pulsa arus sebesar amplitudo $I/2$ pada kabel x_2 dan juga pada kabel y_4 . Amplitudo $I/2$ ini didesain untuk menanggapi medan H sebesar $H_1/2$. Medan H ini secara individual tidak cukup kuat untuk mengubah inti dari titik keadaan C ke titik keadaan A. Kita menarik kesimpulan ini dari gambar 14.9. Tetapi inti x_2y_4 terletak pada

*C.J. Quartly, *Square-Loop Ferrite Circuitry*, Englewood Cliffs, NJ.: Prentice-Hall, 1962, hal. 14

Gambar 14.11 Pengaturan inti memori magnetik menggunakan pengaturan arus. Garis putus-putus menerangkan kabel sadapan untuk membaca data yang tersimpan.



persimpangan dari kabel x_2 dan kabel y_4 . Jadi, arus total yang diterima untuk eksitasi adalah I , yang bersesuaian dengan medan H sebesar H_1 . Jadi, inti yang khusus ini akan mengubah keadaan dari C ke A , sementara inti lainnya masih berada pada nol atau pada keadaan C . Proses ini seutuhnya dapat menyelesaikan tujuan kita yaitu menyimpan informasi sebesar satu bit dalam inti.

Untuk membaca informasi yang telah disimpan dalam memori inti magnetik, kita tinggal memasang kabel ketiga melalui inti. Kita ingin membaca nilai tersimpan pada inti x_2y_4 . Kita mengirim dua pulsa arus $-1/2$ menuruni kabel x_2 dan y_4 . Pulsa ini tidak akan mengganggu keadaan yang dimiliki setiap inti kecuali mungkin inti x_2y_4 . Jika inti memiliki nilai satu, maka keadaannya adalah A . Kedua arus negatif tersebut akan bergabung dan membangkitkan medan H , yang cukup kuat untuk membalik fluks magnet. Ketika fluks magnet telah berbalik, kabel sadapan (pembacaan) mendeteksi tegangan induksi, menurut hukum induksi Faraday, yang akan didiskusikan secara mendetil dalam bab 16. Di lain pihak, jika keadaan inti x_2y_4 adalah nol atau keadaan C , fluks magnetik akan berubah sedikit akibat terjadinya saturasi. Pada kasus ini, tegangan induksi pada pembacaan kawat sangat kecil. Hal inilah yang menunjukkan mengapa inti dibuat dari ferit yang memiliki simpal histeresis menyerupai bentuk persegi. Jika simpal histeresis tidak persegi, perubahan fluks dalam keadaan nol atau C mungkin tidak bisa diabaikan, dan pembacaan kabel mungkin akan mendeteksi adanya sejumlah tegangan.

Ingat bahwa karena kita mengetahui pasti inti yang kita baca dalam memori, kita hanya membutuhkan satu kabel penyadap yang melalui seluruh inti. Juga perlu diperhatikan bahwa skema pembacaan yang baru saja dijabarkan bersifat destruktif, atau dengan kata lain, memori akan terhapus sesudah pembacaan. Untuk menyimpan memori, harus digunakan suatu register untuk menyimpan pembacaan informasi dan kemudian inti tersebut disimpan pada keadaan yang sesuai dengan menulis informasi tersebut kembali.*

* M.M. Mano, *Digital Logic and Computer Design*, Englewood Cliffs, N. J: Prentice-Hall, 1979, hal, 297.

Contoh 14.1 Contoh ini menunjukkan jumlah arus yang dibutuhkan untuk membalik fluks magnet pada inti memori ferit.

Inti memori ferit umumnya memiliki radius efektif $b = 0,6$ mm. Diasumsikan bahwa medan H yang dibutuhkan untuk mengubah fluks adalah $H_1 = 220$ A/m; berapakah amplitudo dari pulsa arus pada tiap kabel dalam piranti memori inti magnet arus mengumpul yang ditunjukkan pada Gambar 14.11?

Solusi Magnitudo pulsa arus adalah I , medan magnet terkait H adalah $H_1/2$ atau 110 A/m. Karena arus tidak tegak lurus terhadap daerah inti, kita harus mengambil komponen tegak lurusnya untuk menentukan H dengan menggunakan (14.14). Artinya,

$$110 = \frac{I \cos 45^\circ}{2\pi \times 0,0006}$$

$$I = 0,6 \text{ A}$$

Memori Cakra Magnetik

Sistem komputer menggunakan peralatan memori cakra magnetik sebagai memori sekunder. Dibandingkan dengan memori primer, yang menggunakan memori IC atau memori inti magnetik, memori sekunder lebih lambat beberapa waktu tetapi biasanya lebih murah dalam kapasitas penyimpanannya.

Terdapat dua jenis cakra magnetik. Cakra fleksibel atau *floppy disk* adalah cakra tipis yang terbuat dari plastik Mylar berlapis bahan ferit. Cakra dengan unjuk kerja tinggi menggunakan cakra aluminium kaku dengan lapisan ferit. Radius *floppy disk* bisa 9 cm (3,5 inci) dan 13 mm ($5 \frac{1}{4}$ inci), dan cakra reguler bisa memiliki radius 20 cm (8 inci) atau 36 cm (14 inci). Karena kemajuan teknologi, kerapatan data cakra telah meningkat dengan cepat. Pada saat ini, skala kurang lebih 200 Mbit/cm².

Dalam operasi, cakra berputar dan terhubung dengan head magnetik. *Head* magnetik adalah suatu alat berbentuk cincin yang terbuat dari inti ferit yang dililiti dengan koil. Sebuah potongan celah kecil pada cincin tersebut akan memungkinkan medan magnet tersebut memanjang masuk ke dalam udara sekeliling di dekat celah ketika *head* menuliskan data pada cakra atau mengambil medan magnet dalam cakra tersebut ketika *head*nya membaca data dari cakra. Gambar 14.12 menunjukkan sketsa cakra dan *head*. *Head* menggantung secara aerodinamis melalui permukaan cakra. Perekaman kerapatan tinggi membutuhkan jarak antara yang kecil antara permukaan cakra dan *head*. Pada saat ini jarak antara terkecil adalah 0,1 sampai 1 μm .*

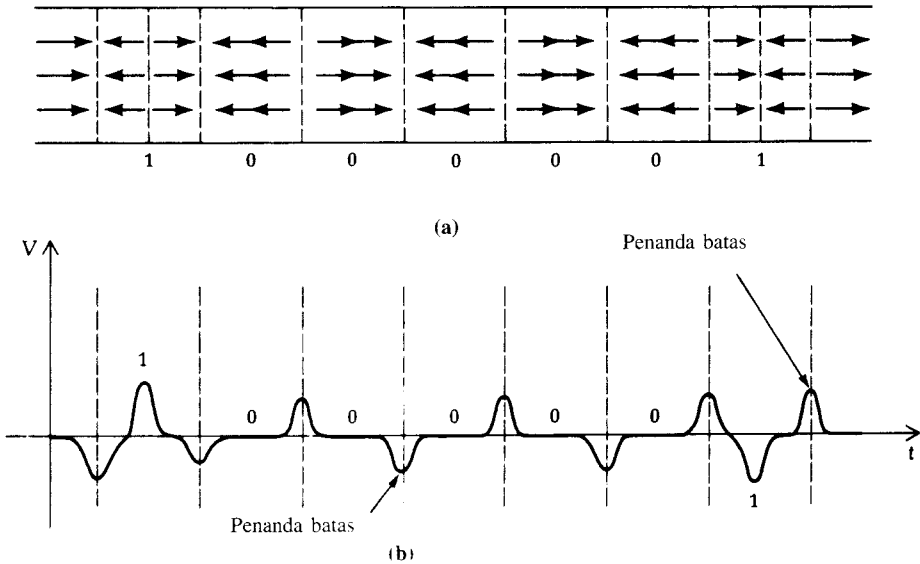
Cakra terbagi menjadi beberapa jalur melingkar dengan lebar 0,5 mm untuk *floppy disk* dan 0,025 mm untuk cakra kaku. Tiap jalur dibagi menjadi segmen kecil sepanjang 0,005 mm (5 μm). Satu bit informasi akan disimpan dalam sel kecil seperti disebut diatas.

Pada saat penulisan, arus dilewatkan melalui koil *head* untuk menghasilkan medan magnet dalam inti ferit. Fluks magnetik akan tetap berada dalam daerah inti, kecuali dalam celah udara di mana fluks akan menyebar keluar. Medan magnet dalam udara akan terhubung dengan cakra dan memagnetisasi sel. Arus dapat dibalik jika sel berikutnya akan dimagnetisasi pada arah yang berlawanan. Untuk sebuah kode yang disebut **modulasi frekuensi ganda** (*double-frequency-modulation*), "satu" diwakilkan oleh pembalikan magnetisasi dalam sel, dan "nol" diwakilkan oleh tidak terjadinya pembalikan.** Pembalikan tambahan disisipkan di antara tiap sel untuk menyediakan sinyal waktu. Gambar 14.13 menunjukkan pola magnetisasi pada tanda jalur pada suatu cakra.

* C. Tsang, M. M. Chen, dan T. Yogi, "Gigabit-density magnetic recordings," *IEEE Proceeding*, Jilid, 81, September 1993, hal. 1344-1359.

** R.M. White, "Disk-storage technology," *Scientific American*, Agustus 1980, hal. 138.

Gambar 14.13 Pengkodean biner dengan modulasi frekuensi ganda pada cakram magnetik. Nilai 1 diberikan oleh pembalikan magnetisasi dalam sel memori, dan nilai 0 dinyatakan oleh tidak terjadinya pembalikan. Ketika pembacaan, fluks magnetik akan dibalik dari sel ke sel untuk menghasilkan penanda batas. (a) Pola magnetisasi pada piringan (b) Tegangan keluaran dari head pembacaan.



Dasar Laut Sebagai Memori Magnetik

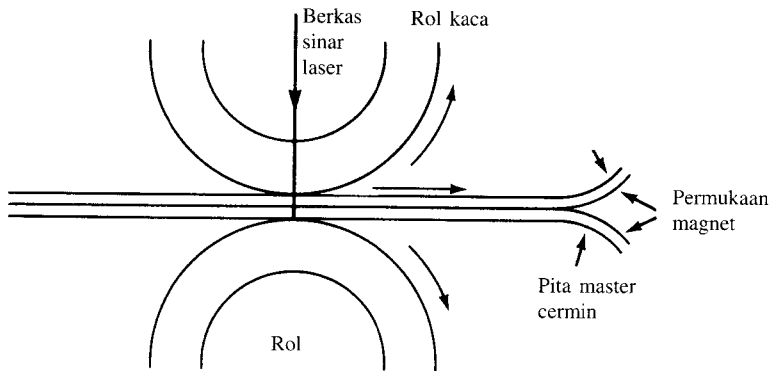
Setelah perang dunia II, ilmuwan menggunakan detektor medan magnet yang sensitif, awalnya dibangun untuk mendeteksi kapal selam, untuk mengukur medan magnet lokal dari batu-batu di dasar laut. Di dekat Islandia, mereka menemukan jalur magnetisasi paralel sepanjang ratusan mil di dasar laut. Yang menarik, jalur itu termagnetisasi pada dua arah, yaitu arah medan geomagnetik yang sekarang dan arah yang berlawanan. Dalam pembahasan terdahulu mengenai medan geomagnetik, kita sudah melihat bahwa medan geomagnetik telah begitu sering berbalik arah dalam enam juta tahun terakhir. Sehingga ilmuwan berteori bahwa dasar lautan di dekat Islandia telah mulai menjalani pemisahan selama periode yang sama. Setiap kali terjadi retakan, batuan cair naik dari dasarnya dan termagnetisasi oleh medan geomagnetik ketika mendingin di bawah suhu Curie. Arah magnetisasinya tentu saja di sepanjang medan geomagnetik yang ada pada waktu itu.

Yang perlu diperhatikan adalah kesamaan antara pola perekaman biner yang dilakukan manusia pada alat dalam Gambar 14.13a dengan perekaman alami pada dasar lautan. Perbedaannya adalah pembalikan magnetisasi buatan manusia ini terjadi pada cakram memori magnet sepanjang beberapa mikrometer (10^{-6}m) sedangkan pembalikan alam terjadi di dasar laut sepanjang beberapa kilometer. Penulisan atau pembacaan rekaman dalam proses buatan manusia ini hanya membutuhkan waktu selama beberapa mikrodetik sedangkan perekaman data pada dasar laut berlangsung selama beberapa juta tahun!*)

Pengkopian Thermomagnetik

Pada awal pembahasan, telah kita pelajari bahwa bahan feromagnetik akan kehilangan magnetisasi permanennya ketika bahan tersebut dipanaskan di atas suhu Curie T_c . Ketika

* E. Orowan, "The origin of the ocean ridges," *Scientific American*, November 1969, hal 103 dan P.M. Hurley, "The confirmation of continental drift," *Scientific American*, April 1968, hal. 53

Gambar 14.14 Pengkopian termomagnetik dari pita video.

bahan itu didinginkan di bawah suhu Curie, ia akan termagnetisasi kembali dalam arah medan magnet eksternal yang terdapat pada saat tersebut. Perhatikan dua bahan yang masing-masing memiliki suhu Curie T_{c1} dan T_{c2} , di mana $T_{c1} > T_{c2}$. Kedua bahan ini diletakkan pada jarak yang berdekatan, dan kemudian dipanaskan sampai suhu di bawah T_{c1} tetapi lebih tinggi dari T_{c2} . Setelah mencapai suhu ruang, magnetisasi pada bahan pertama tidak akan berubah. Bahan kedua akan kehilangan magnetisasinya dan kemudian termagnetisasi kembali oleh bahan pertama. Metode ini disebut termomagnetisasi dan dapat digunakan untuk penduplikatan pita video kecepatan tinggi.

Metode konvensional pembuatan kopi video adalah dengan menggunakan perekam video tipe rumah yang terhubung paralel ke sumber program tunggal. Pada umumnya, lebih dari 1000 jenis perekam seperti ini digunakan untuk produksi massal. Penduplikatannya menggunakan *real time speed* sehingga prosesnya agak lambat dan membutuhkan keterampilan yang tinggi. Metode termomagnetisasi ini dapat mengkopir videotape 50 kali lebih cepat daripada *real time speed* tanpa memperhatikan kualitasnya.

Pita video terbuat dari bahan dasar film polyester yang dilapisi dengan partikel magnetik. Ketika kromdioksida (CrO_2) digunakan sebagai medium perekaman untuk pita kopi, maka suhu Curie-nya kurang lebih 100°C . Pita masternya dilapisi dengan oksida besi yang dimodifikasi dengan kobalt (Co Fe Oksida), yang suhu Curiannya mendekati 400°C . Sebuah pita master cermin disiapkan pertama kali di mana magnetisasinya persis sama dengan magnetisasi pada pita masternya. Permukaan magnet dari pita master cermin dan permukaan magnet pita kopinya kemudian ditekan di antara dua rol, seperti terlihat pada Gambar 14.14. Sinar laser diarahkan pada pita-pita tersebut. Rol atas terbuat dari gelas sehingga sinar laser dapat menembus rol tersebut dan memanaskan pita secara lokal. Intensitas sinar laser didesain untuk memanaskan pita sampai sekitar 150°C pada saat pita menggulung dengan kecepatan 2,5 m/detik. Partikel-partikel CrO_2 kehilangan magnetisasinya ketika suhu naik di atas suhu Curie. Magnetisasi pada cermin pita master tidak terpengaruh karena suhunya masih di bawah suhu Curie. Setelah titik yang sudah panas tersebut meninggalkan berkas laser, suhu sekitarnya akan jatuh di bawah 100°C dalam waktu sekitar 0,4 milidetik. Partikel-partikel CrO_2 tersebut kemudian dimagnetisasi dengan pola yang sama dengan yang dilakukan pada pita master cermin.*

14.2 RANGKAIAN MAGNETIK

Dalam teori rangkaian listrik, Kita ingin menghitung arus dan tegangan pada berbagai cabang atau simpul dari rangkaian yang tereksitasi oleh sumber tegangan atau arus eksternal.

** M. P. Chouinard and J.E. Gantzorn, Jr., "High-speed videotape duplication," *Dupont Magazine*, Jilid. 79, No. 2, April 1985, hal. 14a.

Seluruh perhitungan di atas menggunakan 2 persamaan, Hukum Tegangan Kirchhoff (HTK) dan Hukum Arus Kirchhoff (HAK) (Subbab 12.1):

$$\sum_m V_m = 0 \text{ (HTK)} \quad (14.15)$$

$$\sum_m I_m = 0 \text{ (HAK)} \quad (14.16)$$

HTK berlaku pada semua jalur tertutup dalam suatu jaringan dan V_m merupakan tegangan jatuh yang terjadi di sepanjang jalur tertutup tersebut. Kenaikan tegangan dari suatu sumber tegangan eksternal dianggap sebagai tegangan jatuh negatif. HAK dapat diterapkan pada setiap simpul dalam jaringan listrik.

Seperti halnya rangkaian listrik, rangkaian magnetik terdapat pada beberapa aplikasi. Suatu contoh sederhananya adalah inti magnetik pada Gambar 14.10. Kita ingin mengetahui seberapa besar arus yang diperlukan untuk memagnetisasi atau mendemagnetisasi inti ini. Contoh yang kompleks adalah magnet yang dipakai pada motor dc seperti pada Gambar 13.22 atau *head* ferit dari cakram memori magnetik yang ditunjukkan gambar 14.12. Pada kedua kasus tersebut inti magnetnya dipotong untuk mengatasi celah udara. Kita biasanya perlu mengetahui seberapa besar arus yang dibutuhkan untuk membangkitkan fluks magnet pada inti-inti tersebut. Kita menganggap permasalahan ini sebagai permasalahan rangkaian magnetik.

Analisis rangkaian magnetik bertumpu pada persamaan-persamaan di bawah ini:

$$\sum_m H_m \ell_m = nI \quad (14.17)$$

(persamaan rangkaian magnetik)

$$\sum_m B_m A_m = 0 \quad (14.18)$$

Persamaan di atas semata-mata merupakan persamaan kedua dan ketiga dari persamaan Maxwell, yang dikhususkan untuk kasus magnetostatik:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad \text{atau} \quad \oint \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = I \quad (14.19)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{atau} \quad \oint \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = 0 \quad (14.20)$$

Dalam (14.17) H_m adalah intensitas medan magnet pada cabang ke- m dari rangkaian magnetik dan ℓ_m adalah panjangnya. Persamaan ini dapat dipakai untuk semua jalur tertutup. I adalah arus yang mengalir melewati daerah pada jalur tertutup dan n adalah jumlah lilitan pada koil. Dalam (14.18) B_m adalah kerapatan medan magnet dalam cabang ke- m dari hubungan pada rangkaian magnetik dan A_m adalah potongan melintang dari cabang. Analogi antara rangkaian listrik dan rangkaian magnetik jelas terlihat dengan membandingkan (14.15), (14.16), (14.17), dan (14.18).

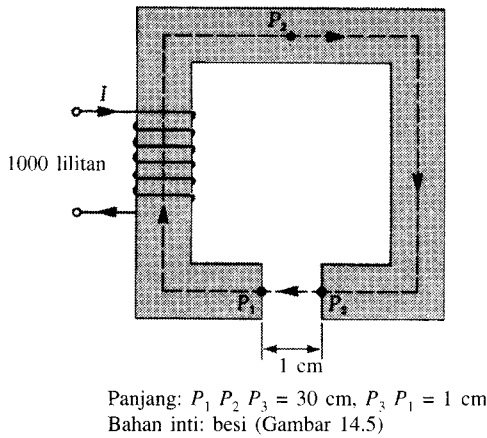
Rangkaian Listrik

Tegangan jatuh V
Sumber tegangan V
Arus I

Rangkaian Magnetik

Magnetovoltase jatuh $H\ell$
Gaya magnetomotif nI
Fluks magnetik $BA = \psi$

Contoh 14.2 Dalam praktek, kita sering diharuskan untuk mendesain rangkaian yang mampu menghasilkan sejumlah fluks magnet pada celah udara. Contoh ini mendemonstrasikan bagaimana memecahkan permasalahan rangkaian magnetik.



Gambar 14.15 Menghitung arus yang dibutuhkan untuk menghasilkan medan B yang diperlukan pada celah udara dalam sirkuit magnetik (lihat Contoh 14.2)

Perhatikan rangkaian magnetik pada Gambar 14.15. Asumsikan bahwa bahan inti adalah besi. Gambar 14.15 menunjukkan kurva magnetisasi besi. Untuk menghasilkan kerapatan fluks magnet sebesar $1,6 \text{ Wb/m}^2$ (T) dalam inti demikian pula pada celah udaranya (abaikan medan tepi), Berapakah besar arus di koil jika koil tersebut memiliki 1000 lilitan?

Solusi

Persamaan berikut dapat ditetapkan berdasarkan (14.17)

$$H_c \ell_c + H_a \ell_a = nI \quad (14.21)$$

di mana H_c adalah medan dalam inti dan H_a adalah medan pada celah udara. Dari Gambar 14.15, kita memiliki $\ell_c = 0,3$; $\ell_a = 0,01$ dan $n = 1000$. Dalam inti dan celah udara, $B = 1,6$. Dari Gambar 14.5 kita dapatkan:

$$H_c = 260 \text{ A/m}$$

Menggunakan persamaan $B = \mu_0 H$ pada udara, kita dapatkan

$$H_a = \frac{1,6}{4\pi \times 10^{-7}} = 1,3 \times 10^6 \text{ A/m}$$

Substitusi ke dalam (14.21) akan menghasilkan

$$nI = 260 \times 0,3 + 1,3 \times 10^6 \times 0,01 = 78 + 13.000 = 13.078 \text{ A-t}$$

Dengan $n = 1000$,

$$I = 13,08 \text{ A}$$

Ingat bahwa sebagian besar magnetovoltase jatuh terjadi pada celah udara. Kami akan memperlihatkan hal ini melalui contoh berikut ini.

Contoh 14.3 *Ingat bahwa pada contoh sebelumnya, sebagian besar penurunan magnetovoltase ($H \times \text{panjang}$) terjadi di celah udara. Contoh berikut akan lebih memperjelas hal ini.*

Anggap bahwa celah udara dimasuki blok besi, sehingga inti besi yang ditunjukkan pada Gambar 14.15 merupakan struktur kontinu. Berapakah arus yang diperlukan untuk menghasilkan fluks magnetik —artinya, $B = 1,6 \text{ Wb/m}^2$ — dalam inti tersebut?

Solusi

Persamaan (14.21) dimodifikasi menjadi

$$H_c \ell = nI$$

di mana $\ell = 0,3 + 0,01 = 0,31 \text{ m}$. Menggunakan nilai $H_c = 260 \text{ A/m}$ dari Gambar 14.5 didapatkan

$$nl = 260 \times 0,31 = 80,6$$

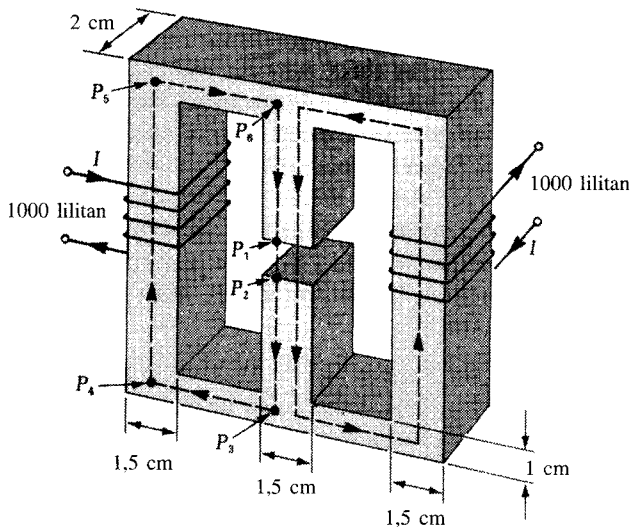
$$I = 0,08 \text{ A}$$

Bandingkan hasil ini dengan contoh sebelumnya, kita sadari bahwa arus dengan jumlah besar pada Contoh 14.2 ini diakibatkan oleh adanya celah udara. Dengan demikian, bahan inti magnet dapat disetarakan dengan konduktor pada rangkaian listrik dan celah udara dapat disetarakan dengan bahan dengan resistivitas tinggi.

Contoh 14.4 *Contoh ini merupakan permasalahan rangkaian magnet yang lebih kompleks. Prosedur pemecahannya sangat mirip dengan yang digunakan pada pemecahan permasalahan rangkaian listrik.*

Gambar 14.16 menunjukkan rangkaian magnetik. Medan magnet pada celah udara adalah $B = 1,2 \text{ Wb/m}^2$. Anggap permeabilitas bahan magnet adalah $\mu = 1000\mu_0$, tentukan arus yang mengalir pada tiap-tiap koil.

Gambar 14.16 Sirkuit magnetik yang pemecahannya ada pada contoh 14.4



Celah udara	$P_1 P_2 = 1 \text{ cm}$	$P_2 P_3 = 5 \text{ cm}$
	$P_3 P_4 = 6 \text{ cm}$	$P_4 P_5 = 11 \text{ cm}$
	$P_5 P_6 = 6 \text{ cm}$	$P_6 P_1 = 5 \text{ cm}$

Solusi

Karena rangkaian magnetnya simetri, maka kita cukup meninjau, simpal $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6 P_1$. Fluks total pada celah udara ini dinyatakan oleh

$$\psi = B_a A_a = 1,2 \times 0,02 \times 0,015 = 3,6 \times 10^{-4} \text{ Wb}$$

Setengah dari fluks tersebut mengalir pada setengah rangkaian sebelah kiri. Jadi, medan B pada cabang $P_3 P_4$, $P_4 P_5$, dan $P_5 P_6$ adalah

$$B_{34} = B_{56} = \frac{1,8 \times 10^{-4}}{0,01 \times 0,02} = 0,9 \text{ Wb/m}^2$$

$$B_{45} = \frac{1,8 \times 10^{-4}}{0,02 \times 0,015} = 0,6 \text{ Wb/m}^2$$

Jadi, diperoleh medan H

$$H_{\text{udara}} = \frac{B_a}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0}(1,2)$$

$$H_{23} = H_{61} = \frac{1,2}{1000\mu_0} = \frac{1}{\mu_0}(1,2 \times 10^{-3}) \text{ A/m}$$

$$H_{34} = H_{56} = \frac{1}{\mu_0}(0,9 \times 10^{-3}) \text{ A/m}$$

$$H_{45} = \frac{1}{\mu_0}(0,6 \times 10^{-3}) \text{ A/m}$$

Mengalikan H dengan panjang dan menggunakan (14.17) akan menghasilkan:

$$1000I = \frac{1}{\mu_0}(1,2 \times 0,01 + 1,2 \times 10^{-3} \times 0,1 + 0,9 \times 10^{-3} \times 0,12 + 0,6 \times 10^{-3} \times 0,11)$$

$$= 9783$$

$$I = 9,783 \text{ A}$$

Meskipun (14.18) tidak terlihat digunakan pada contoh sebelumnya, tetapi sebenarnya dipakai juga. Pernyataan bahwa setengah fluks mengalir menuju cabang sebelah kiri dari rangkaian dan perhitungan B_{34} , B_{45} dan B_{56} mengasumsikan secara implisit bahwa fluks tersebut disimpan pada rangkaian magnetik sama seperti arus pada rangkaian listrik. Pernyataan inilah yang hendak disampaikan oleh (14.18).

Contoh 14.5 *Kurva B - H dari suatu bahan magnet biasanya nonlinear. Akibatnya, untuk memecahkan permasalahan rangkaian magnetik yang mengandung bahan magnet nonlinear dibutuhkan pemakaian metode grafik atau numerik, seperti yang ditunjukkan pada contoh berikut.*

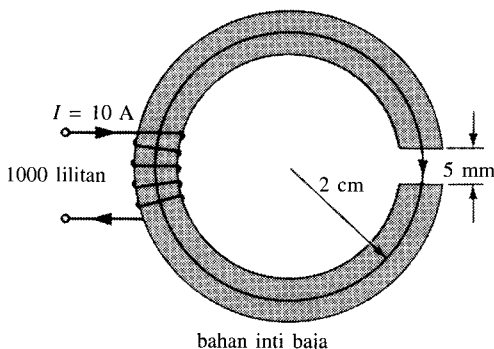
Perhatikan rangkaian magnetik pada Gambar 14.17a. Arus dalam koil adalah 10 A dan koil memiliki 1000 lilitan. Inti terbuat dari baja, yang kurva awal magnetisasinya diperlihatkan pada Gambar 14.17b. Tentukan fluks magnet B pada celah udara.

Solusi

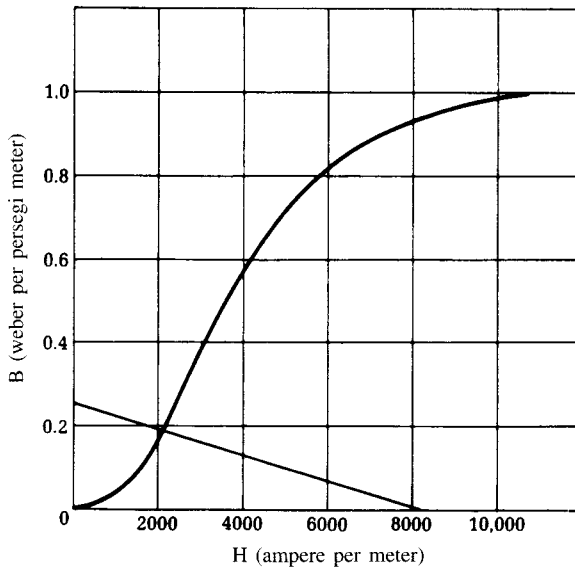
Anggap fluks magnet pada inti dan celah udara adalah B . Menggunakan (14.17), kita dapatkan persamaan:

$$\frac{B}{\mu_0} \ell_a + H_c \ell_c = 1000 \quad (14.22)$$

Gambar 14.17(a) Prosedur iteratif yang digunakan untuk menentukan fluks magnetik dalam celah udara. (lihat Contoh 14.5)



Gambar 14.17(b) Kurva magnetisasi awal baja dan garis lurus yang berhubungan dengan persamaan (14.22).



di mana $\ell_a = 0,005$ m dan $\ell_c = (2\pi \times 0,02) - 0,005 = 0,121$ m. Persamaan di atas tidak dapat dipecahkan secara analitis karena hubungan antara B dan H_c ditunjukkan dalam bentuk grafik (Gambar 14.17b) yang merupakan fungsi nonlinear. Sebagai gantinya, kita menggunakan prosedur iteratif berikut ini.

Nyatakan (14.22) dalam bentuk berikut:

$$B = \frac{(1000 - H_c \ell_c) \mu_0}{\ell_a} \quad (14.23)$$

Pengalaman kita dalam memecahkan permasalahan pada contoh sebelumnya menunjukkan bahwa penurunan magnetovoltase yang diakibatkan oleh hal tersebut terutama terjadi di udara. Jadi, pendekatan kita yang pertama adalah mengabaikan suku $H_c \ell_c$ pada (14.23) untuk mendapatkan pendekatan orde nol untuk B , yang dinotasikan sebagai $B^{(0)}$:

$$B^{(0)} = \frac{1000 \mu_0}{\ell_a} = 0,251 \text{ Wb/m}^2$$

Dari $B^{(0)}$, kita tentukan $H^{(0)}$ (gambar 14.17b):

$$H^{(0)} = 2400 \text{ A/m}$$

Metode iteratif menghendaki substitusi nilai di atas ke dalam persamaan (14.23) untuk mendapatkan pendekatan orde pertama dari B yang dinotasikan $B^{(1)}$

$$B^{(1)} = \frac{(1000 - 2400 \times 0,121) \mu_0}{0,005} = 0,178 \text{ Wb/m}^2$$

$H^{(1)}$ dapat dibaca dari gambar 14.17b:

$$H^{(1)} = 2100 \text{ A/m}$$

Kita memperoleh pendekatan orde kedua B melalui substitusi nilai $H^{(1)}$ untuk H dalam (14.23):

$$B^{(2)} = \frac{(1000 - 2100 \times 0,121) \mu_0}{0,005} = 0,187 \text{ Wb/m}^2$$

Prosedur ini dapat diulangi untuk hasil iterasi ke- n dari $B^{(n)}$. Jika komputer digital tersedia, kurva magnetisasi dapat didekati oleh kurva polinomial standar dan disimpan dalam memori komputer. Program sederhana dapat dituliskan untuk mendapatkan prosedur iteratif yang dapat diselesaikan dengan cepat oleh komputer (lihat Soal 14.14)

Persoalan di atas juga dapat diselesaikan dengan menggunakan metode grafik. Ingat bahwa (14.22) atau ekuivalennya yaitu (14.23) adalah persamaan garis lurus pada bidang B - H . Seperti yang ditunjukkan pada Gambar 14.17b, garis ini memotong sumbu B pada $0,251 \text{ Wb/m}^2$ dan memotong sumbu H pada 8264 A/m . Garis lurus ini juga memotong kurva magnetisasi non linear pada $B = 0,19 \text{ Wb/m}^2$. Hasil ini dapat dikatakan sesuai dengan hasil yang didapat dengan menggunakan metode iterasi.

RINGKASAN

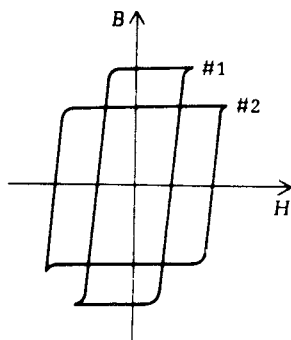
1. Medan B (kerapatan fluks magnet) sama dengan permeabilitas magnet μ dikalikan medan H (kuat medan magnet).
2. Ketika μ lebih kecil dari μ_0 , permeabilitas ruang hampa, maka bahan disebut sebagai bahan diamagnetik. Bahan disebut paramagnetik jika μ -nya lebih besar daripada μ_0 . Bahan feromagnetik memiliki rasio μ/μ_0 yang sangat tinggi.
3. Banyak bahan feromagnetik memiliki karakteristik histeresis. Hubungan antara B dan H membentuk simpal pada bidang B - H . Ada kemungkinan untuk memperoleh fluks magnet B ketika H bernilai nol. Fluks residu ini disebut remanen. Medan H yang dibutuhkan untuk menolak fluks residu disebut gaya koersif (paksaan), —artinya, medan H yang membawa medan B turun sampai mencapai nol.
4. Magnet permanen dicirikan oleh retentivitas dan koersivitas. Retentivitas adalah kerapatan fluks remanen setelah magnet mengalami saturasi dan medan H -nya ditarik mundur. Koersivitas adalah gaya koersif yang dibutuhkan untuk membawa medan B turun sampai nol dalam kondisi saturasi.
5. Dalam praktek, kita sering diharuskan untuk mendesain rangkaian yang menghasilkan sejumlah fluks magnet dalam sebuah celah udara. Ini yang disebut permasalahan rangkaian magnetik. Ini dipecahkan dengan menggunakan hukum Ampere dan Gauss untuk medan magnet. Persamaan (14.17) dan (14.18) adalah penerapan hukum-hukum tersebut untuk rangkaian magnetik.
6. Prosedur untuk memecahkan persoalan rangkaian magnetik sangat mirip seperti dalam memecahkan persoalan rangkaian listrik. Penurunan tegangan magnetik adalah medan H dikalikan dengan jarak sepanjang jalur tertutup dalam rangkaian. Sumber tegangan adalah nI , jumlah lilitan koil dikalikan dengan arus listrik. Fluks magnetik Ψ (B dikalikan luas) dapat disetarakan dengan arus dalam rangkaian listrik.

Soal-soal

- 14.1 Berdasarkan kurva magnetisasi pada Gambar 14.3. Bahan merupakan medium non linear karena μ bergantung pada magnitudo H . Untuk medan magnetostatik, μ sama dengan kemiringan garis yang menghubungkan titik asal dan titik (H, B) pada kurva magnetisasi. Dengan cara ini, Gambar 14.3b didapat dari gambar 14.3a. Sekarang, jika bahan ditempatkan dalam medan harmonik waktu, μ efektif akan berbeda dari μ untuk medan magnetostatik. Perhatikan, medan $H = H_0 + H_1 \cos(\omega t + \phi)$, di mana H_0 adalah medan magnetostatik bias dan H_1 adalah amplitudo dari komponen harmonik waktu dari medan total. Jika $H_1 \ll H_0$, kemudian permeabilitas efektif bahan adalah kemiringan tangen dari kurva magnetisasi pada H_0 . Sketsalah μ efektif vs H_0 untuk

kurva yang ditunjukkan dalam gambar 14.3a. Bandingkan dengan μ magnetostatik dalam Gambar 14.3b dan tunjukkan bahwa μ pada kedua kasus ini akan sama besar pada P_3 .

- 14.2 Tunjukkan perbedaan antara pasangan istilah berikut ini:
 - a. diamagnetik vs paramagnetik
 - b. remanen vs retentivitas
 - c. gaya koersivitas vs koersivitas
- 14.3 Berapakah nilai pendekatan dari retentivitas dan koersivitas dari ferit yang ditunjukkan pada Gambar 14.9.
- 14.4 Perhatikan bahan baja karbon, alnico V dan cunico yang terdapat pada Tabel 14.2. Bahan manakah yang memiliki kuat medan magnet permanen tertinggi? Bahan manakah yang paling sulit kehilangan magnetisasinya sesudah dimagnetisasi?
- 14.5 Magnet permanen dengan radius 1,5 cm dan ketebalan 0,3 cm diletakkan dalam medan magnet yang paralel terhadap cakram, seperti situasi yang digambarkan pada Gambar 14.7. Torsi pada cakram sama dengan $1,2 \times 10^{-3}$ N-m. Dan medan magnetiknya adalah 10^{-3} Wb/m². Berapakah remanensi magnet permanen itu?
- 14.6 Untuk menulis satu dalam inti memori x_2, y_3 yang ditunjukkan Gambar 14.11, berapakah arus yang harus dikirimkan ke kabel? Spesifikasikan polaritas dari kedua pulsanya.
- 14.7 Perhatikan memori inti magnet yang ada pada Gambar 14.11 dan kurva histeresis terkait untuk inti pada Gambar 14.9. Karena terjadinya kelainan fungsi dalam rangkaian, amplitudo pulsa positif I_1 yang dapat menghasilkan sendiri perubahan kekuatan medan magnet H , dikirim ke bawah garis y_2 dan secara simultan dikirimkan juga sebuah pulsa yang identik ke bawah garis x_3 . Asumsikan bahwa seluruh inti awalnya berada pada keadaan "nol", yang berarti mengarahkan sirkulasi fluks magnetik tersebut ke kiri atas atau ke kiri bawah (menggunakan aturan tangan kanan). Berada pada kondisi apakah seluruh inti setelah pulsa-pulsa ini lewat?
- 14.8 Bandingkan dua simpal histeresis ferit dalam Gambar di bawah P14.8. ini Kurva dengan label #1 lebih tipis daripada kurva yang diberi label #2. Inti ferit manakah yang membutuhkan arus *switching* lebih kecil? Ferit yang manakah memiliki kemampuan untuk menahan interferensi magnetik?

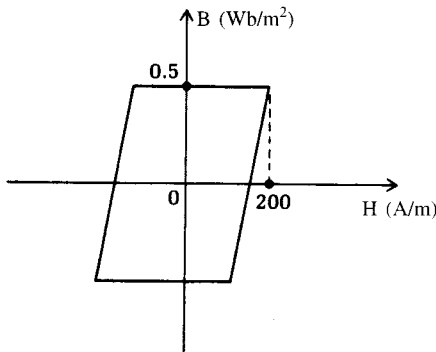


Gambar P14.8 Simpul histeresis untuk dua macam ferit.

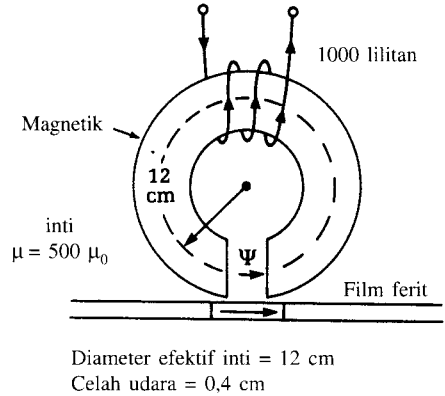
- 14.9 Berapakah jumlah arus minimum I yang dibutuhkan untuk memagnetisasi film ferit dari pita magnetik? Simpul histeresis bahan ferit dan rangkaian magnetik *head* perekaman ditunjukkan dalam Gambar P14.9.

- Asumsikan bahwa luas penampang dari celah udara head perekam sama dengan luas penampang inti magnet; medan magnet tepi di dalam celah udara tersebut diabaikan. Tentukan I .
- Untuk memperhitungkan penyebaran medan magnet dalam celah udara head perekam, asumsikan bahwa luas penampang efektif celah udara lebih besar 20% dari pada luas penampang inti magnet. Tentukan I .

Gambar P14.9.

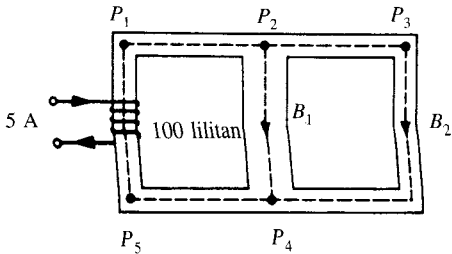


Kurva histeresis untuk film ferit



- 14.10 Rangkaian magnetik pada Gambar P14.10 terbuat dari bahan dengan $\mu = 600\mu_0$. Tentukan kerapatan fluks B_1 dan B_2 dan tentukan arahnya.

Gambar P14.10



panjang:

$$P_1 P_2 = 9 \text{ cm}$$

$$P_2 P_4 = P_5 P_1 = 10 \text{ cm}$$

$$P_2 P_3 P_4 = 26 \text{ cm}$$

$$P_4 P_5 = 9 \text{ cm}$$

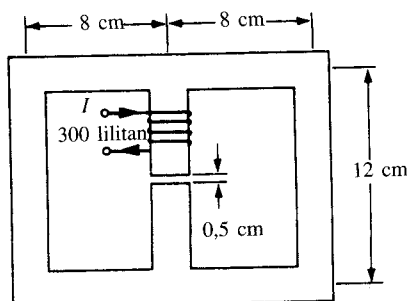
Luas potongan melintang:

$$P_2 P_4 = 12 \text{ cm}$$

$$\text{Seluruh cabang lain} = 9 \text{ cm}^2$$

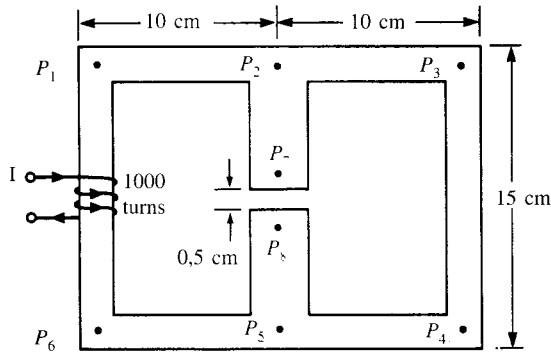
- 14.11 Untuk menghasilkan fluks magnet sebesar $0,5 \text{ Wb/m}^2$ dalam celah udara dari rangkaian magnetik dalam Gambar P14.11, berapakah arus yang harus ada dalam koil? $\mu = 200\mu_0$. Luas penampang semua cabang adalah 4 cm^2 .

Gambar P14.11



- 14.12** Perhatikan rangkaian magnet dalam Gambar P14.12. Kerapatan fluks magnetik B_{udara} adalah 0,1 T dalam celah udara. Dengan asumsi tidak ada kebocoran fluks, tentukan arus I . Petunjuk: Tentukan kuantitas-kuantitas ini secara berurutan jumlah dari H dalam cabang 2-7-8-5, kemudian H dan B dari cabang 2-3-4-5, kemudian Ψ dari seluruh cabang dan kemudian Ψ dari cabang 5-6-1-2.

Gambar P14.12



Luas potongan melintang:

$$P_{2785} = 10 \text{ cm}^2$$

seluruhnya

$$\text{yang lain} = 6 \text{ cm}^2$$

$$\mu = 100 \mu_0$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$$

- 14.13** Tentukan nilai pendekatan dari B dalam rangkaian magnet pada Gambar 14.17a untuk arus eksitasi $I = 15 \text{ A}$. Seluruh kondisi lainnya tidak berubah. Lakukan iterasi waktu untuk mendapatkan keakuratan sampai digit ketiga.
- 14.14** Tulis program komputer untuk melakukan prosedur iterasi pada Contoh 14.5. Pertama-tama, buat pendekatan untuk kurva nonlinear dalam Gambar 14.17b dengan polinomial orde kelima. Kemudian lakukan iterasi sebanyak lima kali untuk mendapatkan pendekatan orde keempat untuk B .

15 MEDAN ELEKTROKUASISTATIK

Dalam bab 2 sampai 8 telah kita pelajari medan harmonik waktu, yang merupakan fungsi periodik waktu. Dalam bab 9 sampai 14 telah dipelajari medan statik, yang tidak bervariasi terhadap waktu. Dalam bab ini kita akan meninjau medan yang tidak statik tetapi berubah dengan lambat terhadap waktu. Medan elektromagnetik yang lambat berubah ini disebut medan kuasistatik. Medan elektromagnetik yang dihasilkan oleh saluran transmisi daya dan dihasilkan di dalam generator, motor, trafo, dan peralatan listrik lainnya adalah medan kuasistatik.

Setelah kita definisikan medan kuasistatik secara matematis, kita akan membedakannya menjadi dua kategori yaitu elektrokuasistatik dan magnetokuasistatik. Bab ini akan memberikan contoh medan elektrokuasistatik dan bab 16 membahas medan magnetokuasistatik.

15.1 PENDEKATAN KUASISTATIK

Ketika medan elektromagnetik berubah lambat dengan waktu, suku-suku yang melibatkan turunan waktu merupakan kuantitas yang kecil. Ketika seluruh turunan waktu diabaikan dalam persamaan Maxwell, akan diperoleh kelompok persamaan di bawah ini, yang didefinisikan sebagai **persamaan orde nol**:

$$\nabla \times \mathbf{E}^{(0)} = 0 \quad (15.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}^{(0)} = \mathbf{J}^{(0)} \quad (15.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}^{(0)} = \rho_v^{(0)} \quad (15.1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}^{(0)} = 0 \quad (15.1d)$$

Ingat bahwa persamaan di atas mirip dengan persamaan medan elektrostatik dan persamaan magnetostatik.

Medan orde nol sering cukup akurat untuk diterapkan pada banyak aplikasi. Jika itu memerlukan keakuratan yang lebih, **suku orde pertama** dihitung berdasarkan persamaan berikut:

$$\nabla \times \mathbf{E}^{(1)} = -\frac{\partial \mathbf{B}^{(0)}}{\partial t} \quad (15.2a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}^{(1)} = \mathbf{J}^{(1)} + \frac{\partial \mathbf{D}^{(0)}}{\partial t} \quad (15.2b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}^{(1)} = \rho_v^{(1)} \quad (15.2c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}^{(1)} = 0 \quad (15.2d)$$

Kita lihat bahwa suku-suku yang melibatkan turunan waktu akan diletakkan kembali ke dalam persamaan Maxwell. Namun demikian, suku-suku ini merupakan kuantitas pendekatan karena merupakan turunan waktu dari medan orde nol bukan merupakan turunan waktu dari medan pastinya. Telah dikatakan bahwa ketika medan berubah lambat terhadap waktu, suku-suku turunan waktunya merupakan kuantitas yang kecil. Jadi, galat akan cenderung rendah apabila kita menggunakan suku-suku pendekatan dan bukan suku eksak.

Ketika hasil yang diperlukan membutuhkan keakuratan yang tinggi, maka suku **orde kedua** dapat dihitung dengan menggunakan persamaan berikut ini:

$$\nabla \times \mathbf{E}^{(2)} = -\frac{\partial \mathbf{B}^{(1)}}{\partial t} \quad (15.3a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}^{(2)} = \mathbf{J}^{(2)} + \frac{\partial \mathbf{D}^{(1)}}{\partial t} \quad (15.3b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}^{(2)} = \rho_v^{(2)} \quad (15.3c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}^{(2)} = 0 \quad (15.3d)$$

Prosesnya dapat berlanjut terus, menerus. Secara umum, untuk suku-suku **orde ke- n** , kita dapatkan:

$$\nabla \times \mathbf{E}^{(n)} = -\frac{\partial \mathbf{B}^{(n-1)}}{\partial t} \quad (15.4a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}^{(n)} = \mathbf{J}^{(n)} + \frac{\partial \mathbf{D}^{(n-1)}}{\partial t} \quad (15.4b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}^{(n)} = \rho_v^{(n)} \quad (15.4c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}^{(n)} = 0 \quad (15.4d)$$

Kita dapat membuktikan bahwa medan pastinya sama dengan jumlah dari medan-medan parsial terkaitnya. Artinya, misalkan

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{E}^{(2)} + \dots + \mathbf{E}^{(n)} + \dots \quad (15.5a)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^{(0)} + \mathbf{H}^{(1)} + \mathbf{H}^{(2)} + \dots + \mathbf{H}^{(n)} + \dots \quad (15.5b)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^{(0)} + \mathbf{B}^{(1)} + \mathbf{B}^{(2)} + \dots + \mathbf{B}^{(n)} + \dots \quad (15.5c)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^{(0)} + \mathbf{D}^{(1)} + \mathbf{D}^{(2)} + \dots + \mathbf{D}^{(n)} + \dots \quad (15.5d)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}^{(0)} + \mathbf{J}^{(1)} + \mathbf{J}^{(2)} + \dots + \mathbf{J}^{(n)} + \dots \quad (15.5e)$$

$$\rho_v = \rho_v^{(0)} + \rho_v^{(1)} + \rho_v^{(2)} + \dots + \rho_v^{(n)} + \dots \quad (15.5f)$$

kemudian \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{B} , \mathbf{D} , \mathbf{J} , ρ_v merupakan medan elektromagnetik, arus, dan pelepasan pasti yang didapat dari persamaan Maxwell. Pernyataan sebelumnya dapat dibuktikan dengan menambahkan persamaan (15.1a), (15.2a), (15.3a), dan seterusnya untuk mendapatkan hasil berikut:

$$\begin{aligned} \nabla \times [\mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{E}^{(2)} + \dots + \mathbf{E}^{(n)} + \dots] \\ = 0 - \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) [\mathbf{B}^{(0)} + \mathbf{B}^{(1)} + \mathbf{B}^{(2)} + \dots + \mathbf{B}^{(n)} + \dots] \end{aligned}$$

Substitusi (15.5a) dan (15.5c) dalam persamaan di atas akan menghasilkan

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

yang merupakan persamaan Maxwell pertama. Persamaan-persamaan lainnya dapat diperoleh dengan cara yang sama.*

Singkat kata, untuk medan kuasistatik, medan orde nol dapat diperoleh dari persamaan orde nol (15.1). Medan orde pertama dapat diperoleh dari (15.2) dan untuk medan orde nol, kita sudah memperoleh penyelesaiannya. Medan orde pertama dapat ditambahkan pada medan orde nol untuk memperbaiki keakuratan hasilnya. Medan orde kedua dan orde yang lebih tinggi didapat dari cara yang sama apabila dibutuhkan keakuratan yang lebih tinggi.

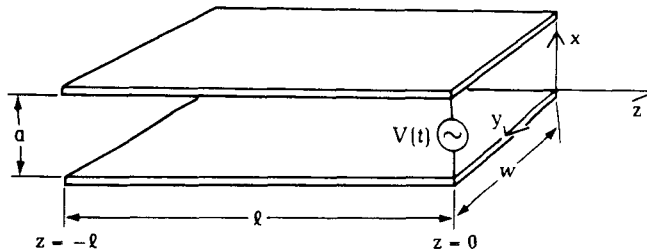
Medan Kuasistatik dalam Daerah Keping Sejajar

Perhatikan keping sejajar pada Gambar 15.1. Sumber tegangan berubah terhadap waktu $V(t)$ ditempatkan pada $z = 0$ di antara bidang, di mana

$$V(t) = V_0 \cos \omega t \quad (15.6)$$

Di mana V_0 diasumsikan sebagai konstanta yang tidak tergantung pada ω .

Gambar 15.1 Sebuah keping sejajar dihubungkan dengan sumber tegangan harmonik waktu.



Medan listrik orde nol hanya merupakan medan listrik statik. Untuk keping sejajar dengan tegangan V , jarak pemisah a , medan elektrostatis yang dihasilkan adalah

$$\mathbf{E}^{(0)} = -\hat{x} \frac{V(t)}{a} = -\hat{x} \frac{V_0}{a} \cos \omega t \quad (15.7)$$

Dalam daerah keping sejajar tidak terdapat kerapatan arus \mathbf{J} . Oleh karena itu, orde nol \mathbf{H} bernilai nol:

$$\mathbf{H}^{(0)} = 0$$

$\mathbf{E}^{(1)}$ orde pertama adalah nol berdasarkan (15.2a) karena $\mathbf{H}^0 = 0$. Orde pertama $\mathbf{H}^{(1)}$ dapat ditentukan dari (15.2b). Dalam daerah keping sejajar tidak terdapat kerapatan arus \mathbf{J} sehingga $\mathbf{J} = 0$ untuk seluruh orde. Persamaan (15.2) menyatakan hubungan berikut:

$$\nabla \times \mathbf{H}^{(1)} = \hat{x} \frac{V_0 \epsilon \omega}{a} \sin(\omega t) \quad (15.8)$$

*Penurunan yang berbeda dari persamaan-persamaan kuasistatik ini diberikan dalam: R. M. Fano, L.J. Chus dan R.B. Adler, *Electromagnetic Fields, Energy and Forces*, New York: Wiley 1960; Bab 6.

Dengan menganggap bahwa lebar keping tersebut jauh lebih besar daripada jarak pemisahannya—artinya, $w \gg a$ — kita dapat menganggap bahwa keping memiliki lebar tak berhingga dan medannya tidak tergantung pada y . Akibatnya, persamaan (15.8) akan menjadi:

$$\hat{x} \frac{\partial H_y^{(1)}}{\partial z} = \hat{x} \frac{V_0 \epsilon \omega}{a} \sin(\omega t)$$

Integrasi kedua ruas dari persamaan di atas akan menghasilkan

$$H_y^{(1)} = -\frac{V_0 \epsilon \omega}{a} z \sin(\omega t) + C$$

Konstanta C merupakan konstanta integrasi yang harus ditentukan dari kondisi batasnya. Arus permukaan pada keping sebelah atasnya adalah:

$$\mathbf{J}_s^{(1)} = \hat{n} \times \mathbf{H}^{(1)} = -\hat{x} \times \mathbf{H}^{(1)}$$

Karena keping sejajar berakhir pada $z = 0$, arus permukaannya harus sama dengan nol. Akibatnya,

$$C = 0$$

Kesimpulannya, medan orde pertama adalah sebagai berikut:

$$\mathbf{H}^{(1)} = -\hat{y} \omega z \frac{\epsilon V_0}{a} \sin \omega t \quad (15.9a)$$

$$\mathbf{E}^{(1)} = 0 \quad (15.9b)$$

Kita telah mendapatkan medan listrik dan medan magnet orde nol dan pertama dan dapat meneruskan proses untuk mendapatkan persamaan dengan orde yang lebih tinggi lagi. Perhatikan bahwa

$$\nabla \times \mathbf{H}^{(2)} = \frac{\partial}{\partial t} \epsilon \mathbf{E}^{(1)}$$

Karena $\mathbf{E}^{(1)} = 0$, kita memiliki

$$\mathbf{H}^{(2)} = 0$$

kembali, dari (15.3a)

$$\nabla \times \mathbf{E}^{(2)} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}^{(1)} = \hat{y} \mu \omega^2 z \frac{V_0 \epsilon}{a} \cos \omega t$$

Medan listrik merupakan fungsi z dan titik t menunjuk arah \hat{x} . Dari

$$\frac{\partial}{\partial z} E_x^{(2)} = \mu \omega^2 z \frac{\epsilon V_0}{a} \cos \omega t$$

Kita mendapatkan

$$\mathbf{E}^{(2)} = \hat{x} \frac{V_0}{a} k^2 \cos \omega t \left(\frac{1}{2} z^2 + C_1 \right) = \hat{x} \frac{V_0}{2a} k^2 z^2 \cos \omega t \quad (15.10)$$

di mana $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$. Konstanta integrasi C_1 sama dengan nol karena kita menginginkan $E(z = 0)$ sama dengan $-\mathbf{x}(V_0/a) \cos \omega t$, yang ditentukan berdasarkan kenyataan bahwa sumber tegangan terdapat pada $z = 0$.

Dengan melanjutkan proses, kita memperoleh medan magnet orde ke tiga

$$\mathbf{H}^{(3)} = \hat{y} \frac{\mu \epsilon^2 \omega^3 V_0}{3 \cdot 2a} z^3 \sin \omega t = \hat{y} \frac{V_0}{3 \cdot 2a\eta} k^3 z^3 \sin \omega t \quad (15.11)$$

di mana $\eta = (\mu/\epsilon)^{1/2}$. Medan listrik orde ketiga $E^{(3)}$ sama dengan nol dan medan listrik orde keempat adalah

$$H^{(4)} = -\hat{x} \frac{V_0}{4 \cdot 3 \cdot 2a} k^4 z^4 \cos \omega t \quad (15.12)$$

dan selanjutnya. Bentuk umum medan orde ke- n ini adalah

$$E^{(n)} = -\hat{x} \begin{cases} (-1)^{n/2} \frac{V_0}{n!a} (kz)^n \sin \omega t & n = 0, 2, 4, \dots \\ 0 & n = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

$$H^{(n)} = -\hat{y} \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2} \frac{V_0}{n!a\eta} (kz)^n \sin \omega t & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & n = 0, 2, 4, \dots \end{cases}$$

Jumlah tak berhingga dari suku-suku di atas akan menghasilkan penyelesaian gelombang penuh:

$$E = \sum_n E^{(n)} = -\hat{x} \frac{V_0}{a} \cos kz \cos \omega t \quad (15.13a)$$

$$H = \sum_n H^{(n)} = -\hat{y} \frac{V_0}{a\eta} \sin kz \sin \omega t \quad (15.13b)$$

Dalam notasi kompleks, kita memperoleh

$$E = -\hat{x} \frac{V_0}{a} \cos kz \quad (15.14a)$$

$$H = \hat{y} \frac{jV_0}{a\eta} \sin kz \quad (15.14b)$$

Sehingga $\text{Re} \{Ee^{j\omega t}\}$ akan menghasilkan (15.13a) dan $\text{Re} \{He^{j\omega t}\}$ akan menghasilkan (15.13b). Penyelesaian yang diperoleh dari (15.14a) dan (15.14b) menyatakan superposisi dari gelombang dalam arah \hat{z} positif dan superposisi gelombang dalam arah \hat{z} negatif.

$$E = -\hat{x} \frac{V_0}{2a} (e^{-jkz} + e^{jkz})$$

$$H = -\hat{y} \frac{V_0}{2a\eta} (e^{-jkz} - e^{jkz})$$

yang merupakan gelombang TEM dalam pemandu gelombang keping sejajar, seperti sudah yang didiskusikan dalam bab 5. Total E dan H dalam (15.14a) dan (15.14b) merupakan gelombang berdiri yang memenuhi kondisi batas rangkaian terbuka pada $z = 0$ di mana $J(z = 0) = \hat{n} \leftrightarrow H(z = 0) = 0$

15.2 TEORI RANGKAIAN DAN ELEKTROKUISTATIKA RANGKAIAN

Dalam teori rangkaian, kapasitansi C , induktansi L dan resistansi R dicirikan oleh 2 variabel —yaitu tegangan $V(t)$ dan arus $I(t)$. Untuk elemen dengan kapasitansi C , $V(t)$ dan $I(t)$ dihubungkan oleh:

$$I(t) = C \frac{dV(t)}{dt} \quad (15.15)$$

Untuk elemen dengan induktansi L ,

$$V(t) = L \frac{dI(t)}{dt} \quad (15.16)$$

Resistansi R memberikan hubungan linear antara V dan I

$$V(t) = RI(t) \quad (15.17)$$

Invers dari R adalah konduktansi G , dan kita mendapatkan

$$I(t) = GV(t) \quad (15.18)$$

Dalam bab sebelumnya medan statik, kita mendefinisikan kapasitansi, induktansi dan resistansi dari sudut pandang medan statik.

Dari sudut pandang elektrokuasistatik, kita memiliki medan listrik orde nol yang akan menimbulkan arus orde pertama yang terkait dengan medan magnet orde pertama. Definisi statik untuk kapasitansi adalah

$$Q = CV$$

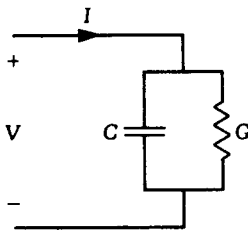
Dengan mengambil turunan waktu pada kedua ruas dan melihat bahwa $I = dQ/dt$, kita dapatkan

$$I = C \frac{dV}{dt}$$

yang sama dengan (15.15). Pada umumnya, arus terdiri dari dua komponen, satu dihubungkan dengan potensial orde nol dan lainnya adalah (15.18). Jadi, kita memiliki

$$I = GV + C \frac{dV}{dt} \quad (15.19)$$

rumus ini menyatakan kombinasi paralel dari suatu konduktansi dan kapasitansi (Gambar 15.2).



Gambar 15.2 Sirkuit ekivalen dari kapasitor realistik.

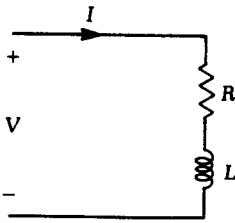
Dari sudut pandang magnetokuasistatik, kita memiliki medan magnet orde nol yang akan menimbulkan medan listrik orde pertama. Definisi statik untuk induktansi adalah

$$\Psi = LI$$

Bab 16 akan menunjukkan bahwa turunan waktu dari fluks magnet akan menghasilkan tegangan V . Jadi, dengan mengambil turunan waktu pada kedua ruas dari persamaan di atas kita akan memperoleh

$$V = L \frac{dI}{dt}$$

yang sama dengan (15.16). Pada umumnya, arus orde nol menghasilkan medan magnet orde nol, yang pada gilirannya akan membangkitkan medan listrik orde pertama. Tegangan yang terkait dengan medan listrik orde pertama diberikan dalam (15.16). Arus orde nol juga akan menyebabkan penurunan tegangan dalam suatu resistansi. Jadi, kita akan memperoleh



Gambar 15.3 Sirkit ekivalen dari induktor realistik.

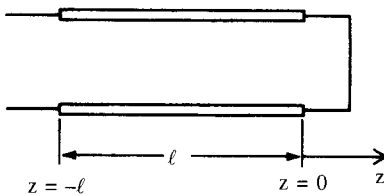
$$V = RI + L \frac{dI}{dt} \quad (15.20)$$

Rumus ini menyatakan kombinasi seri dari suatu resistansi R dan induktansi L (Gambar 15.3)

Batasan Magnetokuasistatik dari Saluran Transmisi Hubungan Pendek

Seperti telah dipelajari pada bab 6, distribusi tegangan dan arus pada saluran transmisi hubungan pendek (Gambar 15.4) akan mempunyai bentuk:

$$V = V_0 \sin kz \quad (15.21a)$$



Gambar 15.4 Saluran transmisi hubungan pendek

$$I = j \frac{V_0}{Z_0} \cos kz \quad (15.21b)$$

di mana $k = \omega\sqrt{LC}$ dan $Z_0 = \sqrt{L/C}$. Terlihat bahwa $V = 0$ pada ujung hubungan pendek (*short circuit*), di mana $z = 0$. Sesuai dengan asumsi magnetokuasistatik, arus orde nol adalah, dengan menganggap $\cos kz \approx 1$.

$$I = \frac{jV_0}{Z_0}$$

Dengan mengambil pendekatan $\sin kz \approx kz$ dalam (15.21), terlihat bahwa tegangan orde nol adalah nol dan persamaan orde pertamanya adalah

$$V \approx V_0 kz$$

Pada ujung masukan, di mana $z = -\ell$, impedansi masukan akan menjadi

$$Z = \frac{V}{I} = jk\ell Z_0 = j\omega\sqrt{LC}\ell\sqrt{\frac{L}{C}} = j\omega(L\ell)$$

Impedansi ini merupakan impedansi dari suatu induktor dengan induktansi $L\ell$, di mana L adalah induktansi karakteristik per satuan panjang saluran transmisi dan ℓ adalah panjangnya.

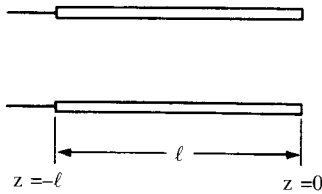
Bab berikutnya akan memberikan lebih banyak contoh untuk medan magnetokuasistatik. Dalam bab ini kita akan berkonsentrasi pada medan elektrokuasistatik.

Batasan Elektrokuasistatik dari Saluran Transmisi Hubungan Terbuka

Sebagaimana telah kita pelajari dalam bab 6, tegangan dan arus pada saluran transmisi rangkaian terbuka (Gambar 15.4) adalah

$$V = V_0 \cos kz \quad (15.22a)$$

$$I = \frac{V_0}{jZ_0} \sin kz \quad (15.22b)$$



Gambar 15.5 Saluran transmisi hubungan terbuka

Kita lihat bahwa $I = 0$ pada $z = 0$. Sesuai dengan elektrokuasistatik, tegangan orde nol adalah

$$V \approx V_0$$

Dan arus orde pertama adalah

$$I \approx \frac{V_0}{jZ_0} kz$$

Jadi, dalam batasan elektrokuasistatik, tegangan merupakan konstanta saluran transmisi dan arus berubah linear sesuai dengan z dan $z = 0$ pada ujung hubungan terbuka. Pada ujung masukan, di mana $z = -l$, impedansi masukan akan menjadi

$$Z = \frac{V}{I} = -j \frac{Z_0}{kl} = \frac{1}{j\omega C\ell}$$

yang merupakan impedansi suatu kapasitor dengan kapasitansi $C\ell$, dengan C kapasitansi karakteristik per panjang satuan untuk saluran transmisi dan ℓ panjang saluran transmisi.

Ingat bahwa pembahasan selanjutnya menunjukkan bahwa batasan kuasistatik adalah sah ketika $kz \ll 1$, sehingga frekuensi lainnya juga harus sangat rendah atau panjang saluran transmisi $z = \ell$ harus lebih pendek daripada panjang gelombangnya.

Medan Elektrokuasistatik dari suatu Dipol

Bab 7 memberikan penyelesaian yang pasti untuk batasan elektrokuasistatik dari medan dipol. Medan listrik dan magnet akibat elemen arus dengan momen dipol $I\ell$ adalah

$$\mathbf{E} = \frac{\eta k I \ell e^{-jkr}}{4\pi r} \left\{ \hat{\mathbf{r}} \left[\frac{1}{jkr} + \left(\frac{1}{jkr} \right)^2 \right] 2 \cos \theta + \hat{\boldsymbol{\theta}} \left[1 + \frac{1}{jkr} + \left(\frac{1}{jkr} \right)^2 \right] \sin \theta \right\} \quad (15.23a)$$

$$\mathbf{H} = \hat{\phi} \frac{jkI\ell e^{-jkr}}{4\pi r} \left(1 + \frac{1}{jkr}\right) \sin \theta \quad (15.23b)$$

Dalam batasan elektrokuasistatik, kita ingin memperoleh medan listrik orde nol, yang tidak tergantung pada ω . Dalam (15.23a), kita anggap $\omega = 0$ dengan memperhatikan bahwa $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = 0$. Juga ingat bahwa sumber untuk medan elektrokuasistatik merupakan muatan dan bukan arus. Jadi, kita tulis $I\ell = j\omega q\ell$, di mana $q\ell$ adalah momen dipol listrik dengan turunan waktunya akan menimbulkan momen dipol arus $I\ell$. Dari (15.23a), kita dapatkan

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{j\omega\sqrt{\mu\epsilon}(j\omega q\ell)}{4\pi r} \left[\hat{r} \left(\frac{1}{j\omega\sqrt{\mu\epsilon}r} \right)^2 2 \cos \theta + \hat{\theta} \left(\frac{1}{j\omega\sqrt{\mu\epsilon}r} \right)^2 \sin \theta \right] \\ &\approx \frac{q\ell}{4\pi\epsilon r^3} (\hat{r} 2 \cos \theta + \hat{\theta} \sin \theta) \end{aligned}$$

Medan magnet orde pertama diturunkan dari momen arus $I\ell$, dan seperti kita lihat dari (15.23b), kita dapatkan

$$\mathbf{H} = \hat{\phi} \frac{I\ell}{4\pi r^2} \sin \theta$$

Hasil ini identik dengan medan magnet yang diberikan oleh hukum Biot-Savart untuk elemen arus dalam arah z .

Ingat bahwa dalam pendekatan di atas kita telah mentapkan $kr \ll 1$, sehingga frekuensi harus serendah mungkin atau jarak pengamatan r harus lebih pendek daripada panjang gelombangnya.

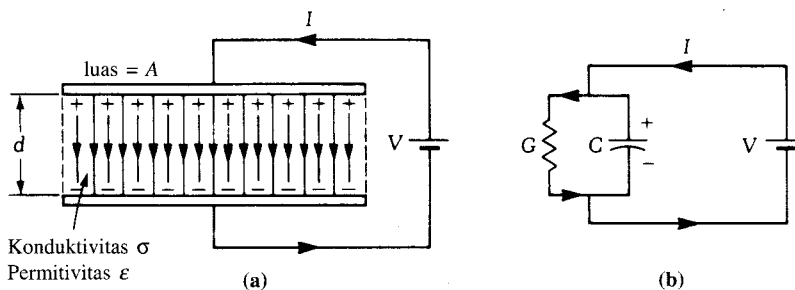
Contoh 15.1 Contoh ini menunjukkan bagaimana menggunakan teori kuasistatik untuk mendapatkan rangkaian ekuivalen dari kapasitor sederhana yang diisi dengan isolator yang kurang sempurna

Tentukan rangkaian ekuivalen untuk keping sejajar yang diisi dengan bahan yang memiliki konduktivitas σ dan permitivitas ϵ (Gambar 15.6a).

Solusi Medan listrik orde nol adalah

$$E^{(0)} = \frac{V}{d}$$

Gambar 15.6 (a) suatu keping sejajar diisi dengan material berkarakteristik σ dan ϵ . (b) sirkuit ekuivalen dari keping sejajar yang ditunjukkan dalam (a) kapasitor ideal C paralel dengan resistor ideal G .



Arus orde nol yang terkait dengan $E^{(0)}$ adalah

$$I^{(0)} = \iint_A dS \sigma E^{(0)} = \sigma \frac{A}{d} V = GV$$

di mana A adalah luas permukaan keping dan $G = \sigma A/d$ adalah konduktansi. Muatan total permukaan orde nol adalah

$$Q_s^{(0)} = \iint_A dS \rho_s^{(0)} = \epsilon \frac{A}{d} V = CV$$

di mana $C = \epsilon A/d$ adalah kapasitansi. Arus orde pertama yang diturunkan dari $Q_s^{(0)}$ adalah

$$I^{(1)} = \frac{dQ_s^{(0)}}{dt} = C \frac{dV}{dt}$$

Arus kuasistatik total adalah

$$I = I^{(0)} + I^{(1)} = GV + C \frac{dV}{dt}$$

Gambar 15.6b menunjukkan rangkaian ekivalen yang juga sudah diturunkan pada bab 12.

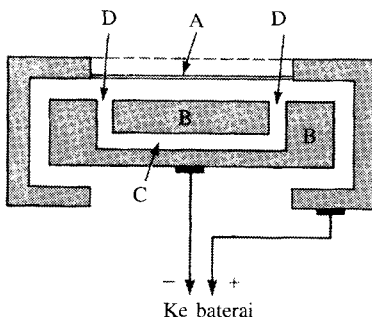
Mikrofon Kondensor

Pada medan elektrokuasistatik, arus orde pertama didapat dari turunan waktu dari distribusi muatan orde nol. Untuk kapasitor yang membawa muatan $Q = CV$, arus orde pertamanya adalah

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}(CV) = C \frac{dV}{dt} + V \frac{dC}{dt}$$

Suku kedua adalah nol ketika kapasitansi bukan merupakan fungsi waktu. Jika kapasitor berubah bentuk terhadap waktu, variasi C dengan waktu akan menciptakan arus listrik. Transduser elektrokuasistatik merupakan contoh piranti yang menggunakan suku kedua dengan melakukan vibrasi mekanik terhadap suatu kapasitor untuk membangkitkan arus listrik. Contoh, transdusernya adalah mikrofon kondensor, osilator kristal, elektrometer buluh getar, dan sistem kemudi plesoelektrik, seperti kuarsa dan garam Rochelle yang digunakan pada generasi supersonik, pengeras suara, pengangkat fonograf, dan pengukur ke dalam sonik di lautan.

Prinsip operasi mikrofon kondensor didasarkan pada medan kuasistatik yang diinduksikan oleh pergerakan salah satu sisi kondensor (lebih diketahui sebagai kapasitor). Dalam mikrofon kondensor, diafragma keping logam dikencangkan dengan kuat, tetapi masih dapat bergerak untuk menanggapi transien suara. Mikropon ini biasanya terbuat dari plastik, seperti polyester film yang diberi lapisan emas yang tipis dan sangat halus untuk



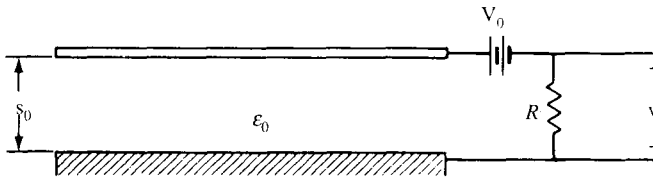
Gambar 15.7 pandangan melintang sederhana dari suatu mikrofon kondensor. A adalah diafragma, B adalah keping dasar berongga dengan kavitas C , yang memiliki bukaan D . A dan B membentuk kapasitor (kondensor) dan kavitas mengatur peredaman vibrasi diafragma agar menghasilkan tanggapan frekuensi yang seragam

membuatnya konduktif. Diafragma tersebut membentuk satu dari suatu kapasitor yang latar plastik belakangnya menjadi dielektrik yang letaknya menghadap elektroda keping belakang yang tidak bergerak (Gambar (15.7)). Kapasitor tersebut dihubungkan dengan sebuah sumber tegangan dc antara 50 sampai 200 V. Di bawah tekanan suara, diafragma bervibrasi dan menyebabkan kapasitansinya berubah, yang akhirnya membangkitkan sinyal listrik.*

Contoh 15.2 *Contoh ini menunjukkan bagaimana suatu mikrofon kondensor bekerja.*

Gambar 15.8 menunjukkan rangkaian dari suatu mikropon kondensor. Untuk suatu tekanan suara harmonik waktu yang menciptakan pergerakan diafragma $s(t) = S_1 \cos \omega t$, tentukan tegangan keluaran $v(t)$ yang terhubung ke sebuah penguat transistor. Misalkan $V_0 = 50$ volt, $R = 10^7 \Omega$, dan luas diafragma $A = 8 \text{ cm}^2$; apabila tekanan suara tidak ada, $S_0 = 25 \mu\text{m}$, $S_1 = 1 \text{ mm}$ dan frekuensi $f = 1 \text{ kHz}$.

Gambar 15.8 Rangkaian listrik dari suatu mikrofon kondensor (Contoh 15.2).



Solusi

Kapasitansi kapasitor pada saat ada tekanan suara ada adalah

$$C(t) = \frac{\epsilon_0 A}{S(t)}$$

di mana $S(t) = S_0 + s(t)$ dan $s(t)$ terjadi akibat adanya tekanan suara. Muatan total orde nol pada kapasitor adalah

$$Q(t) = C(t)[V_0 + v(t)]$$

Arus kuasistatik orde pertama adalah

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$$

Karena tegangan pada R adalah $v = RI$, kita dapatkan

$$v(t) = -R \frac{dQ(t)}{dt} = -R \frac{dC(t)}{dt} [V_0 + v(t)] - RC(t) \frac{dv(t)}{dt}$$

Yang dapat diatur kembali agar menghasilkan persamaan diferensial untuk $v(t)$:

$$RC \frac{dv(t)}{dt} + \left[1 - R \frac{\epsilon_0 A}{S^2(t)} \frac{ds(t)}{dt} \right] v(t) = R \frac{\epsilon_0 A}{S^2(t)} \frac{ds(t)}{dt} V_0$$

Perhatikan bahwa $v(t)$ dan $ds(t)/dt$ adalah kuantitas orde pertama. Mengabaikan suku-suku dengan orde yang lebih tinggi dari orde pertama akan menghasilkan

$$RC_0 \frac{dv(t)}{dt} + v(t) = RC_0 V_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{s(t)}{S_0} \right)$$

*L. Burroughs, *Microphones: Design and Application*, Plainview, NY, Sagamore, Publishing Co., 1974, hal. 42.

di mana

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{S_0}$$

Menggunakan notasi kompleks dengan $v(t) = \text{Re} \{V e^{j\omega t}\}$ dan $s(t) = \text{Re} \{S_1 e^{j\omega t}\}$ akan menghasilkan

$$V = \frac{S_1 / S_0}{1 + \frac{1}{j\omega R C_0}} V_0$$

Dari nilai numerik yang diberikan, kita mendapatkan magnitudo tegangan keluaran

$$|V| = \frac{2}{\sqrt{1 + \left(\frac{25 \times 10^{-6}}{2\pi \times 10^3 \times 10^7 \times 8,85 \times 10^{-12} \times 8 \times 10^{-4}} \right)^2}} = 2,0 \text{ volt}$$

Perhatikan bahwa tegangan induksi $|V|$ berbanding lurus dengan amplitudo vibrasi diafragma $|S_1|$ ketika $\omega R C_0 \gg 1$.

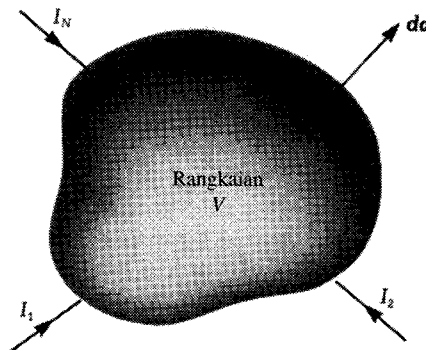
Daya Poynting dalam Elektrokuasistatika

Dalam elektrokuasistatika, medan listrik E dihubungkan dengan potensial Φ oleh

$$E = -\nabla\Phi$$

Perhatikan volume V berisi elemen rangkaian yang saling dihubungkan dan diselubungi oleh permukaan A (Gambar 15.9). Daya Poynting memasuki permukaan tersebut dan diberikan oleh

$$\begin{aligned} P &= -\oint_A d\mathbf{a} \cdot (E \times H) = \oint_A d\mathbf{a} \cdot [(\nabla\Phi) \times H] \\ &= \iiint_V dV \nabla \cdot [(\nabla\Phi) \times H] = \iiint_V dV \nabla \cdot [\nabla \times (\Phi H) - \Phi \nabla \times H] \\ &= -\iiint_V dV \nabla \cdot (\Phi \nabla \times H) = -\oint_A d\mathbf{a} \cdot \Phi \nabla \times H \\ &= -\oint_A d\mathbf{a} \cdot \Phi \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \end{aligned}$$



Gambar 15.9 Aplikasi teorema Poynting untuk medan kuasistatik terhadap suatu rangkaian dalam volume V .

Dengan mengabaikan arus perpindahan $\partial \mathbf{D} / \partial t$, kita dapatkan

$$P = - \oint_A d\mathbf{a} \cdot \Phi \mathbf{J} \sum_{n=1}^N V_n \left(- \oint_{A_n} d\mathbf{a} \cdot \mathbf{J} \right) \sum_{n=1}^N V_n I_n$$

Di mana I_n menyatakan arus yang mengalir ke dalam volume melalui permukaan A_n , yang permukaan normalnya mengarah keluar. Jadi, kita telah menetapkan bahwa konsep teori rangkaian dari masukan daya (*power input*) akan sah hanya ketika arus perpindahannya sangat kecil.

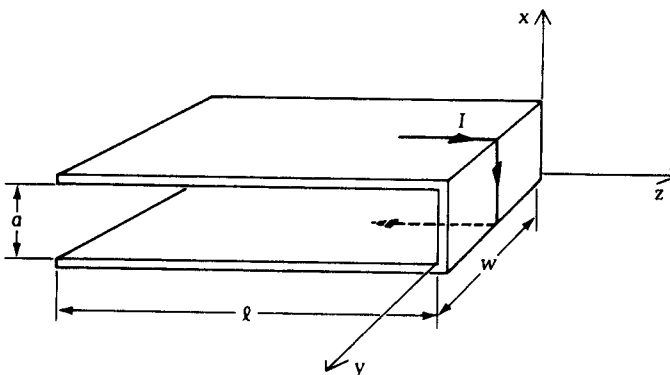
RINGKASAN

1. Ketika frekuensi begitu rendah sehingga panjang gelombang lebih besar daripada ukuran fisik daerahnya, persamaan Maxwell dapat diuraikan menjadi subhimpunan persamaan. Himpunan persamaan pertama didapat dengan menetapkan frekuensi sama dengan nol. Hasilnya adalah persamaan orde nol, tepatnya persamaan elektrostatik dan magnetostatik.
2. Persamaan orde pertama didapat dengan mengganti suku-suku turunan waktu pada persamaan Maxwell dengan suku-suku orde nol dan suku-suku turunan spasialnya (divergensi dan curl) dinyatakan sebagai medan orde pertama.
3. Serupa halnya, persamaan orde ke- m merupakan persamaan Maxwell yang dibentuk dari penggunaan turunan waktu dari medan orde ke- $(m-1)$ dan turunan spasial dari medan orde ke- m .
4. Medan totalnya merupakan jumlah medan orde nol, pertama, dan lain-lain. Terkadang hanya suku orde nol dan kemungkinan suku orde pertama yang diperlukan untuk mencapai keakuratan yang dibutuhkan pada keadaan frekuensi rendah.

Soal-soal

- 15.1** Perhatikan keping sejajar terhubung singkat seperti pada Gambar P15.1 dengan lebar w , panjang ℓ , dan jarak a . Tentukan medan listrik dan magnet orde nol, pertama kedua, ketiga. Tunjukkan bahwa jumlah penyelesaian kuasistatiknya sama dengan gelombang penuh seperti yang terdapat dalam bab 6 untuk saluran transmisi terhubung singkat. Asumsikan bahwa arus pada $z = 0$ adalah $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ dan seluruh medan merupakan fungsi t dan z saja.

Gambar P15.1 Suatu keping sejajar dengan arus hubungan singkat $I = I_0 \cos(\omega t)$ pada $z = 0$.

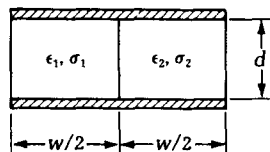


- 15.2** Hitunglah energi listrik tersimpan total orde nol dalam daerah keping sejajar pada Gambar 15.1. Apakah energi magnet tersimpan orde nol tersebut akan berada dalam daerah yang sama?
- 15.3** Hitunglah energi magnet tersimpan total orde pertama di daerah keping sejajar pada Gambar 15.1. Apakah energi listrik tersimpan orde pertama ini akan berada dalam volume yang sama? Nyatakan $U_{Hm}^{(1)}$ energi magnet tersimpan total maksimum orde pertama pada daerah tersebut dan $U_{Em}^{(0)}$ energi listrik tersimpan total maksimum orde pertama dalam volume yang sama.

Tunjukkan bahwa

$$\frac{U_{Hm}^{(1)}}{U_{Em}^{(0)}} = \frac{1}{3}(k\ell)^2$$

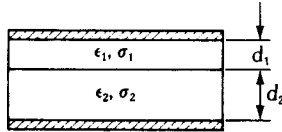
- 15.4** Hitunglah energi listrik tersimpan total orde kedua dalam daerah keping sejajar Gambar 15.1. Bandingkan dengan energi listrik tersimpan orde nol. Jika $\ell = 0,1\lambda$, apa yang dapat disimpulkan dari magnitudo relatif dari energi listrik tersimpan orde nol, energi magnet tersimpan orde pertama dan energi listrik tersimpan orde kedua?
- 15.5** Tentukan energi listrik tersimpan total orde nol dan energi magnet tersimpan total pada keping sejajar dengan arus hubungan singkat $I = I_0 \cos(\omega t)$ pada $z = 0$ (lihat soal 15.1)
- 15.6** Tentukan energi listrik dan energi magnet tersimpan orde tertinggi dalam daerah keping sejajar Gambar P15.1 sampai orde ketiga. Jika $\ell = 0,1\lambda$, bandingkan magnitudo relatif energi-energi tersimpan ini. Gunakan energi magnet tersimpan total orde nol yang didapat pada soal 15.5 sebagai perbandingan.
- 15.7** Tabel koaksial sepanjang ℓ meter diisi dengan material berkarakteristik σ dan ϵ . Bagian terdalam dan terluar konduktor adalah a dan b . Tegangan antar konduktor koaksial adalah $V_0 \cos(\omega t)$. Tentukan medan elektrokuasistatik orde nol $E^{(0)}$, arus $I^{(0)}$, muatan $Q^{(0)}$, dan arus orde pertama $I^{(1)}$. Nyatakan semuanya dalam parameter V_0 , a , b , ℓ , σ , ϵ dan ωt .
- 15.8** Dua elektroda bola konsentris dengan radius a dan b diisi dengan material berkarakteristik σ dan ϵ . Tegangan antara elektroda adalah $V_0 \cos(\omega t)$. Tentukan medan elektrokuasistatik orde nol $E^{(0)}$, arus $I^{(0)}$, muatan $Q^{(0)}$ dan arus orde pertama $I^{(1)}$. Nyatakan semuanya dalam parameter V_0 , a , b , σ , ϵ dan ωt .
- 15.9** Tunjukkan bahwa waktu yang diperlukan untuk mengisi muatan generator Van de Graaff (Gambar 9.24a) dengan radius R sampai tegangan maksimum V_{maks} dengan menerapkan arus pemuatan I akan sama dengan $4\pi\epsilon_0 R V_{\text{maks}}/I$. Hitung waktu pemuatan t , jika $R = 1 \text{ m}$, $V_{\text{maks}} = 10^6 \text{ V}$ dan $I = 10^{-5} \text{ A}$.
- 15.10** Suatu keping sejajar diisi 2 material dengan konfigurasi seperti ditunjukkan pada Gambar P15.10. Luas total keping tersebut adalah A . Konstanta dielektrik dan



Gambar P15.10

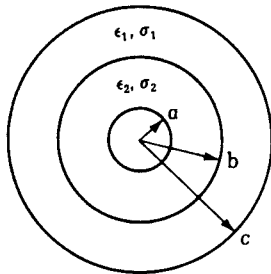
konduktivitas material pertama adalah ϵ_1 dan σ_1 , sedangkan untuk material kedua adalah ϵ_2 dan σ_2 . Keping atas dan bawahnya dihubungkan pada dua terminal sumber frekuensi rendah. Tentukan rangkaian ekuivalen untuk keping sejajar ini dan nyatakan parameter rangkaian dalam A , d , ϵ_1 , σ_1 , ϵ_2 , dan σ_2 .

- 15.11** Sebuah keping paralel diisi dengan 2 jenis bahan dalam susunan seperti yang terlihat pada Gambar P15.11. Keping atas dan bawah ini dihubungkan dengan dua buah terminal yang merupakan sumber frekuensi rendah. Tentukan rangkaian ekuivalennya, dan nyatakan parameter-parameter rangkaian ini dalam A , yaitu luas keping, dan d_1 , d_2 , ϵ_1 , ϵ_2 , σ_1 , dan σ_2 , yang sudah ditentukan dalam gambar tersebut.



Gambar P15.11

- 15.12** Sebuah konduktor bola dengan radius a berada di dalam sebuah kulit penghantar bola dengan radius c . Dua jenis bahan digunakan untuk mengisi ruang di antara konduktor-konduktor ini. Konstanta-konstanta dielektrik dan konduktivitas dari material ini masing-masing adalah ϵ_1 , σ_1 , ϵ_2 , σ_2 . Gambar P15.12 memperlihatkan susunan ini. Konduktor dalam dan konduktor luar dihubungkan dengan dua buah terminal sumber frekuensi rendah. Tentukan rangkaian ekuivalen dari sistem ini, dan nyatakan parameter-parameter rangkaian ini dalam a , b , c , ϵ_1 , ϵ_2 , σ_1 , dan σ_2 .



Gambar P15.12

16 MEDAN MAGNETOKUASISTATIK

Dalam bab sebelumnya, telah diperkenalkan konsep medan kuasistatik dan studi dari medan elektrokuasistatik. Ingatlah bahwa pendekatan kuasistatik berlaku ketika dimensi fisik dari sistem lebih kecil dari panjang gelombang. Pada 60 Hz, contohnya, panjang gelombang di udara 5000 km. Oleh karena itu, hampir semua sistem yang berfrekuensi 60 Hz di udara adalah kuasistatik. Di bawah batas kuasistatik, kita mendapatkan persamaan yang mengatur medan magnetokuasistatik di bab 15. Persamaan-persamaan inilah yang akan dijadikan pokok pembahasan dalam bab ini. Mereka adalah:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

(Medan magnetik orde nol)

(16.1a)

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

(16.1b)

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

(Medan listrik orde pertama)

(16.1c)

di mana \mathbf{H} , \mathbf{B} , dan \mathbf{J} adalah orde nol dan \mathbf{E} adalah orde pertama. Jika diperlukan, dapat dihitung dengan cepat medan dengan orde yang lebih tinggi berdasarkan prosedur yang sudah digambarkan pada bab sebelumnya ini.

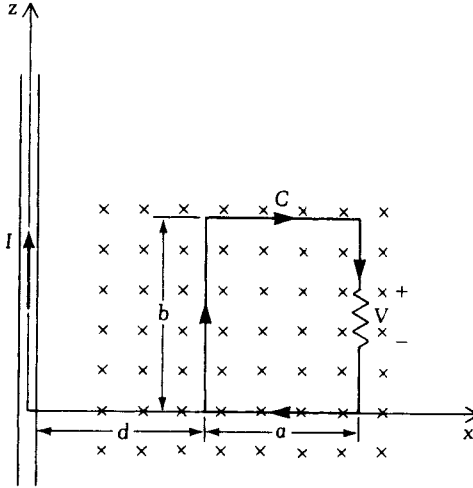
Dalam bab ini, hal pertama yang akan dipelajari adalah hukum Faraday yang diberikan oleh (16.1c). Pada situasi tertentu kita gunakan pembenaran dengan menggunakan orde yang lebih tinggi. Kita akan mempelajari alat-alat tradisional seperti transformer, generator, dan motor dari sudut pandang medan kuasistatik, dan kita juga akan mendiskusikan *rail gun*, pemanasan induksi, evaluasi tidak merusak, dan bidang magnet.

16.1 HUKUM FARADAY

Perhatikan sebuah simpal yang tegak lurus di sekitar kabel dengan panjang tak berhingga yang dialiri arus $I(t)$, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 16.1. Untuk menghitung medan magnet, kita dapat menggunakan pendekatan kuasistatik, yang menghasilkan

$$\mathbf{H} = \hat{\mathbf{y}} \frac{I(t)}{2\pi x} \quad (16.2)$$

Gambar 16.1 Tegangan diinduksikan pada simpal persegi panjang yang tegak lurus dengan medan magnet yang berubah terhadap waktu yang dihasilkan oleh arus yang berubah-ubah terhadap waktu pada suatu konduktor panjang tak berhingga.



Kita kemudian mendapatkan medan listrik E dari hukum Faraday

$$\nabla \times E = -\frac{\partial}{\partial t} B \quad (16.3)$$

Dengan mengintegrasikan kedua ruas (16.3) terhadap luas dari simpal bujursangkar pada Gambar 16.1, kita dapatkan bentuk integral dari (16.3) sebagai berikut:

$$\iint_A (\nabla \times E) \cdot da = - \iint_A da \cdot \frac{\partial}{\partial t} B \quad (16.4)$$

di mana, seperti diperlihatkan pada Gambar 16.1, permukaan normalnya menunjuk ke dalam kertas dengan arah yang sama dengan medan magnet, dan kontur C mengikat luas dari simpal tersebut bergerak searah jarum jam. Berdasarkan teori Stoke, sisi kiri (16.4) disamakan dengan suatu integral kontur terhadap kontur C . Karena simpalnya diam, kita dapat mengeluarkan turunan waktu dari integral. Integral kontur tertutup tersebut didefinisikan sebagai *gaya gerak listrik (GGL)*. Akibatnya, kita dapatkan

$$\boxed{\text{GGL} = \oint_C E \cdot d\ell = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_A B \cdot da = \frac{\partial \Psi}{\partial t}} \quad \begin{array}{l} \text{(GGL induksi pada} \\ \text{simpal tertutup)} \end{array} \quad (16.5)$$

di mana

$$\boxed{\Psi = \iint_A da \cdot B} \quad \begin{array}{l} \text{(Keterkaitan fluks magnet)} \\ \end{array} \quad (16.6)$$

adalah fluks yang mengait simpal tersebut. Integral dari $E \cdot d\ell$ terhadap simpal tertutup tersebut, yaitu GGL-nya, sama dengan jatuh tegangan total dalam simpal, yang diindikasikan oleh V melalui resistor dalam Gambar 16.1. Kita lihat dari (16.5) bahwa hukum Faraday menyatakan bahwa GGL sama dengan laju penurunan keterkaitan fluks magnet yang melalui

simpal. Pada saat medan magnet yang diproduksi oleh kabel dengan panjang tak hingga naik berdasarkan waktu, medan magnet menghasilkan GGL pada simpal terdekat, dan GGL ini cenderung menghasilkan arus yang berlawanan jarum jam sehingga tercipta medan magnet yang berlawanan arah dengan kabel panjang tak hingga. Di sisi lain, ketika medan magnet turun terhadap waktu GGL induksi dalam simpal akan menciptakan arus searah jarum jam sehingga membangkitkan medan magnet untuk mengkompensasi penurunan medan magnet. Dengan kata lain, GGL induksi selalu cenderung mempertahankan keadaannya walupun arah rangkaianannya tidak jelas. Pernyataan ini dikenal sebagai **hukum Lenz**.

Contoh 16.1 *Contoh ini menunjukkan cara menghitung tegangan induksi pada simpal terhadap medan magnet dari sumber lain.*

Hitung tegangan yang melewati resistor seperti yang ditunjukkan pada Gambar 16.1. Asumsikan $I = I_0 t/T$

Solusi Dengan menggunakan (16.5) dan (16.6), kita hitung keterkaitan fluks total yang melalui simpal.

$$\begin{aligned}\Psi &= \int_0^b dz \int_d^{d+a} dx \frac{\mu I}{2\pi x} \\ \Psi &= \frac{\mu I_0 t}{2\pi T} b \ln \left(\frac{d+a}{d} \right)\end{aligned}\quad (16.7)$$

Sesuai dengan (16.5) diperoleh

$$V = -\frac{\mu I_0 t}{2\pi T} b \ln \left(\frac{d+a}{d} \right)$$

Polaritas tegangan ini berlawanan dengan yang ditunjukkan Gambar 16.1

Contoh 16.2 *Contoh ini menunjukkan bahwa induksi Faraday akan bekerja terlepas apakah medan merupakan fungsi sinus waktu atau fungsi lainnya.*

Jika arus yang ditunjukkan Gambar 16.1 adalah harmonik dengan amplitudo I dan frekuensi ω , berapakah V ?

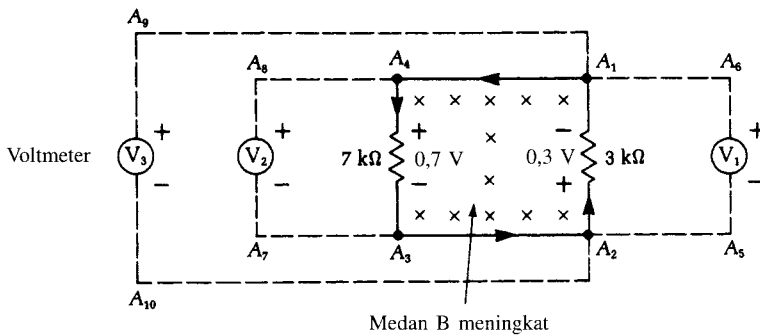
Solusi Berdasarkan (16.5) dan (16.7) diperoleh

$$V = -j\omega \frac{\mu I}{2\pi} b \ln \left(\frac{d+a}{d} \right)$$

Contoh 16.3 *Satu konsekuensi penting dari induksi faraday ditunjukkan dalam contoh ini. Terlihat bahwa penempatan ujung kabel dari voltmeter mempengaruhi pembacaan voltmeter tersebut bahkan pada saat ujung kabel tersebut dihubungkan dengan titik yang sama di dalam rangkaian.*

Seperti yang ditunjukkan pada Gambar 16.2, simpal terdiri dari dua resistor seri yang dikait fluks magnetik yang meningkat rata-rata 1 weber/detik. Fluks berarah ke dalam kertas dan dibatasi daerah $A_1 A_2 A_3 A_4$. Tentukan pembacaan voltmeter V_1, V_2 , dan V_3 , yang diperlihatkan pada gambar. Impedansi masukan dari voltmeter diasumsikan tak hingga.

Gambar 16.2 Suatu Rangkaian di dalam medan magnet yang berubah-ubah terhadap waktu V_1 , V_2 , dan V_3 adalah voltmeter yang dibaca.



Solusi

GGL induksi dalam simpal sama dengan 1 V, dan arus induksi yang mengalir pada simpal $A_1A_2A_3A_4$ adalah 0,1 mA berlawanan arah dengan jarum jam. Asumsikan bahwa fluks magnetik yang dibangkitkan oleh arus induksi dapat diabaikan dibandingkan dengan fluks eksternalnya. Untuk simpal $A_1A_6A_5A_2$, diperoleh $\Psi = 0$ dan $d\Psi/dt = 0$. Oleh karena itu GGL = 0 dan jumlah semua jatuh tegangan = 0, sehingga

$$+0,3 + V_1 = 0$$

yang menghasilkan

$$V_1 = -0,3 \text{ volt}$$

Untuk mencari V_1 digunakan juga simpal $A_6A_5A_2A_3A_4A_1$; Simpall itu memiliki GGL = $-d\Psi/dt = -1$ Volt. Jumlah tegangan sama dengan GGL dan searah jarum jam. Didapatkan

$$-1 = V_1 - 0,7$$

yang juga menghasilkan $V_1 = -0,3$ Volt. Untuk simpal $A_4A_3A_7A_8$, GGL-nya = 0, maka diperoleh

$$-V_2 + 0,7 = 0$$

sehingga

$$V_2 = 0,7 \text{ volt}$$

Sekali lagi, gunakan simpal lain seperti $A_7A_8A_6A_5$ untuk mencari V_2 . Karena simpal ini terhubung dengan GGL = -1 volt, diperoleh

$$-1 = V_1 - V_2$$

sehingga

$$V_2 = 0,7 \text{ Volt}$$

Dengan mudah dapat diperoleh hasil yang sama dengan meninjau simpal $A_7A_8A_1A_2$. Fluks magnetik mengait melalui simpal $A_1A_2A_{10}A_9$, dan GGL = $-d\Psi/dt = -1$ volt. Kita dapatkan

$$-1 = -0,3 - V_3$$

sehingga

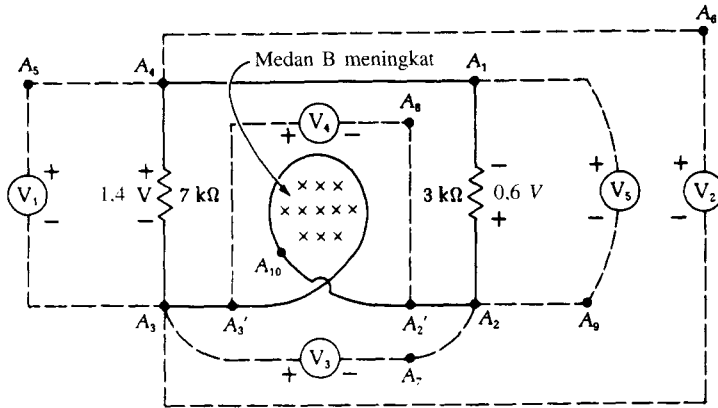
$$V_3 = 0,7 \text{ volt}$$

Perhatikan bahwa, meskipun V_1 dan V_3 terhubung ke simpul yang sama A_1 dan A_2 salah satu pembacaan $-0,3$ volt, dan yang lain $0,7$ volt. Diharapkan, dengan contoh ini, akan kita pahami bahwa dengan kehadiran medan magnet yang berubah terhadap waktu, pengukuran tegangan melalui simpul yang sama pada rangkaian akan bergantung pada bentuk tampilan kabel.

Contoh 16.4 Contoh ini menampilkan situasi yang lebih rumit dibandingkan contoh 16.3. Salah satu ujung kabel memiliki lilitan tambahan dan pembacaan voltmeter kembali berpengaruh terhadap hasil.

Perhatikan rangkaian yang ditunjukkan pada Gambar 16.3. Rangkaian ini berbeda dari rangkaian pada Gambar 16.2 karena adanya lilitan tambahan pada simpal $A_1A_2A_3A_4$. Asumsikan bahwa fluks terkonsentrasi di daerah simpal dalam dan semua kondisi lain tetap sama seperti Gambar 16.2. Tentukan pembacaan voltmeter V_1, V_2, V_3, V_4 dan V_5 . Karena simpal $A_1A_2A_3A_4$ mempunyai 2 lilitan, GGL induksi sepanjang simpal akan sama

Gambar 16.3 Rangkaian dengan dua lilitan dalam medan magnet yang bervariasi terhadap waktu



Solusi

dengan -2 Volt. Arus dalam rangkaian sebesar $0,2$ mA dengan arah yang berlawanan, yaitu sepanjang $A_1A_4A_3A_{10}A_2$. Untuk menentukan pembacaan V_1 , pertama kita periksa bahwa tidak ada keterkaitan fluks pada simpal $A_4A_3A_5$. Oleh karena itu, $GGL = 0$, dan

$$1,4 - V_1 = 0$$

yang menghasilkan

$$V_1 = 1,4 \text{ volt}$$

Sekarang perhatikanlah simpal $A_4A_6A_3A_4$. Perubahan fluks pada simpal tunggal ini menghasilkan $GGL = -1$ volt, yang memberikan

$$-1 = V_2 - 1,4$$

$$V_2 = 0,4 \text{ volt}$$

Untuk mendapatkan V_3 , kita perhatikan simpal $A_7A_3A_4A_1A_2$ dan didapatkan

$$-1 = -V_3 - 1,4 - 0,6$$

$$V_3 = -1 \text{ Volt}$$

Untuk mendapatkan V_4 , kita periksa $A_8A_2A_{10}A_3$. $GGL = -2$ volt, maka diperoleh

$$-2 = V_4$$

Akhirnya untuk V_5 , perhatikan simpal $A_9A_2A_1$ yang tidak memiliki keterkaitan fluks, sehingga

$$0 = V_5 + 0,6$$

$$V_5 = -0,6 \text{ volt}$$

Tegangan Induktor

Pada Subbab 13.3, induktansi diri L didefinisikan sebagai

$$L = \frac{N\Psi}{I}$$

di mana Ψ adalah keterkaitan fluks yang melalui luas penampang melintang pada induktor, N adalah jumlah lilitan induktor, dan I adalah arus yang mengalir di induktor. Gambar 16.4 menunjukkan induktor dengan N lilitan koil. Sekarang jika arus berubah terhadap waktu, maka GGL induksi pada masing-masing lilitan induktor adalah

$$\text{GGL} = \frac{N\Psi}{dt}$$

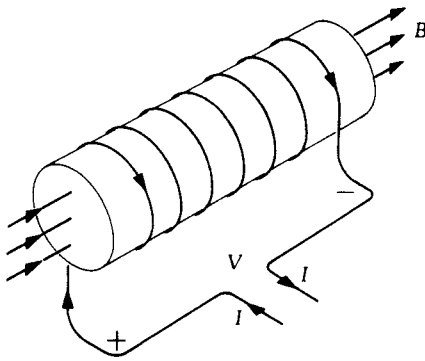
Total GGL induksi dengan N lilitan adalah

$$\text{GGL} = N \frac{d\Psi}{dt} = - \frac{d}{dt}(LI)$$

Jatuh tegangan pada induktor merupakan negatif dari GGL induksi, memberikan

$$V = \frac{d}{dt}(LI) = L \frac{dI}{dt} \quad (16.8)$$

Gambar 16.4 menunjukkan polaritas tegangan V . Perhatikan bahwa V adalah positif sehingga induktor mencoba menahan kenaikan arus. Kenyataan ini juga merupakan akibat dari hukum Lenz.



Gambar 16.4 Tegangan pada sebuah induktor.

GGL Induksi pada Kawat Bergerak

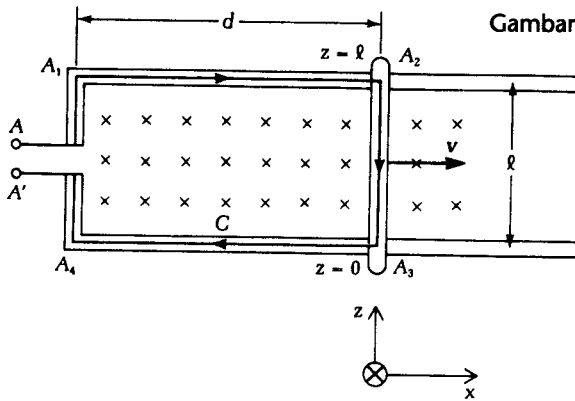
Seperti pada (16.5) dan (16.6) yang memberikan tegangan induksi pada rangkaian diam, GGL juga diinduksikan pada kawat bergerak yang memotong medan magnet.

Perhatikan batang konduktor yang bergerak dengan kecepatan v sepanjang sepasang jalur diam yang terbuat dari konduktor sempurna, seperti yang terlihat pada Gambar 16.5. Medan magnet yang seragam dan stabil $\mathbf{B} = \hat{y} B$ diterapkan. Sebuah muatan positif q pada batang bergerak dipengaruhi oleh gaya Lorentz.

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Muatan itu akan menghasilkan medan listrik E dengan

$$\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (16.9)$$



Gambar 16.5 GGL diinduksikan pada batang yang bergerak A_2A_3 ketika melalui medan magnet

yang menunjuk arah \hat{z} . Medan listrik ini memindahkan muatan positif ke jalur yang lebih tinggi dari muatan negatif di bawahnya. Pengaruhnya adalah tegangan antara ke dua jalur.

Kita misalkan jarak antara jalur adalah ℓ , maka

$$\text{GGL} = \int_0^\ell d\ell \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (\text{tegangan induksi pada kawat bergerak}) \quad 16.10$$

di mana $d\ell = -\hat{z} dz$. Tegangan induksi hasil pergerakan kawat ini adalah bentuk lain dari GGL. Perhatikan bahwa tidak ada medan listrik yang dibangkitkan jika \mathbf{v} sejajar dengan \mathbf{B} . Medan listrik maksimum terjadi ketika \mathbf{v} tegak lurus dengan \mathbf{B} . GGL adalah hasil pergerakan konduktor yang memotong garis-garis medan magnet.

Sekarang kita perhatikan efek gabungan antara medan magnet yang berubah terhadap waktu dan pergerakan konduktor dalam rangkaian. Untuk konfigurasi yang sama seperti yang ditunjukkan oleh Gambar 16.5, asumsikan bahwa penggunaan medan magnet $\mathbf{B}(t)$ berubah terhadap waktu. Dengan menggunakan (16.6), kita integrasikan \mathbf{B} terhadap daerah yang terikat kontur C. Daerah itu meliputi batang konduktor yang bergerak. Hasilnya adalah

$$\begin{aligned} \text{GGL} &= - \iint \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} + \int_0^\ell d\ell \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ &= - \iint \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} - \int_0^\ell \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\ell) \end{aligned} \quad (16.11)$$

di mana GGL berada dalam arah C, seperti pada Gambar 16.5. Perhatikan bahwa baik $d\mathbf{a}$ dan $\mathbf{v} \times d\ell$ menunjuk arah \hat{y} . GGL dalam kontur C tertutup menghasilkan dua persamaan pada ruas kanan (16.11). Persamaan kedua merepresentasikan peningkatan fluks magnetik terhadap peningkatan daerah yang dibangkitkan oleh pergerakan batang konduktor. Jadi, jumlah integral pertama dan kedua pada (16.11) sama dengan total turun waktu fluks magnetik yang mengait daerah A. Artinya,

$$\text{GGL} = - \frac{d}{dt} \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = - \frac{d\Psi}{dt} \quad (\text{tegangan induksi dalam simpal dengan medan B yang berubah terhadap waktu}) \quad (16.12)$$

Bandingkan dengan (16.5) dan ingat bahwa (16.12) menggunakan turunan total d/dt bukan turunan parsial $\partial/\partial t$. Hasil di atas secara umum adalah benar ketika seluruh simpal bergerak dan berubah secara sembarang.

Kesimpulannya, GGL induksi berharga negatif ketika Ψ bertambah dan positif ketika Ψ menurun. Ketika Ψ bertambah dan GGL negatif, dengan menutup terminal AA' akan

menghasilkan arus yang mengalir dalam arah yang berlawanan dengan arah C. Arus ini, menurut hukum Ampere, menghasilkan medan magnet yang melawan peningkatan medan magnet awalnya. Kebalikannya, ketika Ψ menurun dan GGL positif, arus menghasilkan medan magnet dengan arah yang sama dengan medan magnet awalnya. Fakta ini membuktikan hukum Lenz: Rangkaian cenderung menolak segala jenis perubahan dalam status quo.

Contoh 16.5 *Contoh ini memperlihatkan bahwa, jika satu bentuk rangkaian bergerak dalam medan magnet yang berubah terhadap waktu, maka tegangan induksi memiliki dua bagian, salah satunya akibat perubahan fluks magnet dan yang lainnya akibat pergerakan batang.*

Perhatikan batang konduktor yang bergerak pada Gambar 16.5. Asumsikan medan magnet yang seragam dan berubah-ubah terhadap waktu $\mathbf{B}(t) = \hat{\mathbf{y}} B_0 \cos \omega t$. Batang bergerak dengan kecepatan $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{x}} v$. Tentukan GGL induksi.

Solusi Dengan menggunakan (16.11), kita dapatkan

$$\text{GGL} = \omega \sin \omega t \iint B_0 da - \int_0^\ell dz v B_0 \cos \omega t = \ell B_0 (\omega d \sin \omega t - v \cos \omega t)$$

Contoh 16.6 *Contoh ini memperlihatkan aplikasi dari induksi Faraday dalam alat memori magnetik.*

Asumsikan bahwa inti dalam inti memori ditukar dari keadaan A ke keadaan C dalam mikro detik (lihat Gambar 14.9). Hitung tegangan induksi pada kawat sensor. Asumsikan bahwa proses *pertukaran* yang terjadi linear terhadap waktu, dan luas penampang inti besi $3 \times 10^{-7} \text{ m}^2$.

Solusi Fluks total yang melingkupi inti besi tunggal yang dililiti penghantar seperti pada Gambar 14.11, adalah kerapatan fluks remanen dikalikan dengan luas penampang inti besinya. Berdasarkan Gambar 14.9, fluks remanennya sebesar $0,21 \text{ Wb/m}^2$. Sehingga

$$\Psi = 0,21 \times 3 \times 10^{-7} \text{ Wb} = 0,63 \times 10^{-7} \text{ Wb}$$

$$\frac{\Delta \Psi}{\Delta t} = \frac{2 \times 0,63 \times 10^{-7}}{10^{-6}} = 0,13 \text{ V}$$

Faktor 2 pada persamaan di atas didasarkan pada kenyataan bahwa arah dari fluks yang ada berbalik ketika terjadi proses *pertukaran*.

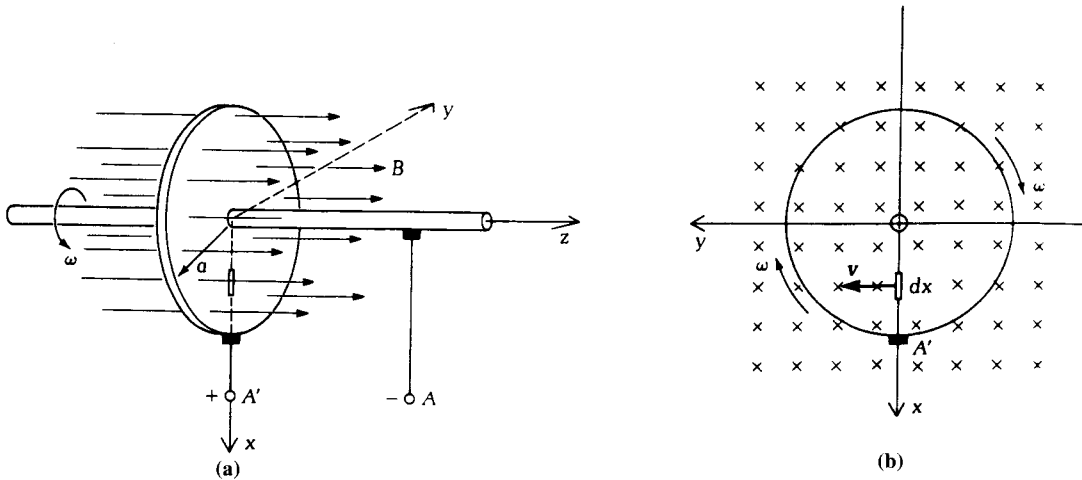
Contoh 16.7 *Suatu tegangan akan diinduksikan pada sebuah penghantar berbentuk cakra yang berotasi di dalam medan magnet, seperti contoh berikut. Perhatikan bahwa tegangan induksi total di sepanjang jalurnya dari tengah sampai ke pinggir diperoleh dengan pengintegrasian.*

Suatu cakram logam berotasi di dalam suatu medan magnet, seperti tampak pada Gambar 16.6. Berapakah beda tegangan antara kedua sikat kontak A dan A'? Jika cakram tersebut dianggap berotasi dengan kecepatan 6.000 r/min , $B = 1,1 \text{ Wb/m}^2$, dan $a = 10 \text{ cm}$.

Solusi Perhatikan ada sepotong konduktor terletak pada x di antara bagian tengah cakram dengan sikat kontak A', seperti pada Gambar 16.6b. Kecepatan konduktor tersebut adalah

$$v = \hat{\mathbf{x}} x \omega$$

Gambar 16.6 (a) Gaya gerak listrik diinduksikan antara bagian pinggir dan tengah suatu cakram logam yang berputar dari suatu medan magnet. A dan A' dihubungkan dengan kedua sikat kontak. (b) Tampak muka suatu cakram dalam arah sumbu \hat{z} .



Gaya gerak listrik di sepanjang potongan itu, berdasarkan (16.9), adalah

$$dE = \mathbf{v} \times \hat{\mathbf{z}} B = \hat{\mathbf{x}} x \omega B \quad (16.13)$$

Oleh karena itu,

$$\text{GGL} = \int_0^a x \omega B \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}} dx = \frac{1}{2} \omega B a^2 \quad (16.14)$$

Dengan mensubstitusikan $\omega = 2\pi \times 6000/60$ rad/s, $B = 1,1$ Wb/m², dan $a = 0,1$ m ke dalam (16.14) diperoleh

$$\text{GGL} = 3,46 \text{ volt} = V_{A'A}$$

Polaritas GGL diindikasikan pada Gambar 16.6a. Cakram logam yang berotasi dalam suatu medan magnet yang tegak lurus dengan sumbunya dikenal dengan **cakra Faraday** (*Faraday Disk*), yang akan kita diskusikan lebih lanjut, bersama-sama dengan **generasi kutub sejenis** (*homopolar generation*).

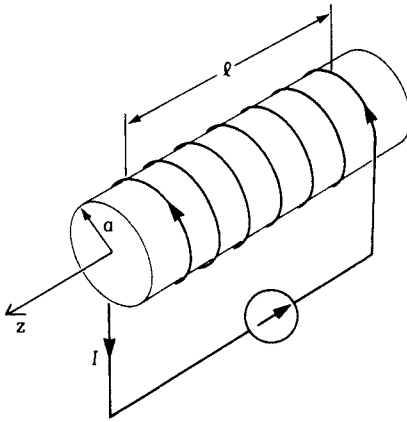
Gaya pada Kumparan

Perhatikan solenoid pada Gambar 16.7. Suatu arus tunak sebesar I ampere yang disediakan oleh sebuah generator arus konstan, mengalir pada koil tersebut. Medan magnet yang ditimbulkan pada solenoid tersebut diberikan oleh (13.10), yang akan diulangi di bawah ini:

$$H_z = \begin{cases} nI & \text{untuk } \rho < a \\ 0 & \text{untuk } \rho > a \end{cases} \quad (13.10)$$

di mana n adalah jumlah lilitan per meter. Seperti diterangkan oleh hukum Lorentz $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, adanya medan magnet dalam arah sumbu $\hat{\mathbf{z}}$ akan menyebabkan suatu gaya gerak listrik $\hat{\rho}$ pada kawat yang dialiri arus listrik dalam arah $\hat{\phi}$. Kita juga dapat memperoleh gaya gerak listrik bertambah secara radial pada kawat ini dengan pertimbangan energi seperti berikut ini.

Contoh 13.7 mendapatkan energi tersimpan pada suatu solenoid. Anggap panjang solenoid itu ℓ meter; maka:



Gambar 16.7 Sebuah sistem yang terdiri dari solenoid dan generator arus konstan.

$$U_H = \frac{1}{2} \mu n^2 I^2 (\pi a^2) \ell \text{ joule}$$

atau

$$U_H = \frac{1}{2} L I^2 \quad (16.16)$$

Persamaan terakhir diperoleh dari (13.46). Kita akan selidiki apa yang terjadi pada saat radius solenoid tersebut bertambah dari a menjadi $a + \Delta a$. Rumus (16.15) menunjukkan bahwa tidak ada perubahan kuat medan magnet, karena arus yang disuplai bersumber dari generator arus konstan. Namun demikian, luas penampangnya bertambah; dan karenanya, induktansi dan energi magnetik tersimpan juga bertambah:

$$L' = \frac{L(a + \Delta a)^2}{a^2} \quad (16.17a)$$

$$U'_H = \frac{1}{2} (L') I^2 = \frac{U_H (a + \Delta a)^2}{a^2} \quad (16.17b)$$

Jumlah pertambahan energi magnetik tersimpan adalah

$$\Delta U_H = \frac{1}{2} (L' - L) I^2 \quad (16.18)$$

Perubahan induktansi ini mengakibatkan terinduksinya tegangan pada solenoid

$$V_L = \frac{d}{dt}(LI) = I \frac{dL}{dt} \quad (16.19)$$

karena arus yang mengalir konstan terhadap waktu. Generator arus konstan tersebut harus mengatasi adanya tegangan yang melawan ini dan, dengan memperhatikan (16.19), kerja total yang harus disuplai oleh generator tersebut adalah

$$\Delta W = V_L I \Delta t = (L' - L) I^2 \quad (16.20)$$

Jumlah ini menunjukkan berkurangnya energi tersimpan pada generator. Jadi, perubahan energi total pada generator dan induktor tersebut adalah

$$\Delta U_S = -\Delta W + \Delta U_H = -\frac{1}{2} (L' - L) I^2 \quad (16.21)$$

yang akan berkurang seiring dengan pertambahan luas penampang solenoid. Karena semua sistem fisik cenderung berada dalam keadaan energi yang lebih rendah, kita memperkirakan

adanya koil yang menyebabkan timbulnya medan magnet ini akan mengalami gaya ekspansi. Persamaan berikut menentukan magnitudo gaya ini:

$$F = \frac{\Delta U_S}{\Delta a} \quad (16.22)$$

Dari (16.21) dan (16.17), kita dapatkan:

$$-\Delta U_S = \frac{1}{2}(L' - L)I^2 = \frac{1}{2}LI^2 \frac{2a\Delta a + (\Delta a)^2}{a^2}$$

Oleh karena itu, gaya yang ada pada koil adalah, dalam limit $\Delta a \rightarrow 0$,

$$F = \frac{1}{2}LI^2 \frac{2a + \Delta a}{a^2} = \frac{1}{a}LI^2 \quad (16.23)$$

Hasil ini merupakan gaya ekspansi yang bekerja pada koil solenoid. Induktansi solenoid pada Gambar 16.7 diberikan pada contoh 13.7:

$$L = \mu n^2 \pi a^2 \ell$$

Oleh karena itu,

$$\frac{dL}{da} = \mu n^2 \pi 2a\ell = \frac{2L}{a}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan di atas dalam (16.23), kita dapatkan:

$$F = \frac{1}{2} \frac{d}{da}(LI^2) = \frac{I^2}{2} \frac{dL}{da} \quad (16.24)$$

Dari hasil tersebut dapat kita ketahui, bahwa gaya ekspansi yang ada sebanding dengan turunan dari energi magnetik tersimpan terhadap dimensi fisik dari sistem yang menyimpan energi tersebut.

Rail Gun

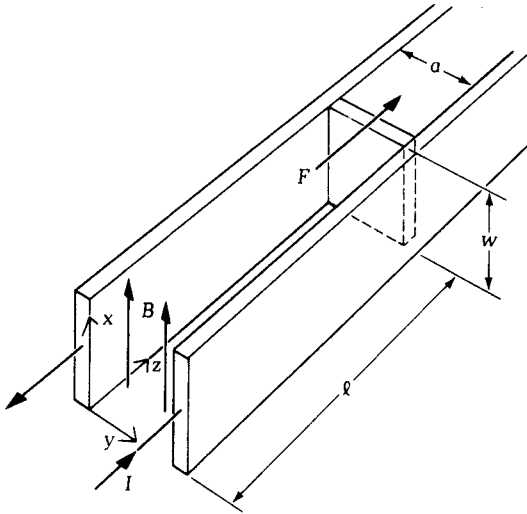
Pada pembahasan sebelumnya, kita mengetahui bahwa koil pada suatu solenoid akan mengalami gaya ekspansi. Secara umum, konduktor dari semua rangkaian yang terdapat dalam suatu medan magnet akan mengalami gaya yang cenderung meluas pada rangkaian tersebut. Fenomena ini mirip dengan apa yang terjadi dengan pipa atau bak penampung air yang mengalami gaya tekanan.

Perhatikan sepasang rel yang terdiri dari dua buah keping besi sejajar, seperti pada Gambar 16.8. Arus listrik I mengalir melalui rel tersebut, melewati sebuah keping pada ujungnya yang menciptakan hubungan pendek pada rel tersebut. Rangkaian ini mirip dengan suatu simpal dalam sebuah solenoid, dan kita perkirakan rel tersebut akan mengalami gaya magnetik seperti halnya keping ujung, yang cenderung memuaikan rangkaian. Berikut ini kita akan menentukan gaya yang bekerja pada keping ujung.

Langkah pertama yaitu menentukan induktansi rel tersebut dengan ujung hubungan pendek. Misalkan rel-rel tersebut saling berdekatan, sehingga medan magnet di antara kedua kepingnya mendekati nilai yang diberikan oleh (13.9). Perhatikan bahwa konfigurasi yang ditunjukkan pada Gambar 16.8 sama dengan yang ada pada Gambar 13.5. Oleh karena itu, kita dapatkan:

$$H_x = \frac{I}{w} \quad (16.25)$$

Gambar 16.8 Sebuah *rail gun*. Arus mengalir pada rel yang berseberangan dengan keping ujung, yang berfungsi sebagai proyektil. Arahnya menunjuk \hat{z} , akibat adanya gaya magnet.



Fluks total yang melalui suatu luasan yang dilingkupi oleh simpal tersebut dinyatakan sebagai berikut:

$$\Psi = \frac{\mu \ell a I}{w} \quad (16.26)$$

Kita dapatkan induktansi L dari definisi yang diberikan pada Subbab 13.3:

$$L = \frac{\Psi}{I} = \mu \frac{\ell a}{w} \quad (16.27)$$

Dengan memperhatikan (16.24) dan mengingat bahwa ℓ sekarang adalah dimensi fisik yang berubah, kita dapatkan:

$$F = \frac{I^2}{2} \frac{dL}{d\ell} = \frac{\mu a I^2}{2w} \quad (16.28)$$

Persamaan (16.28) menunjukkan magnitudo gaya yang bekerja pada keping yang terhubung pendek, seperti ditunjukkan pada Gambar 16.8. Jika arus listrik yang cukup besar mengalir melalui rel tersebut, maka bagian belakang dari keping ini akan mengalami percepatan yang cukup besar. Inilah prinsip kerja dari sebuah *rail gun*.

Senjata-senjata konvensional memanfaatkan energi yang terkandung dalam bahan peledak untuk mempercepat proyektil. Senjata jenis ini berisik dan menimbulkan asap. Pada kenyataannya, kecepatan suara yang ditimbulkan oleh gas yang meledak itu membatasi kecepatan proyektil 1 sampai 2 km/s. Di lain pihak, *rail gun* dapat mempercepat gerak proyektil minimal dua kali kecepatan senjata konvensional, dan lebih pelan suaranya. Secara teori, kecepatan proyektil hanya dikalahkan oleh kecepatan cahaya. Sebuah rail gun dengan panjang 5 m telah dibuat untuk mempercepat sebuah proyektil 2 gr sampai dengan kecepatan 11 km/s.* Rail gun hanya merupakan salah satu aplikasi dari elektromagnetik. Contoh aplikasi lainnya antara lain: (1) pelet bahan bakar, yang dipercepat sampai 150 km/jam

* H. Kolm dan P. Mongeau, "An alternative launching medium," *IEEE Spectrum*, Jilid. 19 No. 4, April 1982, hal. 30-36.

untuk memicu reaksi fusi termo nuklir. (2) meriam elektromagnetik, dan (3) kendaraan luar angkasa atau pesawat terbang. Pelontar elektromagnetik dibuat beberapa waktu lalu dengan tujuan* untuk menempatkan satelit langsung di orbit bumi. Panjang laras sekitar 500 m dan kecepatan yang bisa dihasilkan sekitar 5,5 km/s. Alat semacam ini dapat menempatkan satelit seberat 1264 kg ke orbit berjarak sekitar 500 km.

Contoh 16.8 *Contoh ini menerangkan tingkat magnitudo dari beberapa macam parameter dalam suatu rail gun. Perhatikan bahwa dibutuhkan arus yang cukup besar pada sebuah rail gun.*

Anggap rail gun yang ditunjukkan pada Gambar 16.8 mempunyai data-data sebagai berikut: $a = 0,1 \text{ m}$, $w = 0,3 \text{ m}$, $I = 300 \text{ kA}$. Berapakah besarnya gaya yang bekerja pada proyektil (bagian keping ujung)? Berat proyektil 3 gr. Nyatakan gaya tersebut dalam gee (gaya gravitasi bumi pada proyektil). Jika proyektil tersebut mengalami gaya di sepanjang laras senapan dengan panjang 3 m, berapakah kecepatan proyektil tersebut setelah keluar dari ujung larasnya?

Solusi Kita gunakan (16.28) dan kita dapatkan

$$\begin{aligned} F &= 1,9 \times 10^4 \text{ N} \\ mg &= 3 \times 10^{-3} \times 9,8 \text{ N} \\ \frac{F}{mg} &= 0,64 \times 10^6 \text{ gee} \end{aligned}$$

Untuk mencari kecepatan keluarnya, kita perlu menyelesaikan:

$$F = \frac{d(mv)}{dt} = m \frac{d^2z}{dt^2}$$

yang menghasilkan

$$t = \sqrt{\frac{2mz}{F}} = \sqrt{\frac{2 \times 3 \times 3 \times 10^{-3}}{1,9 \times 10^4}} = 0,97 \text{ ms}$$

dan

$$v = \frac{F}{m}t = 6,2 \text{ km/s}$$

Ingat bahwa gaya magnetik tersebut juga dialami oleh laras senapan, yang cenderung untuk saling mendorong satu sama lain. Jadi, mereka perlu dikendalikan sehingga bagian yang bergerak hanyalah proyektilnya yang merupakan keping ujung senapan itu. Lebih jauh lagi, karena diperlukan arus yang cukup besar pada suatu pelontar elektromagnetik, maka "keping ujung"-nya berupa sejenis plasma, karena konduktor jenis biasa pada umumnya mudah mencair. Proyektil yang sesungguhnya ditempatkan di atas kolom plasma itu, yang kemudian akan mengalami percepatan. Sumber arus listrik yang besar untuk *rail gun* ini berasal dari suatu generator homopolar, yang akan didiskusikan lebih lanjut pada bagian berikutnya.

* J. L. Brown dkk., "Earth-to-orbit railgun launcher," *IEEE Trans. on Magnetics*, Jilid. 29, Januari 1993, hal 373.

Pemanasan Induksi

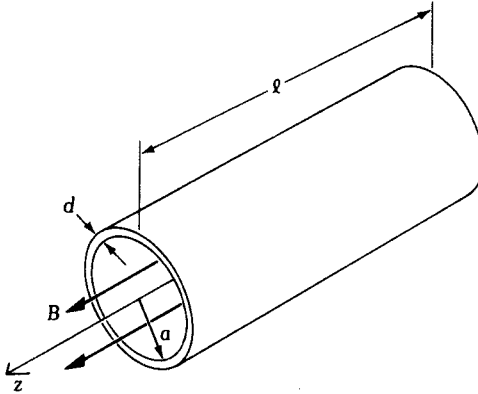
Perhatikan sebuah kulit melingkar dengan panjang ℓ , jari-jari a , dan konduktivitas σ yang ditempatkan pada suatu medan magnet yang besarnya senantiasa berubah terhadap waktu sepanjang sumbu \hat{z} , seperti terlihat pada Gambar 16.9. Medan magnet akibat sumber eksternal tersebut ialah:

$$\mathbf{H}^e = \hat{z} H_0 e^{j\omega t} \quad (16.29)$$

Dengan menerapkan hukum Faraday, kita dapatkan

$$E_\phi 2\pi a = -j\omega\mu_0 H_0 \pi a^2 \quad (16.30)$$

Gambar 16.9 Suatu kulit silinder tipis ditempatkan pada suatu medan magnet bolak-balik. Arus Eddy diinduksikan.



Kerapatan arus yang terdapat pada kulit tabung itu adalah

$$\mathbf{J}_\phi = \sigma \mathbf{E}_\phi = -j \frac{\omega \mu_0 \sigma a}{2} H_0 \quad (16.31)$$

Ingat bahwa arus ini akan mendekati tak terhingga apabila silinder tersebut terbuat dari bahan konduktor sempurna. Sebagai hasilnya, jika anggapan yang kita buat sebelumnya benar, daya yang terdisipasi pada kulit tersebut akan cukup besar karena rugi ohmik yang terjadi sebanding dengan $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$. Tetapi kita ketahui bahwa disipasi daya yang terjadi pada bahan konduktor sempurna tersebut mendekati harga nol. Oleh karena itu, kita simpulkan bahwa (16.31) tidak memberikan hasil berupa arus total yang mengalir pada kulit silinder yang ditempatkan pada suatu medan magnet bolak-balik.

Untuk mendapatkan jawaban yang benar, kita perhatikan bahwa \mathbf{J}_ϕ juga menyebabkan medan magnet dengan arah yang berlawanan, karenanya kita perlu memperhitungkannya.* Kemudian, berdasarkan hasil yang telah didapat di atas, kita perlu meninjau dari medan magnet orde pertama tersebut, yang ditimbulkan oleh \mathbf{J}_ϕ orde pertama seperti yang diberikan oleh (16.31).

Arus dengan arah sumbu $\hat{\phi}$ pada kulit silinder tersebut menyerupai arus yang ada pada solenoid pada Gambar 13.6. Bahkan, arus pada solenoid itu dinyatakan dengan nI ampere per meter yang ekuivalen dengan arus yang mengalir pada kulit silinder yang dinyatakan dengan $\mathbf{J}_\phi d$ ampere per meter. Medan magnet dalam sebuah solenoid diberikan oleh (13.10). Dalam hal ini, kita menyederhanakan permasalahan dengan mensubstitusikan $\mathbf{J}_\phi d$ pada nI

* H.A. Haus dan J.R. Melcher, *Electromagnetic Fields and Energy*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1989, hal. 481.

sehingga didapatkan medan magnet induksi sebagai berikut:

$$H_z^{(i)} = J_\phi d = \sigma E_\phi d$$

di mana superskrip (i) menyatakan medan H yang diinduksikan. Medan magnet total ialah jumlah keseluruhan medan magnet yang diterapkan dari luar, dan $H_z^{(i)}$:

$$\mathbf{H} = \hat{z} (H_0 + \sigma E_\phi d) \quad (16.32)$$

Dengan menggunakan (16.32), kita dapatkan berdasarkan hukum Faraday:

$$E_\phi 2\pi a = -j\omega\mu_0(H_0 + \sigma E_\phi d)\pi a^2$$

Dengan menyelesaikan E_ϕ didapatkan

$$E_\phi = \frac{-j\frac{\omega a}{2}\mu_0 H_0}{1 + j\frac{\omega\mu_0 \sigma a d}{2}}$$

Arus konduksi pada kulitnya adalah

$$J_\phi = \frac{-j\sigma\omega a\mu_0 H_0/2}{1 + j\omega\mu_0 \sigma a d/2} = \frac{-jH_0 a/\delta^2}{1 + j a d/\delta^2} \quad (16.33)$$

di mana

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}}$$

adalah ketebalan kulit. Daya disipasi total pada kulit tersebut adalah:

$$\begin{aligned} \langle P_d \rangle &= \frac{1}{2} \text{Re} \int dV J_\phi^* E_\phi = \frac{1}{2} (2\pi a \ell d) \sigma |E_\phi|^2 \\ &= (\pi a \ell d \sigma) \frac{(\omega a \mu_0 H_0/2)^2}{1 + (\omega \mu_0 \sigma a d/2)^2} \end{aligned} \quad (16.34)$$

Kita lihat bahwa $\langle P_d \rangle$ sama dengan nol, jika kulit tersebut terbuat dari isolator sempurna (di mana nilai $\sigma = 0$) atau terbuat dari suatu konduktor sempurna (di mana $\sigma = \infty$). Hasil ini sesuai dengan apa yang kita harapkan. Arus induksi yang benar diberikan oleh (16.33). Arus dengan arah $\hat{\phi}$ ini berputar dalam suatu medan magnet, yang biasa dikenal dengan arus Eddy. Dengan menempatkan sebuah konduktor dalam suatu medan magnet yang cukup kuat dan berubah terhadap waktu, **arus eddy** tersebut menyebabkan terjadinya rugi ohmik pada konduktor, dan daya yang terdisipasi cukup besar untuk membuatnya meleleh. Penggunaan induksi magnetik untuk pemanasan ataupun pelelehan logam biasa disebut pemanasan induksi. Logam-logam yang biasa digunakan pada suatu industri biasanya menggunakan tungku induksi karena logam-logam tersebut dapat menghasilkan suhu yang lebih tinggi (sampai 2800°C) dibandingkan dengan tungku biasa dengan bahan bakar batu-bara atau minyak.

Contoh 16.9 *Contoh ini memberikan suatu perkiraan mengenai waktu yang dibutuhkan untuk melelehkan sebuah pipa besi dengan memanfaatkan induksi panas.*

Sebuah silinder aluminium diletakkan dalam sebuah medan magnet $B = 1 \text{ Wb/m}^2$ dengan frekuensi 60 Hz. Gunakan data-data berikut ini untuk menentukan berapa lama waktu yang diperlukan untuk melelehkan silinder aluminium tersebut, dengan kondisi suhu kamar (20°C).

Untuk aluminium:

$$\ell = 10 \text{ cm}$$

$$a = 0,8 \text{ cm}$$

$$d = 0,1 \text{ cm}$$

$$\sigma = 3,54 \times 10^7 \text{ mho/m}$$

$$\text{kalor jenis} = 0,214 \text{ cal/g}^\circ\text{C}$$

$$\text{massa jenis} = 2,7 \text{ g/cm}^3$$

$$\text{titik leleh} = 660^\circ\text{C}$$

$$1 \text{ kalori} = 4,18 \text{ J}$$

Solusi

Volume silinder tersebut adalah: $\pi[(a + d)^2 - a^2]\ell = 5,34 \text{ cm}^3$. Massanya adalah:

$$m = 2,7 \times 5,34 = 14,4 \text{ g}$$

Untuk menaikkan suhu silinder ini dari 20°C ke 660°C dibutuhkan energi U , di mana:

$$U = 14,4 \times (660 - 20) \times 0,214 \times 4,18 = 8,26 \text{ J}$$

Berdasarkan (16.34), dapat kita hitung daya disipasi total sebesar:

$$\langle P_d \rangle = 202 \text{ W}$$

Jadi, diperlukan waktu 41 detik untuk melelehkan kulit aluminium silinder tersebut.

Pengujian Tak Merusak dari suatu Pipa

Salah satu metode untuk memeriksa suatu pipa logam akan kemungkinan ada atau tidaknya suatu kerusakan adalah dengan metode yang biasa disebut metode arus-Eddy. Gambar 16.10 menunjukkan skema diagram dari sistem tersebut. Pipa yang akan diuji, dililiti dengan suatu koil, yang menimbulkan arus Eddy di dalam pipa. Impedansi masukan dari koil tersebut terdiri dari dua bagian. Bagian imajiner menunjukkan induktansi dari kumparannya. Sedangkan bagian nyata menunjukkan rugi daya pada pipa tersebut akibat adanya arus Eddy. Jika pipa itu mempunyai kerusakan dengan arah longitudinal (memanjang), seperti pada Gambar 16.10b, kerusakan itu akan menghambat arus Eddy dan rugi induksi yang terjadi pada bagian pipa itu akan berkurang cukup banyak. Jadi, dengan memonitor bagian nyata dari impedansi masukan koil, kita dapat mendeteksi kerusakan memanjang dalam pipa itu. Karena metode pengujian ini tidak merusak pipanya, maka disebut metode pengujian tak merusak (*method of nondestructive evaluation*) atau NDE.

Ingat bahwa skema yang ditunjukkan pada Gambar 16.10a tidak dapat mendeteksi kerusakan melingkar seperti yang ditunjukkan pada Gambar 16.10c. Penyusunan ini juga akan didapatkan untuk mendeteksi beberapa kerusakan hingga di kedalaman pipa.

Berdasarkan hal di atas, kita akan mencari nilai perkiraan dari impedansi koil yang digunakan untuk NDE. Misalkan impedansi Z adalah

$$Z = R + j\omega L$$

Induktansi L pada solenoid diberikan pada (13.46):

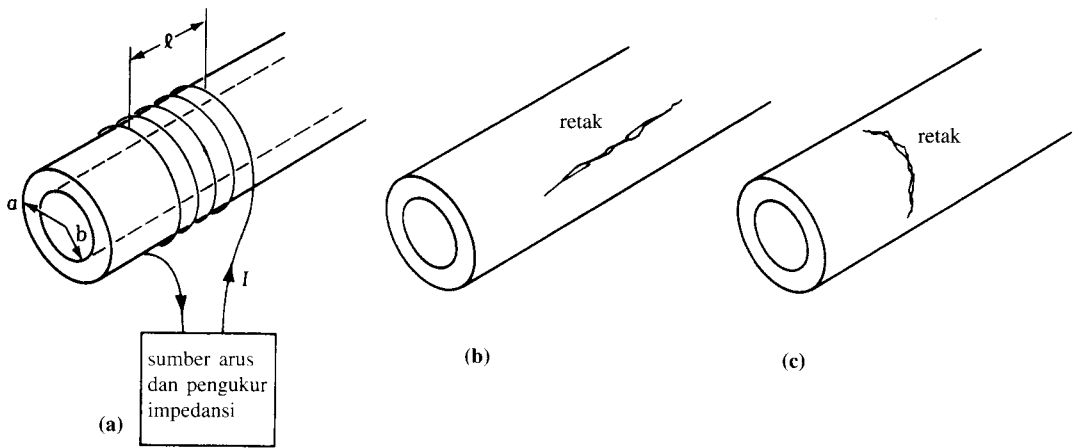
$$L = \mu_0 n^2 \pi a^2 \ell \text{ henry}$$

di mana n adalah banyaknya lilitan per meter pada solenoid, a adalah radius solenoid dan ℓ adalah panjangnya.

Tahanan R dihubungkan dengan rugi induksi $\langle P_d \rangle_{\text{total}}$ di dalam pipa.

$$\langle P_d \rangle_{\text{total}} = \frac{1}{2} \text{Re} \{ \mathbf{VI}^* \} = \frac{1}{2} \text{Re} \{ \mathbf{ZI} \mathbf{I}^* \} = \frac{1}{2} \mathbf{R} | \mathbf{I} |^2$$

Gambar 16.10 Pengujian Tak Merusak: memeriksa ada atau tidaknya kerusakan pada suatu pipa. (a) Sistem pengujian. (b) Kerusakan yang memanjang (*longitudinal*). Hal ini menghambat arus eddy, sehingga menyebabkan pembacaan yang tidak normal pada meteran impedansi. (c) Kerusakan yang melingkar (*Circumferential*). Skema pada (a) tidak dapat mendeteksi kerusakan ini.



Oleh karena itu, kita mendapatkan:

$$R = \frac{2\langle P_d \rangle_{\text{total}}}{|I|^2} \quad (16.35)$$

Dengan anggapan bahwa jari-jari pipa jauh lebih besar dibandingkan dengan kedalaman kulit dan bahwa ketebalan pipa hampir sama dengan ketebalan kulit—yaitu, $\delta \approx d = a - b \ll a$ —kita dapat menggunakan (16.34) dan mengabaikan I dengan mengganti d dengan δ di dalam penyebut untuk mendapatkan

$$\langle P_d \rangle \approx (\pi a l d \sigma) \left(\frac{\omega \mu_0 H_0}{2} \right)^2 \frac{\delta^2}{a^2} = \frac{\pi a l d}{\sigma \delta^2} H_0^2$$

Karena $H_0 = nI$, kita mendapatkan dari (16.35)

$$R = \frac{2\pi a l d}{\sigma \delta^2} n^2 = n^2 \pi \omega \mu_0 a l d$$

Impedansi masukan dengan demikian akan menjadi

$$Z = R + j\omega L = \omega L \left(\frac{d}{a} + j \right)$$

Kita melihat bahwa bagian nyata impedansi lebih kecil dibandingkan bagian imajiner. Pada kenyataannya, di dalam NDE yang menggunakan metode arus eddy untuk mendeteksi keretakan longitudinal di dalam pipa, kita ditantang untuk membuat rancangan detektor yang dapat menentukan secara akurat bagian nyata dari impedansi masukan, di mana sifat induktif lebih menonjol.

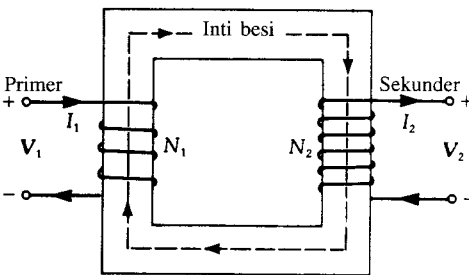
Ingat bahwa pada kasus di mana radius pipa tidak lebih kecil dari kedalaman kulit, penyelesaian untuk $\langle P_d \rangle_{\text{total}}$ benar-benar rumit. Pembaca yang tertarik dapat merujuk pada Popovic untuk memperoleh pendekatan yang lebih mendalam terhadap masalah tersebut.*

* B. D. Popovic, *Introductory Engineering Electromagnetics*, Reading, Mass: Addison-Wesley, 1971, hal. 507

16.2 TRANSFORMATOR, GENERATOR, DAN MOTOR

Transformator adalah sebuah peralatan dengan dua rangkaian yang dihubungkan oleh fluks magnet dengan tujuan merubah tegangan atau impedansi rangkaian. Kedua bagian rangkaian tersebut dikopel melalui dua buah lilitan yaitu lilitan primer dan lilitan sekunder dengan inti bahan ferromagnetik. Gambar 16.11 memperlihatkan skema diagram dari transformator dengan lilitannya. Salah satu alasan untuk menggunakan inti dari bahan ferromagnetik adalah karena bahan ferromagnetik mempunyai permeabilitas yang tinggi, sehingga hampir seluruh fluks magnetik akan mengalir pada inti hanya dengan sedikit kebocoran. Jadi, fluks yang mengalir pada koil primer juga mengalir pada koil sekunder. Hubungan/kopling antara transformator dengan rangkaian yang terdekat menjadi minimal.

Gambar 16.11 Sebuah transformator. Perhatikan polaritas V dan arah arus



Misalkan panjang efektif dari inti adalah ℓ , dan luas penampangnya adalah A . Dengan menggunakan teknik analisis rangkaian magnetik yang dibicarakan pada Subbab 14.2, kita mendapatkan persamaan berikut untuk transformator pada Gambar 16.11

$$N_1 I_1 - N_2 I_2 = H \ell$$

(persamaan untuk transformator
pada Gambar 16.11)

(16.36)

Kita mendapatkan persamaan di atas langsung dari (14.17). Bagaimanapun juga, kita harus hati-hati untuk meletakkan tanda yang benar dari arus terhadap cara pembelitan kawat. Karena $\Psi = BA = \mu H A$, (16.36) dapat ditulis sebagai berikut:

$$N_1 I_1 - N_2 I_2 = \frac{\Psi \ell}{\mu A} \quad (16.37)$$

Untuk transformator ideal, μ tidak berhingga, akibatnya, kita akan mendapatkan hubungan berikut:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1}$$

(perbandingan arus untuk transformator ideal)

(16.38)

Dengan bahan ferromagnetik sebagai inti, transformator biasa akan mempunyai μ yang tinggi sehingga (16.38) selalu merupakan pendekatan yang baik.

Dari hukum Faraday, kita mempunyai

$$V_1 = N_1 \frac{d\Psi}{dt}$$

$$V_2 = N_2 \frac{d\Psi}{dt}$$

Akibatnya,

$$\boxed{\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2}} \quad (\text{perbandingan tegangan untuk transformator ideal}) \quad (16.39)$$

Persamaan (16.38) dan (16.39) berlaku untuk tegangan dan arus yang salah satunya harmonik terhadap waktu atau variasi waktu jenis lainnya. Untuk tegangan dan arus harmonik-waktu, kita dapat menghubungkan impedansi pada bagian primer dengan bagian sekunder.

Karena $Z_1 \equiv V_1/I_1$ dan $Z_2 \equiv V_2/I_2$, kita mendapatkan persamaan berikut dari (16.38) dan (16.39):

$$\boxed{\frac{Z_1}{Z_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2} \quad (\text{perbandingan impedansi untuk transformator ideal}) \quad (16.40)$$

Sebuah transformator ideal tidak akan mendisipasi daya. Kita memperoleh kesimpulan ini dari hasil kali (16.39) dan konjugasinya (16.38). Sehingga,

$$\frac{V_1 I_1^*}{V_2 I_2^*} = 1$$

Oleh karena itu, daya masukan akan sama dengan daya keluaran.

Pada kenyataannya, sebagian daya selalu hilang di dalam transformator. Ada dua komponen utama dari rugi kebocoran pada transformator; rugi arus eddy dan rugi histeresis. Kita sekarang akan membahas rugi-rugi tersebut.

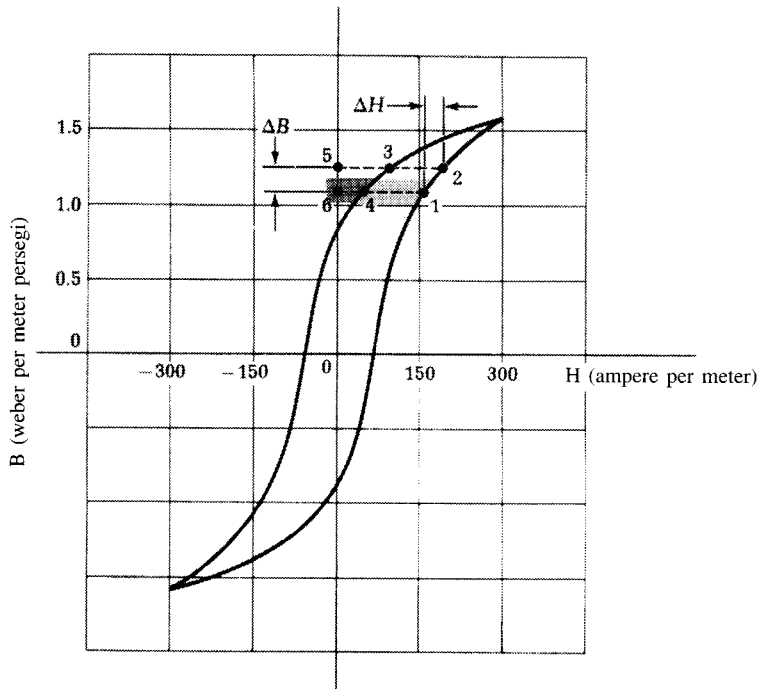
Rugi Arus Eddy pada Transformator

Inti transformator memiliki fluks magnetik yang berubah-ubah menurut waktu. Pada pembahasan sebelumnya, kita sudah mempelajari bahwa fluks magnetik yang berubah-ubah menurut waktu akan menimbulkan rugi arus eddy pada konduktor. Ada dua cara untuk mengurangi rugi arus eddy pada transformator. Pertama, kita dapat menggunakan bahan dengan permeabilitas yang tinggi tetapi mempunyai konduktivitas yang rendah. Ferit adalah salah satu contoh bahannya. Untuk besi tuang, nilai σ mendekati 300 mho/m, tetapi ferit mempunyai nilai $\sigma \cdot 10^{-2}$ mho/m. Kedua, kita dapat mengurangi rugi arus eddy dengan menggunakan inti disusun dari laminasi-laminasi. Atau dengan kata lain, keping-keping baja tipis yang berbentuk bujur sangkar berongga seperti yang ditunjukkan pada Gambar 16.11 ini dilapisi oleh oksida atau isolasi yang dipernis dan kemudian dilekatkan menjadi satu sehingga membentuk inti magnetik. Susunan semacam ini dapat mengurangi rugi arus eddy, di mana arus eddy selalu mengalir tegak lurus terhadap fluks magnet.

Rugi Histeresis

Pada Subbab 14.1 kita telah membahas tentang kurva magnetisasi untuk bahan ferromagnetik. Kurva tersebut disebut simpal histeresis. Gambar 16.12 memperlihatkan kurva sejenis untuk bahan besi. Asumsikan bahwa bahan dengan simpal histeresis seperti ini digunakan sebagai inti transformator. Transformator digunakan pada rangkaian arus bolak-balik. Akibatnya, bahan tersebut akan dilalui simpal histeresis pada jumlah yang sama tiap detiknya sesuai dengan frekuensi dari arus. Untuk menyederhanakan masalah, kita membiarkan koil yang kedua terbuka.

Gambar 16.12 Sebuah simpal histeresis pada bahan ferromagnetik. Daerah yang berada di tengah kurva merupakan energi yang hilang melalui siklus lengkap magnetisasi dan demagnetisasi.



Ambil kondisi pada saat t ketika nilai H adalah H_1 pada titik 1, sebagaimana dinyatakan pada Gambar 16.12. Nilai B yang bersesuaian adalah B_1 . Pada saat Δt detik, arus primer meningkat dari I_1 menjadi $I_1 + \Delta I$. Nilai H akan meningkat sebesar ΔH dan B sebesar ΔB . Dengan kata lain, keadaan dari magnetisasi pada inti akan bergerak dari titik 1 ke titik 2 yang ditunjukkan oleh Gambar 16.12.

Selama periode Δt ini, diinduksikan GGL yang berlawanan arah, dan sesuai dengan hukum Faraday, akan didapatkan

$$\text{GGL} = -\frac{A \Delta B N_1}{\Delta t} \quad (16.41)$$

di mana A adalah luas penampang inti dan N_1 adalah banyaknya lilitan pada koil primer. Kerja yang dilakukan melalui sumber luar berubah melalui status 1 ke status 2 yang diberikan oleh:

$$W = -(\text{GGL}) I_1 \Delta t = A \Delta B N_1 I_1 \quad (16.42)$$

Berdasarkan (16.36) dan kenyataan bahwa $I_2 = 0$ (karena koil sekunder terbuka), akan didapatkan:

$$W = A \Delta B H \ell = (\Delta B N) (\text{volume}) \quad (16.43)$$

Ingat bahwa $\Delta B H$ menyerupai daerah horisontal yang dinyatakan dengan tanda 1-2-5-6.

Akan kita selidiki periode waktu yang lain di mana status magnetisasi berubah dari titik 3 ke titik 4 seperti digambarkan pada simpal histeresis. Kali ini fluks magnetik berkurang

sebesar ΔB , sehingga menghasilkan GGL dengan amplitudo sama dan bernilai terbalik seperti diberikan pada (16.41). Jadi, inti magnet akan memberikan energi balik ke sumber luar. Energi yang dilepaskan sama dengan daerah yang dibatasi oleh 3-5-6-4. Pada keseimbangan, rangkaian luar memberikan lebih banyak energi pada bahan inti daripada yang diterima darinya karena daerah yang dibatasi oleh 1-2-5-6 lebih besar dari daerah yang dibatasi oleh 3-5-6-4. Selisihnya adalah energi yang sesuai dengan daerah 1-2-3-4 pada simpal histeresis. Sehingga, ketika sumber luar menyelesaikan sebuah lingkaran simpal histeresis, energi yang hilang akan sama dengan daerah yang dipisahkan oleh simpal histeresis. Seluruh energi yang hilang per siklus pada bahan inti dapat dihiutng dari daerah pada simpal histeresis dikalikan dengan $A\ell$, volume inti. Kehilangan daya listrik akibat histeresis ini akan diubah menjadi panas. Bahan transformator yang baik adalah bahan yang memiliki permeabilitas yang besar dan simpal histeresis yang sangat 'tipis'.

Contoh 16.10 *Contoh ini menggambarkan bagaimana mendesain sebuah transformator daya.*

Sebuah transformator digunakan untuk menurunkan 2400 V menjadi 240 V pada 60 Hz. Luas penampang dari intinya adalah 250 cm. Kerapatan maksimum fluks pada inti harus sebesar mungkin tetapi tidak boleh lebih besar dari 0.9 Wb/m^2 . Dengan mengabaikan fluks yang berada di pinggir, tentukan banyaknya lilitan pada koil primer dan sekunder!

Solusi

Dengan mengambil N_1 dan N_2 sebagai banyaknya lilitan pada koil primer dan sekunder, maka dari (16.39), kita akan memperoleh.

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{2400}{240} = 10$$

Maka fluks rata-rata Ψ akan menjadi:

$$\Psi \leq 0,9 \text{ (Wb/m}^2\text{)} \times 250 \times 10^{-4} \text{ (m}^2\text{)} = 2,25 \times 10^{-2} \text{ Wb}$$

Berdasarkan hukum Faraday, kita dapatkan

$$V_1 = \left| N_1 \frac{d\Psi}{dt} \right| = |j\omega N_1 \Psi| = \omega N_1 \Psi$$

Dengan mensubstitusikan nilai $V_1 = 2400$, $\omega = 120$ dan nilai Ψ yang telah ditemukan, kita dapatkan

$$N_1 \geq \frac{2400}{120\pi \times 2,25 \times 10^{-2}} = 282,94$$

N_1 dan N_2 keduanya harus bilangan bulat. Untuk memenuhi syarat bahwa Ψ dibatasi sampai 0,9, maka N_1 dianggap bilangan bulat yang terkecil di atas 282,94, sehingga akan menghasilkan N_2 yang juga merupakan bilangan bulat. Dengan demikian, penyelesaiannya adalah

$$N_1 = 290 \text{ lilitan}$$

$$N_2 = 29 \text{ lilitan}$$

$$\Psi = \frac{2400}{120\pi \times 290} = 2,202 \times 10^{-2} \text{ Wb}$$

$$B = \frac{\Psi}{A} = 0,88 \text{ Wb/m}^2$$

Contoh 16.11 *Contoh ini menunjukkan bagaimana memperkirakan rugi hysteresis transformator.*

Sebuah transformator digunakan pada jaringan 60 Hz. Bahan dari inti adalah besi dengan simpal hysteresis yang ditunjukkan Gambar 16.12. Tentukan rugi hysteresis dalam watt, Asumsikan volume inti adalah $0,03 \text{ m}^3$.

Solusi

Karena tidak ada ekspresi analitis dari kurva histeresis yang diberikan, kita dapat memperkirakan luas dari simpal hysteresis tersebut dengan menghitung luas yang dibatasi oleh simpal. Kita menentukan bahwa daerah yang terpisah oleh kurva paling atas (pada titik 3 dan titik 4) dan garis $B = 0$ diperkirakan 6 kotak dan daerah yang terpisah oleh kurva yang paling bawah (pada titik 2 dan titik 1) diperkirakan 3,3 kotak. Jadi, luas total seluruh simpal adalah

$$A_s = 2 \times (6,0 - 3,3) = 5,4 \text{ kotak}$$

Masing-masing kotak mempunyai sebuah “area” yang sama dengan 75 wb-A/m^3 , atau 75 J/m^3 . Jadi, rugi hysteresis per simpal adalah

$$U = 75 \times 5,4 = 405 \text{ J/m}^3$$

Rugi daya didapat dengan mengalikan U dengan volume inti dan 60 karena transformator dioperasikan pada 60 Hz, yaitu

$$P_{\text{hysteresis}} = 405 \times 60 \times 0,03 = 729 \text{ W}$$

Betatron

Betatron yang dikembangkan pada tahun 1940 oleh D.W. Kerst merupakan sebuah akselerator elektron. Pada betatron, elektron bersirkulasi di dalam ruang vakum berbentuk donat (*doughnut-shaped vacuum chamber*), dan dipercepat oleh GGL induksi yang dihasilkan oleh medan magnet yang berubah-ubah menurut waktu (Gambar 16.13). Dari hukum Faraday, GGL induksi adalah

$$\text{GGL} = E_\phi 2\pi R = -\frac{d\Psi}{dt}$$

di mana R adalah radius orbit elektron dan E_ϕ adalah induksi medan magnet akibat fluks magnet harmonik-waktu Ψ ,

Kecepatan elektron dinyatakan dengan v_ϕ ; sehingga gaya yang bekerja pada elektron adalah

$$m \frac{dv_\phi}{dt} = -eE_\phi = \frac{e}{2\pi R} \frac{d\Psi}{dt}$$

yang menghasilkan:

$$v_\phi = \frac{e}{2\pi m R} \Psi \quad (16.44)$$

Orbit yang stabil pada radius R dicapai ketika gaya sentrifugal akibat v_ϕ diseimbangkan oleh gaya Lorentz radial

$$m \frac{v_\phi^2}{R} = ev_\phi B(R) \quad (16.45)$$

di mana $B(R)$ adalah magnitudo medan magnet pada radius R yang menunjuk arah \hat{z} . Dengan membandingkan dua persamaan (16.44) dan (16.45), kita dapatkan

$$\Psi = 2\pi R^2 B(R)$$

Karena fluks Ψ adalah hasil dari integrasi medan magnet pada daerah antara $\rho = 0$ sampai $\rho = R$, maka

$$\Psi = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R \rho d\rho B(\rho) = 2\pi R^2 B(R)$$

Melakukan integrasi terhadap ϕ akan menghasilkan:

$$\int_0^R \rho d\rho B(\rho) = R^2 B(R)$$

Diferensiasi dari persamaan di atas terhadap R akan menghasilkan:

$$RB(R) = 2RB(R) + R^2 B'(R)$$

Persamaan di atas akan menghasilkan persamaan diferensial berikut:

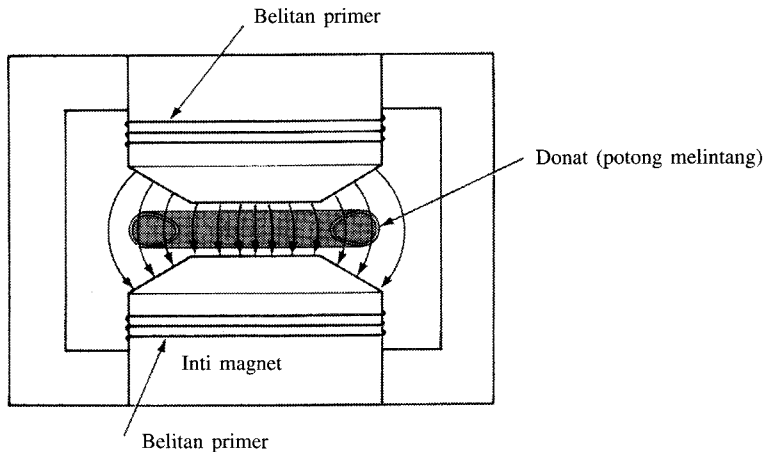
$$\frac{B'}{B} = \frac{-1}{R}$$

Penyelesaian dari B adalah

$$B(\rho) = \frac{C}{\rho} \quad (16.46)$$

Di mana C adalah konstanta. Dapat kita lihat bahwa medan magnet mempunyai nilai yang besar pada radius yang semakin kecil dan berkurang apabila semakin menuju keluar. Untuk menghasilkan medan yang tidak seragam seperti itu, kutub magnet harus dibentuk dengan tepat, seperti ditunjukkan dalam Gambar 16.13

Gambar 16.13 Betatron: piranti untuk mempercepat elektron.



Untuk mempercepat sebuah elektron, fluks magnetik harus bertambah sesuai waktu. Jika magnet dihasilkan oleh sebuah arus bolak-balik pada frekuensi f dengan periode T , maka percepatan total elektron harus dicapai dalam $T/4$ ketika fluks bertambah menurut waktu. Oleh karena itu, hanya elektron yang langsung bergeraklah yang dapat mencapai percepatan maksimum. Sebuah betatron menghasilkan elektron yang dipercepat dalam grup-

grup yang muncul pada frekuensi yang sama dengan frekuensi dari medan magnet yang berubah-ubah menurut waktu.

Ketika elektron-elektron tersebut ditahan pada orbit dengan radius konstan R , penggandaan percepatan untuk mencapai energi yang lebih besar dapat dilakukan dengan menggunakan sebuah medan listrik bolak-balik yang menyerupai *siklotron*. Variasi waktu dari medan magnet dan medan listrik yang bertambah cepat ini harus sinkron dengan percepatan masing-masing kelompok elektron. Percepatan betatron dan siklotron yang sinkron ini merupakan prinsip untuk sebuah operasi **sinkrotron**.

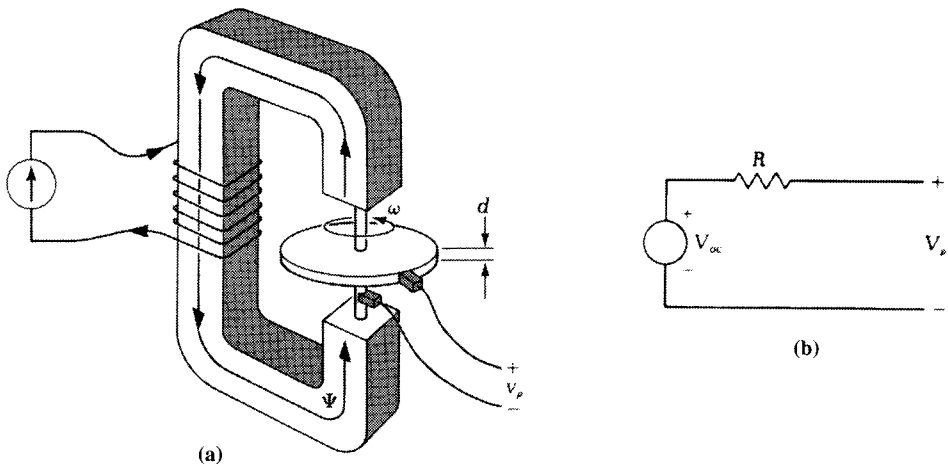
Energi elektron yang tinggi yang dihasilkan oleh betatron dapat digunakan untuk penelitian fisika ataupun untuk menghasilkan sinar X pada pengobatan atau industri.

Generator Homopolar

Sebuah generator homopolar terdiri dari sebuah cakram Faraday dengan konduktivitas σ dan radius b dan berputar dalam sebuah medan magnet seragam B_0 , seperti ditunjukkan pada Gambar 16.14.a. Gambar 16.14.b memperlihatkan rangkaian ekuivalennya. Misalkan sumbu z dari sistem koordinat silinder menjadi arah batangnya, yang mempunyai radius a . Perhatikan elemen paling kecil yang terdapat pada ρ . GGL induksi per satuan panjang pada elemen ini diberikan oleh (16.13):

$$\Delta E = \omega \rho B_0$$

Gambar 16.14 (a) Sebuah generator homopolar, terdiri dari cakram Faraday yang berputar dalam medan magnet dengan penguat arus DC dari luar (b) Rangkaian ekuivalen dari generator homopolar.



Karena cakram tersebut terbuat dari konduktor dengan konduktivitas terbatas, maka jatuh tegangan per satuan panjang akibat resistansi cakram adalah J_ρ/σ . Oleh karena itu, berlaku persamaan berikut:

$$E_\rho = \omega \rho B_0 - \frac{J_\rho}{\sigma}$$

Arus total arah $\hat{\rho}$ yang mengalir pada cakram tersebut sama dengan $2\pi\rho dJ_\rho$. Jadi,

$$E_\rho = \omega \rho B_0 - \frac{i_\rho}{2\pi\rho\sigma d}$$

di mana ω adalah kecepatan angular cakra, d adalah ketebalan cakra, J_p adalah rapat arus, dan i_p adalah arus total dengan arah \hat{p} .

Tegangan induksi yang timbul dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$v_p = \int_a^b d\rho \left(\frac{i_p}{2\pi\sigma\rho d} - \omega\rho B_0 \right) = \frac{-i_p}{2\pi\sigma d} \ln \frac{b}{a} + \frac{\omega B_0}{2} (b^2 - a^2)$$

Untuk rangkaian ekuivalen yang ditunjukkan pada Gambar 16.14.b, didapatkan bahwa

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma d} \ln \frac{b}{a}$$

adalah resistansi ekuivalen dan

$$v_{oc} = \frac{\omega B_0}{2} (b^2 - a^2)$$

adalah tegangan induksi rangkaian terbuka. Sebagai contoh, perhatikan kasus di mana:

$$\sigma = 5,7 \times 10^7 \text{ mho/m}$$

$$B_0 = 1 \text{ Wb/m}^2$$

$$d = 5 \text{ mm}$$

$$b = 10 \text{ cm}$$

$$a = 1 \text{ cm}$$

$$\omega = 120\pi \text{ rad/s}$$

Didapatkan

$$v_{oc} = \frac{120\pi}{2} (0,1^2 - 0,01^2) = 1,87 \text{ volt}$$

Resistansi pengganti R , seperti yang ditunjukkan pada Gambar 16.14.b adalah

$$R = \frac{1}{2\pi \times 5,7 \times 10^7 \times 0,005} \ln \frac{0,1}{0,01} = 1,29 \times 10^{-6} \Omega$$

Arus hubungan pendeknya akan menjadi

$$i_{sc} = \frac{v_{oc}}{R} = 1,45 \times 10^6 \text{ A}$$

Jadi, generator homopolar biasanya merupakan piranti yang bertegangan rendah dan berarus tinggi.

Generator AC

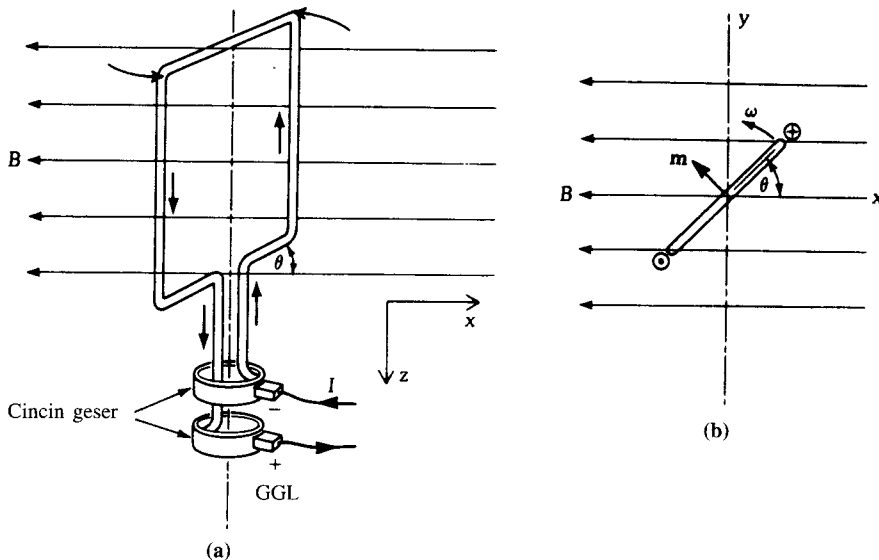
Gambar 16.15 memperlihatkan dasar dari prinsip kerja suatu generator arus bolak-balik. Koil persegi panjang, yang merupakan koil jangkar, diputar oleh suatu piranti mekanis (misalnya turbin) di dalam medan magnet dc pada frekuensi angular ω . Jika luas dari simpal adalah A maka keterkaitan fluks yang melalui simpal tersebut akan diberikan oleh

$$\Psi = BA \sin \theta \quad (16.47)$$

Dengan menggunakan hukum Faraday, kita peroleh

$$\text{GGL} = -\frac{d\Psi}{dt} = -BA \cos \theta \frac{d\theta}{dt} = -BA\omega \cos(\omega t) \quad (16.48)$$

Gambar 16.15 Generator AC (a) Tampak penuh (b) Tampak belakang, di mana m adalah momen magnetik terhadap arus di dalam simpal.



Karena adanya tanda minus pada (16.48), nilai sesaat GGL pada $\theta = \omega t = \pi/4$ akan negatif. Ujung-ujung koil dihubungkan ke rangkaian luar melalui dua cincin geser (*slip ring*). Tegangan yang ditimbulkan di cincin ini adalah harmonik waktu, sebagaimana kita lihat pada (16.48).

Misalkan arus yang mengalir melalui koil jangkar tersebut adalah $I \cos(\omega t + \alpha)$. Daya listrik sesaat yang dikirimkan ke rangkaian luar oleh generator adalah

$$P_e(t) = V(t)I(t) = -[BA\omega \cos(\omega t)][I \cos(\omega t + \alpha)] \quad (16.49)$$

Di lain pihak, torsi pada koil jangkar diberikan oleh (13.31):

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

Dalam kasus ini, $m = AI \cos(\omega t + \alpha)$ dengan arah yang ditunjukkan pada Gambar 16.15. Oleh karena itu,

$$T = \hat{z} AI \cos(\omega t + \alpha) B \cos(\omega t)$$

Ingat bahwa torsi akan melawan putaran kumparan. Daya mekanik untuk mengatasi gaya tarik elektromagnetik ini adalah $-T\omega$, atau

$$P_m(t) = -\omega T = -AB I \omega \cos(\omega t) \cos(\omega t + \alpha) \quad (16.50)$$

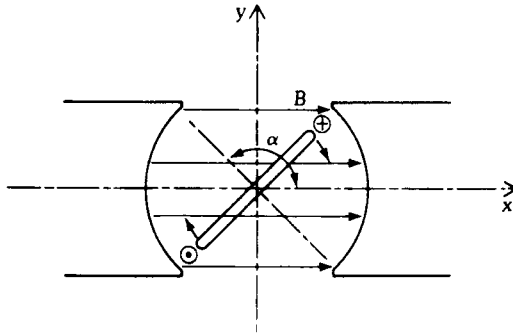
Dengan membandingkan (16.49) dengan (16.50), kita dapat membuktikan bahwa $P_e(t) = P_m(t)$. Dengan kata lain, daya dikonversikan setiap saat. Sehingga generator dapat dianggap sebagai piranti yang mengkonversi daya mekanik menjadi daya listrik.

Konversi Energi oleh Motor DC

Di Subbab 13.2, kita akan membahas prinsip kerja motor DC. Kita asumsikan bahwa posisi simpal koil jangkar membentuk sudut α terhadap medan magnetik seperti yang ditunjukkan Gambar 13.22b, yang di sini akan ditunjukkan ulang oleh Gambar 16.16. Jika arusnya adalah I dan medan magnet eksternal adalah B_0 maka torsinya adalah T , yang dinyatakan oleh

$$T = NIAB_0 \sin \alpha (-\hat{z}) \quad (16.51)$$

Gambar 16.16 Motor DC merupakan piranti-konversi energi. Kumparan jangkar berputar di dalam medan magnetik akibat gaya yang timbul pada kumparan yang dialiri arus. Pada saat yang sama, induksi Faraday menghasilkan gaya gerak listrik balasan.



di mana N adalah jumlah total lilitan dan A adalah luas koil. Ketika lilitan jangkar membentuk sudut $[-\Delta\alpha]$, kerja mekanis yang dilakukan motor adalah $T[-\Delta\alpha]$, atau

$$W_m = NIAB_0 \sin \alpha \Delta\alpha \quad (16.52)$$

Ingat bahwa fluks total yang melalui koil adalah

$$\Psi = NB_0 A \cos \alpha \quad (16.53)$$

Misalkan koil jangkar berputar dengan sudut $(-\Delta\alpha)$ dalam waktu Δt detik; maka tegangan induksi pada koil akan dinyatakan oleh hukum Faraday:

$$\text{GGL} = -\frac{d\Psi}{dt} = NB_0 A \sin \alpha \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = -NB_0 A \sin \alpha \left(\frac{-\Delta\alpha}{\Delta t} \right) \quad (16.54)$$

Berdasarkan hukum Lenz, arus I akan mengalir melawan GGL dan hasil kali I dan GGL akan sama dengan daya yang dikirim ke motor oleh sumber listrik eksternal. Selama periode Δt , energi listrik total yang dikirimkan ke motor adalah W_E , di mana

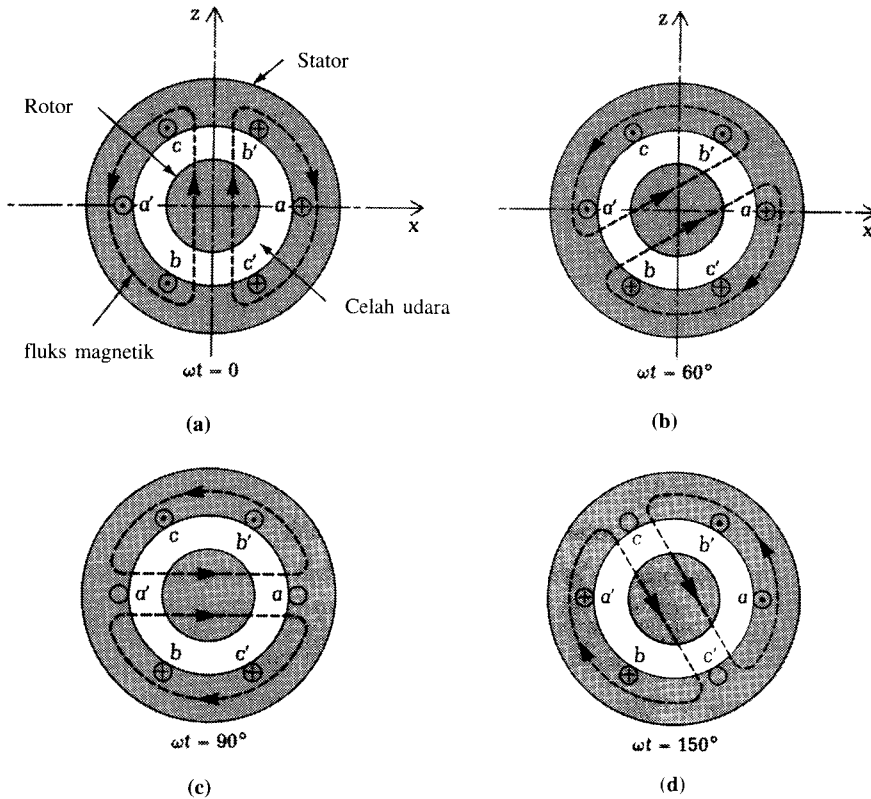
$$W_E = I(\text{GGL})\Delta t = INB_0 A \sin \alpha \Delta\alpha \quad (16.55)$$

Dengan membandingkan (16.52) dan (16.55), dapat dilihat bahwa kerja mekanis yang diberikan oleh motor akan sama dengan daya listrik yang dikirimkan ke motor oleh sumber listrik eksternal. Oleh karena itu, dapat dilihat bahwa energi listrik telah dikonversi menjadi energi mekanik. Dengan demikian motor DC dapat dianggap sebagai piranti yang mengkonversi energi listrik menjadi energi mekanik.

Medan Magnet Putar

Dalam pembahasan motor DC pada subbab 13.2 dan generator AC di bagian ini, Koil **jangkar** direpresentasikan oleh koil di udara. Model sederhana ini cukup baik untuk menunjukkan dasar dari prinsip kerja mesin ini. Untuk membahas motor induksi dan motor sinkron, diperlukan perbaikan model untuk koil jangkar. Gambar 16.17a menunjukkan model yang lebih realistis. **Rotor** merupakan silinder ferromagnetik. Medan magnetik dieksitasi oleh belitan koil pada **stator** yang juga terbuat dari bahan ferromagnetik. Medan magnetik yang dieksitasi oleh arus di koil tersebut akan mengalir dari stator ke rotor melalui celah udara yang terdapat di antara keduanya. Perbedaan konfigurasi medan magnetik di motor atau generator yang dihasilkan akan bergantung pada posisi geometrik koil dan arus yang mengalir pada koil tersebut. Di bagian ini, akan dibahas eksitasi medan magnet putar yang dihasilkan oleh koil yang dilalui arus bolak-balik tiga fase. Memahami bagaimana

Gambar 16.17 Satu set tiga koil yang disusun untuk menghasilkan medan magnet putar di celah antara rotor dan stator. Kumparan $a-a'$, $b-b'$ dan $c-c'$ dihubungkan ke arus tiga fase I_a , I_b dan I_c seperti yang ditunjukkan pada Gambar 16.18.



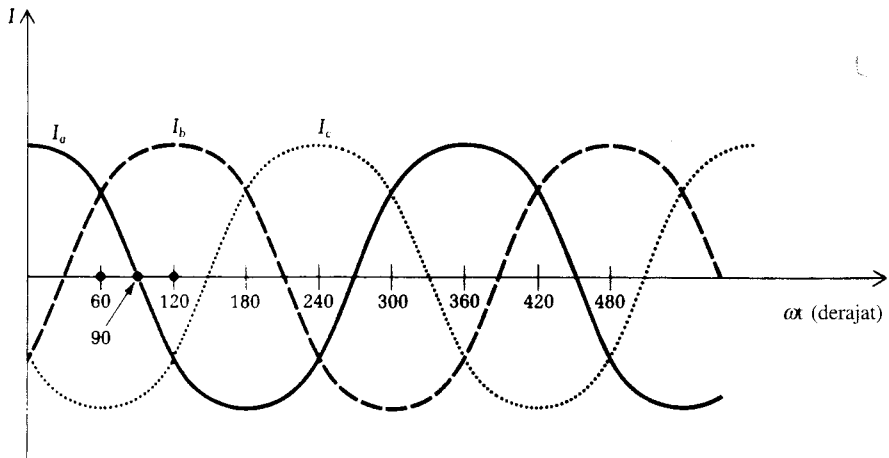
suatu medan magnet putar dapat dieksitasi oleh koil stasioner di stator merupakan syarat mutlak untuk memahami pembahasan berikutnya tentang motor induksi dan mesin sinkron.

Tiga set koil ditempelkan pada stator untuk mengeksitasi medan magnetik. Koil-koil ini, diberi label pada Gambar 16.17 sebagai $a-a'$, $b-b'$ dan $c-c'$, yang dialiri arus tiga fase. Gambar 16.18 menunjukkan bentuk gelombang dari arus-arus ini. Arus I_a adalah arus yang mengalir memasuki koil $a-a'$ di terminal a dan keluar di a' . Pada saat $t = 0$, arus I_a positif sehingga ia akan mengalir menembus kertas di terminal a dan keluar di terminal a' seperti yang ditunjukkan pada Gambar 16.17a. Tanda “+” merupakan simbol bahwa arus mengalir dengan arah masuk dan tanda “-” merupakan arus yang mengalir keluar kertas. Pada saat yang sama ($t = 0$), arus I_b dan I_c keduanya negatif. Jadi, arus di koil b dan c masing-masing akan mengalir dari b' ke b dan dari c' ke c . Dari diagram aliran arus sesaat seperti yang ditunjukkan Gambar 16.17a, terlihat bahwa kondisinya ekuivalen dengan tiga koil yang ditempatkan pada bidang x - y . Medan magnet dalam arah \hat{z} mengalir dari rotor ke stator melalui celah udara dan kembali mengalir di sepanjang stator.

Dari Gambar 16.18 dapat dilihat bahwa saat $\omega t = 60^\circ$, I_a dan I_b adalah positif dan I_c negatif. Gambar 16.17b menunjukkan hubungan diagram arus sesaat di dalam kumparan. Kondisi ini ekuivalen dengan tiga koil yang diarahkan membentuk sudut 60° dengan sumbu z . Jadi, fluks magnetik akan berputar dengan sudut 60° . Ingat bahwa koil tidak bergerak. Akibat terjadinya perubahan arus, koil di stator akan menghasilkan medan magnetik yang seolah-olah diputar dengan sudut 60° .

Gambar 16.17c dan Gambar 16.17d masing-masing menunjukkan medan magnet dan diagram arus pada saat $\omega t = 90^\circ$ dan $\omega t = 150^\circ$. Dapat disimpulkan bahwa melalui penempatan

Gambar 16.18 Unit arus tiga fase. Arus I_b tertinggal 120° terhadap arus I_a dan arus I_c tertinggal 120° terhadap arus I_b . Arus ini, ketika mengalir pada koil stator pada Gambar 16.17 akan menghasilkan medan magnet putar pada celah udara dari motor.



koil di stator dan mengalir arus tiga fase pada koil tersebut, medan magnet putar dapat dieksitasi di dalam celah udara stator dan rotor. Kecepatan perputaran angular akan sinkron dengan frekuensi angular arus bolak-balik tiga fase. Jika frekuensi arus tiga fase adalah 60 Hz, maka untuk konfigurasi yang ditunjukkan Gambar 16.17, kecepatan medan putarnya adalah 3600 r/min. Kecepatan dapat direduksi jika ada dua atau lebih set koil yang dililitkan di stator agar mereka periodik — setiap 180° dan bukan sebagai contoh, setiap 360° . Baru kemudian kecepatan putar medan magnet dapat direduksi menjadi 1800 r/min.

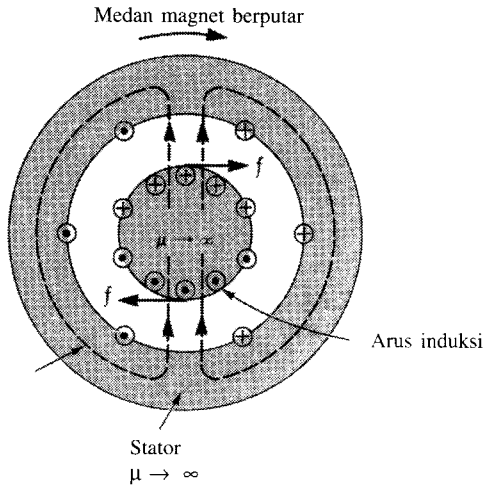
Motor Induksi

Motor induksi terdiri dari stator dan rotor, dan keduanya terbuat dari bahan ferromagnetik yang memiliki permeabilitas tinggi. Gambar 16.19 menunjukkan tampak melintang sebuah motor. Koil dililitkan pada stator dan dialiri arus tiga fase untuk menghasilkan medan magnet putar. Konfigurasi koil stator sama dengan yang ditunjukkan pada Gambar 16.17. Belitan dalam rotor biasanya terhubung pendek. Oleh karena itu, kita dapat mengumpamakan rotor sebagai silinder ferromagnetik dengan konduktivitas listrik terhingga. Karena medan magnet berputar, medan magnet yang mengait koil rotor yang terhubung singkat itu akan berubah menurut hukum Faraday, GGL akan diinduksikan pada rotor dan membangkitkan arus di rotor itu. Arus ini berinteraksi dengan medan magnet dan menghasilkan gaya sesuai dengan (13.26), dan gaya ini akan memutar rotor.

Selama rotor berputar pada kecepatan yang lebih rendah daripada kecepatan medan magnet, induksi GGL akan selalu ada untuk menghasilkan arus dan torsi. Namun demikian, jika rotor mampu menyamai medan magnet yang berputar tersebut, maka tidak ada gerak relatif di antara keduanya, dan GGL induksi akan nol: tidak ada gaya yang dihasilkan dan rotor akan memperlambat putarannya. Dari pembahasan ini dapat dilihat bahwa motor induksi adalah mesin yang tidak sinkron (*asynchronous*). Kecepatan putaran motor induksi akan selalu lebih kecil dibandingkan kecepatan putar medan magnet, yang untuk konfigurasi pada Gambar 16.17 yang terhubung pada sumber arus tiga fase berfrekuensi 60 Hz, besarnya adalah 3600 r/min.

Untuk menganalisis motor induksi secara kuantitatif, dibuat beberapa asumsi yang akan disederhanakan secara matematis. Pertama, diasumsikan bahwa celah antara rotor dan

Gambar 16.19 Motor Induksi. Kumparan stator membangkitkan medan magnet putar pada celah udara. Arus diinduksikan pada rotor dan berinteraksi dengan medan magnet untuk menghasilkan torsi.



stator lebih kecil daripada radius rotor. Akibatnya, kita dapat mengembangkan motor menjadi motor linear, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 16.20. Kedua, diasumsikan bahwa permeabilitas stator dan rotor adalah tak terhingga. Lebih jauh lagi, pola belitan rotor dianggap sebagai lapisan tipis konduktor dengan konduktivitas σ dan ketebalan δ .

Medan magnet *putar* di celah udara tersebut sekarang dapat direpresentasikan oleh medan magnet *berjalan* (*traveling*):

$$\mathbf{H} = \hat{x} H_x e^{-jkz} \quad (16.56)$$

Bilangan gelombang k ditentukan oleh periode belitan Λ , $k = 2\pi/\Lambda$. Untuk belitan yang ditunjukkan Gambar 16.19, $\Lambda = 2\pi a$, di mana a adalah radius stator dan $k = 1/a$. Misalkan ω adalah frekuensi angular sumber listrik: maka $v_s = \omega/k = a\omega$ adalah kecepatan linear medan magnetik di celah udara.

Ketika rotor diam, medan magnet berjalan akan menginduksikan medan listrik di rotor berdasarkan hukum Faraday. Dengan menggunakan (2.28a) dan (16.56), bersama-sama dengan $\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0$ dan $\partial/\partial z = -jk$, akan diperoleh

$$-jkE_{y1} = j\omega\mu_0 H_x e^{-jkz}$$

atau

$$E_{y1} = -\frac{\omega\mu_0}{k} H_x e^{-jkz} \quad (16.57)$$

Misalkan rotor bergerak pada kecepatan V_r dengan arah \hat{z} . Kemudian gerakan rotor di dalam medan magnet menghasilkan medan listrik induksi tambahan. Karena

$$\mathbf{v}_r \times \mathbf{B} = \hat{y} v_r H_x \mu_0 e^{-jkz}$$

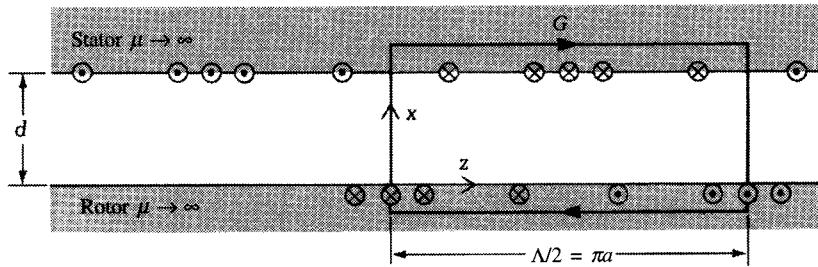
kita peroleh

$$E_{y2} = v_r H_x \mu_0 e^{-jkz}$$

Total medan listrik terinduksi pada rotor adalah jumlah E_{y1} dan E_{y2} :

$$\mathbf{E} = \hat{y} \left(-\frac{\omega}{k} + v_r \right) \mu_0 H_x e^{-jkz} = -\hat{y} (v_s - v_r) \mu_0 H_x e^{-jkz}$$

Gambar 16.20 Diagram pengembangan dari motor induksi yang ditunjukkan pada Gambar 16.19.



Medan listrik ini akan menginduksikan arus permukaan \mathbf{J}_{sr} di rotor.

$$\mathbf{J}_{sr} = \sigma \delta \mathbf{E} = -\hat{\mathbf{y}} \sigma \delta \mu_0 (v_s - v_r) H_x e^{-jkz}$$

Didefinisikan

$$\mathbf{J}_{sr} = -\hat{\mathbf{y}} J_{sr0} e^{-jkz}$$

di mana

$$J_{sr0} = \sigma \delta \mu_0 (v_s - v_r) H_x \quad (16.58)$$

Untuk menghitung magnitudo medan H_x searah $\hat{\mathbf{x}}$, di celah udara, mengintegrasikan kita hukum rangkaian Ampere terhadap jalur C yang ditunjukkan pada Gambar 16.20

$$\oint_C d\ell \cdot \mathbf{H} = \int_0^{\Lambda/2} dz (-\hat{\mathbf{y}}) \cdot (\mathbf{J}_{sr} + \mathbf{J}_{ss}) \quad (16.59)$$

Di mana \mathbf{J}_{ss} adalah arus permukaan pada stator yang disuplai oleh sumber eksternal. Misalkan \mathbf{J}_{ss} dinyatakan oleh

$$\mathbf{J}_{ss} = -\hat{\mathbf{y}} J_{ss0} e^{-jkz} \quad (16.60)$$

di mana J_{ss0} adalah sebuah konstanta yang ditentukan oleh kekuatan sumber eksternal. Karena stator dan rotor mempunyai permeabilitas tak hingga, maka tidak akan ada kontribusi pada integral garis di ruas kiri terkecuali di dalam celah udara. Kita dapatkan

$$\left[H_x(z=0) - H_x\left(z = \frac{\Lambda}{2}\right) \right] d = \frac{-1}{jk} (J_{sr0} + J_{ss0}) (e^{-j\pi} - 1)$$

Karena $H_x(z=0) = H_x$ dan $H_x(z = \Lambda/2) = H_x e^{-j\pi}$, kita dapatkan

$$H_x = \frac{-j}{kd} (J_{sr0} + J_{ss0}) \quad (16.61)$$

Dari (16.58) dan (16.61), kita menghilangkan H_x untuk memperoleh

$$J_{sr0} = -\frac{jR_m}{1 + jR_m} J_{ss0} \quad (16.62)$$

di mana parameter tanpa dimensi R_m akan diberikan oleh

$$R_m = \frac{\sigma \delta \mu_0}{kd} (v_s - v_r) \quad (16.63)$$

Medan magnet total akan diperoleh dari (16.61) dan (16.62).

$$H_x = \frac{-j/kd}{1 + jR_m} J_{ss0} \quad (16.64)$$

Medan magnet tersebut bekerja pada keping arus induksi \mathbf{J}_{sr} dan akan menimbulkan gaya rata-rata waktu pada motor per periode

$$\langle F \rangle = \frac{\ell}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^\Lambda dz \mathbf{J}_{sr} \times \mu_0 \mathbf{H}^* \right\} = \hat{z} \frac{\ell \Lambda}{2kd} \frac{\mu_0 R_m}{1 + R_m^2} |J_{ss0}|^2 \quad (16.65)$$

Di mana ℓ adalah panjang rotor searah porosnya.

Torsi rata-rata waktu yang dihasilkan gaya tersebut adalah

$$\langle T \rangle = 2a \langle F \rangle = \frac{2\pi a \ell}{k^2 d} \frac{\mu_0 R_m}{1 + R_m^2} |J_{ss0}|^2 \quad (16.66)$$

Ingat bahwa jika kecepatan rotor sama dengan medan magnet putar, maka $v_s = v_r$ dan $R_m = 0$. Hasil ini akan memberikan $\langle F \rangle = 0$ dan $\langle T \rangle = 0$ dan mempertegas kesimpulan yang kita tarik dari pembahasan kualitatif mengenai motor induksi. Perhatikan juga keberadaan optimum v_r yang akan memberikan torsi maksimum. Nilai v_r yang memberikan torsi maksimum adalah pada saat R_m sama dengan 1— yaitu

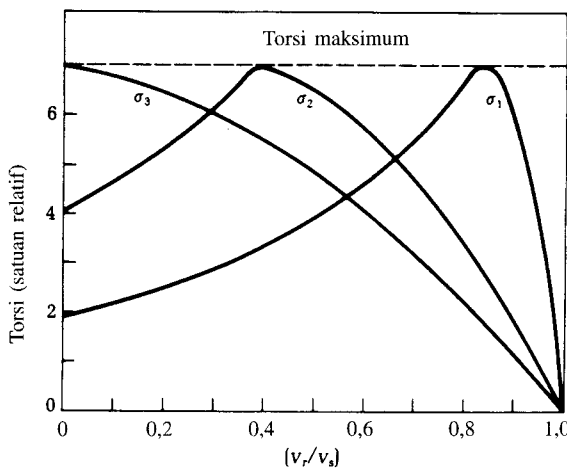
$$\frac{\sigma \delta \mu_0 (v_s - v_r)}{kd} = 1 \quad (16.67)$$

karena $\langle T \rangle$ akan maksimum ketika $R_m = 1$. Torsi maksimum $\langle T \rangle_{\text{maks}}$ dinyatakan oleh:

$$\langle T \rangle_{\text{maks}} = \frac{\pi \mu_0 a \ell}{k^2 d} |J_{ss0}|^2$$

Ia tidak tergantung pada σ dan δ , yang menentukan hanya resistansi rotor. Bagaimanapun, kecepatan rotor v_r pada saat torsi maksimum terjadi akan tergantung pada resistivitas rotor seperti yang diperlihatkan pada (16.67). Kurva torsi-kecepatan motor induksi yang ditunjukkan pada Gambar 16.21 ini dengan jelas menampilkan karakteristik-karakteristik ini, yang lazim terdapat pada motor induksi.*

Gambar 16.21 Kurva torsi-kecepatan dari motor induksi tiga fase dengan konduktivitas rotor yang bervariasi.

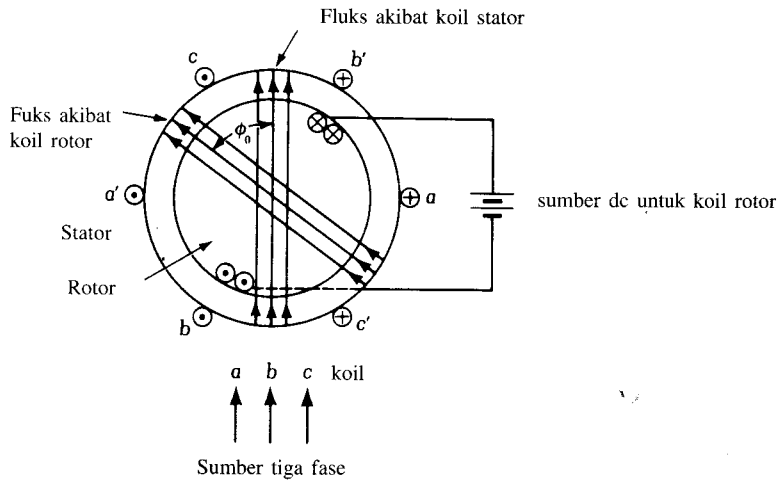


Motor Sinkron

Gambar 16.22 menunjukkan motor sinkron tiga fase. Koil stator tersebut menggambarkan arus tiga fase dan menghasilkan medan magnet putar. Rotor terdiri dari kutub magnet tetap

* A. E. Fitzgerald dan C. Kingsley, Jr., *Electric Machinery*, New York: McGraw-Hill, 1952, hal. 129.

Gambar 16.22 Motor Sinkron. Kumparan stator dialiri arus tiga fase yang sama dengan salah satu yang ditunjukkan pada Gambar 16.17 Arah arus di kumparan stator dan arah fluks stator ini ditunjukkan untuk $t = 0$.



yang dihasilkan oleh sumber DC. Rotor yang ditunjukkan pada Gambar 16.22 mempunyai satu pasang kutub magnet. Rotor tersebut mempunyai momen magnetik \mathbf{m} dengan arah radial. Medan magnet putar juga dalam arah radial tetapi membentuk sudut ϕ terhadap momen magnetik rotor. Sesuai dengan (13.31), torsi yang dihasilkan antara \mathbf{m} dan medan magnet putar \mathbf{B} adalah

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} = -\hat{z} mB \sin \phi \quad (16.68)$$

Dalam situasi yang ditunjukkan dalam Gambar 16.22, torsi akan menunjuk ke dalam kertas. Nyatakan kecepatan angular medan magnet putar sebagai ω_m dan kecepatan angular pada rotor sebagai ω_r . Sudut ϕ diberikan oleh

$$\phi = \omega_m t - \omega_r t + \phi_0 \quad (16.69)$$

Jadi, torsi konstan akan dihasilkan hanya jika rotor berputar pada kecepatan sama dengan kecepatan medan magnet putar. Jika tidak, sesuai dengan (16.68) dan (16.69), torsi rata-rata akan nol. Kenyataan ini menjelaskan mengapa mesin ini dinamakan mesin sinkron.

Motor sinkron tidak dapat *distart* dengan sendirinya. Torsi dihasilkan hanya jika motor siap berputar pada kecepatan sinkron. Untuk menyelesaikan masalah ini, rotor motor sinkron biasanya dibelit dengan koil pembantu yang dinamakan belitan peredam. Belitan peredam ini terhubung pendek agar arus induksi dapat mengalir ketika motor mulai *start*. Dengan kata lain, motor ini semula adalah motor induksi. Rotor kemudian dipercepat hampir mencapai kecepatan sinkronnya. Selama waktu itu, sumber DC tidak terhubung dengan koil rotor. Sumber DC tersebut kemudian dinyalakan ketika kecepatan rotor mendekati kecepatan sinkronnya. Torsi akan diberikan oleh:

$$T(t) = mB \sin [(\omega_m - \omega_r)t + \phi_0] \quad (16.70)$$

Jika selisih antara ω_m dan ω_r cukup kecil (biasanya 5 sampai 10 r/min) dan jika beban dan kelembamannya tidak terlalu besar, fungsi sinus akan tetap positif dalam waktu yang cukup lama agar kecepatan rotor dapat mendekati kecepatan sinkronnya. Proses ini biasa disebut “menarik rotor menuju kecepatan sinkronnya”. Pada saat terjadinya sinkronisasi, $\omega_m = \omega_r$, dan (16.70) menjadi

$$T = mB \sin \phi_0$$

Sudut ϕ_0 biasa disebut dengan **sudut torsi**. Sudut torsi ialah sudut antara momen magnetik rotor dengan medan magnet stator pada saat keadaan sinkron tercapai. Sudut torsi

ini bervariasi dengan perubahan beban. Jika bebannya bertambah, untuk sesaat kecepatan rotor akan turun sebentar untuk menaikkan sudut torsi dan kemudian kembali berada pada kecepatan sinkronnya.

Torsi maksimum yang bisa dikirim oleh motor terjadi pada saat ϕ_0 sama dengan 90° . Torsi maksimum ini biasa disebut **torsi maksimum** (*pullout torque*) motor. Jika beban tersebut membutuhkan torsi yang lebih besar daripada torsi maksimum ini, rotor akan melambat terus dan kesinkronannya akan hilang.

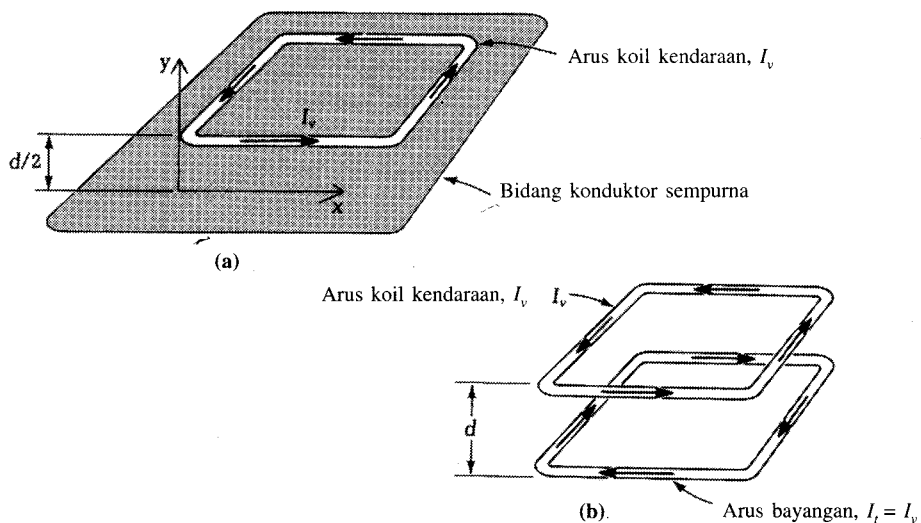
Magneplane

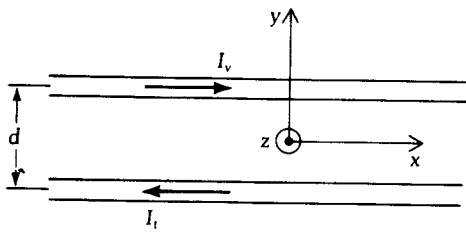
Magneplane ialah sejenis kendaraan transportasi kecepatan tinggi yang terbang dengan ketinggian 0,3 m di atas jalur penghantarnya. Ia tidak beroda dan terbang di udara. Gaya angkatnya ditimbulkan oleh **pelayangan magnetik** (*magnetic levitation*), dan pendorongnya disuplai oleh gaya magnetik yang bisa bertumpu pada prinsip motor induksi atau prinsip motor sinkron. Kita akan diskusikan pelayangan magnetik dan pendorongnya secara terpisah.

Magneplane membawa koil dari bahan superkonduktor di mana arus listrik searah I_v yang cukup besar dapat ditampung. Kita dapat memahami prinsip kerja dari gaya pelayangan ini dengan metode bayangan. Demi kesederhanaan konsep, anggap bahwa koil kendaraan itu bergerak di atas suatu bidang konduktor sempurna, dengan ketinggian $d/2$ (Gambar 16.23a). Arus pada koil dapat dianggap terjadi sebagai akibat dari adanya suatu muatan positif yang bergerak searah dengan arah arus listrik. Muatan bayangan tersebut negatif dan bergerak pada arah yang sama, sehingga terbentuklah arus I_t yang berlawanan arah dengan arus yang ada pada kendaraan. Jarak antara koil arus pada kendaraan dengan arus bayangannya adalah d (Gambar 16.23b). Dengan metode bayangan, kita dapatkan $I_t = I_v$. Dalam prakteknya, kita tidak memiliki suatu penghantar pelat tipis yang sempurna, dan arus bayangan pada umumnya akan memiliki amplitudo yang lebih kecil.

Untuk memperkirakan gaya antara kedua koil yang membawa arus dengan arah berlawanan itu, kita perhatikan kasus yang ada pada Gambar 16.24. Jarak pemisah koil tersebut relatif kecil jika dibandingkan dengan ukurannya. Kita modelkan tiap pasang dan

Gambar 16.23 (a) Pelayangan magnetik dimanfaatkan untuk magneplane melalui interaksi gaya antara kumparan pada magneplane dengan jalurnya, yang dianggap sebagai bidang konduktor sempurna. (b) Konfigurasi pada (a) akan ekuivalen dengan sistem dua kumparan ini.





Gambar 16.24 Terdapat gaya magnet tolak-menolak antara dua kawat lurus yang dialiri arus listrik dengan arah berlawanan. Prinsip kerja pelayangan magnetik menggunakan prinsip ini.

sisi dari koil itu sebagai dua buah kawat dengan panjang tak berhingga yang membawa arus listrik dengan arah berlawanan. Medan magnet yang terdapat pada kawat bagian atas dan yang ditimbulkan oleh kawat bagian bawah yang membawa arus I_t diberikan oleh (13.6):

$$\mathbf{H}_t = -\hat{z} \frac{I_t}{2\pi d}$$

Arah $-\hat{z}$ dalam kasus ini sesuai dengan $\hat{\phi}$ seperti pada Gambar 13.2. Gaya yang terdapat pada kawat bagian atas yang ditimbulkan medan magnet dapat diketahui dari (13.26):

$$\mathbf{F} = I_v \ell(\hat{x}) \times \frac{\mu_0 I_t}{2\pi d} (-\hat{z}) = \frac{\mu_0 I_t I_v \ell}{2\pi d} \hat{y} \quad (16.71)$$

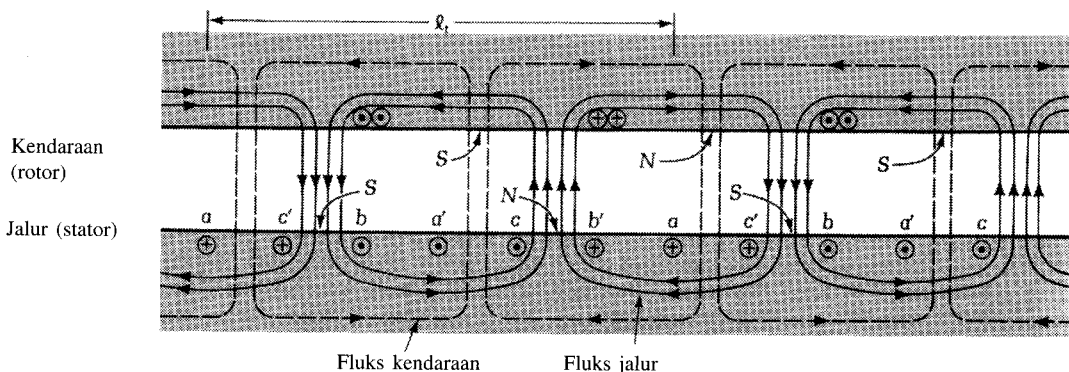
Gaya total pada suatu koil bujursangkar adalah 4 kali nilai di atas:

$$\mathbf{F}_{\text{koil}} = \hat{y} \frac{2\mu_0 I_t I_v \ell}{\pi d} \quad (16.72)$$

Ingat bahwa gaya tersebut dalam arah \hat{y} positif. Gaya inilah yang menyebabkan terangkatnya magneplane.

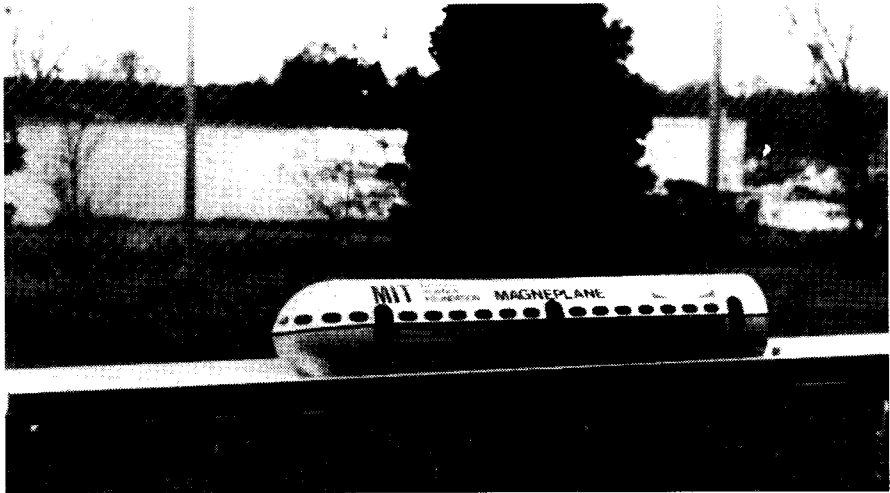
Gaya pendorong magneplane menggunakan prinsip kerja motor sinkron. Jalurnya adalah statornya, dan kendaraannya merupakan rotor. Koil dapat diletakkan pada jalur itu dengan cara yang sama dengan yang ada pada motor sinkron biasa. Gambar 16.25 menunjukkan sebuah contoh yang sesuai dengan diagram yang ada pada Gambar 16.22. Koil $a-a'$ berulang secara periodik, begitu juga dengan koil $b-b'$ dan $c-c'$. Jika koil-koil ini dialiri dengan arus listrik tiga fase seperti ditunjukkan pada Gambar 16.18, maka suatu medan magnet bergerak akan dihasilkan. Medan magnet ini akan berinteraksi dengan momen magnetik dc pada kendaraan dan menimbulkan gaya dorong.

Gambar 16.25 Magneplane didorong dengan motor sinkron linear. Diagram ini diambil dari Gambar 16.22. Perhatikan bahwa gaya magnetnya cenderung untuk menyebar ke kutub selatan kendaraan dengan kutub utara lintasan. Kecepatan sinkron magneplane ditentukan oleh jarak ℓ_t dan frekuensi arus listrik yang digunakan.



Magneplane yang sedang dikembangkan saat ini berukuran sama dengan pesawat Boeing 707. Kendaraan ini membutuhkan daya listrik sebesar 5 MW untuk mendorong kendaraan, dengan kapasitas 140 penumpang ini sebanyak, satu atau dua kali dalam satu menit, berbeda dengan kereta listrik yang ada sekarang, yang membutuhkan daya listrik sebesar 50 MW untuk mendorong kereta itu satu atau dua kali dalam satu jam penumpang dengan kapasitas 800. Pelayangan dan gaya dorong membutuhkan arus listrik yang cukup besar, yang dapat dilakukan dengan menggunakan bahan superkonduktor dalam ruang hampa. Helium cair disirkulasikan di dalam bahan superkonduktor itu agar sifat superkonduktivitasnya dapat bertahan.* Gambar 16.26 menunjukkan model berskala dari suatu magneplane. Suatu magneplane kapasitas 44 penumpang berukuran penuh (dinamakan kereta mag-lev) telah diuji pada jalur sejauh 5,5 km di Jepang dan mampu mencapai kecepatan tertinggi 500 km/jam (310 mph).**

Gambar 16.26 Sebuah model magneplane dengan ukuran 1/15 ukuran sebenarnya sedang diuji di Institut Teknologi Massachusetts. (Seizin Institut Teknologi Massachusetts)



Contoh 16.12 Contoh ini menunjukkan magnitudo gaya pelayangan magnetik.

Asumsikan bahwa koil kendaraan sebuah magneplane berukuran $1,0 \text{ m} \times 1,0 \text{ m}$ dan membawa arus listrik sebesar $2 \times 10^5 \text{ A}$. Jarak pemisah antara kendaraan dengan jalurnya adalah $0,25 \text{ m}$. Tentukan gaya pelayangannya .

Solusi

Dari (16.72), kita dapatkan:

$$F_{\text{koil}} = \frac{2 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 2 \times 10^5 \times 2 \times 10^5 \times 1,0}{\pi \times 0,5} = 64 \times 10^3 \text{ N}$$

$$= 6,5 \text{ metrik ton}$$

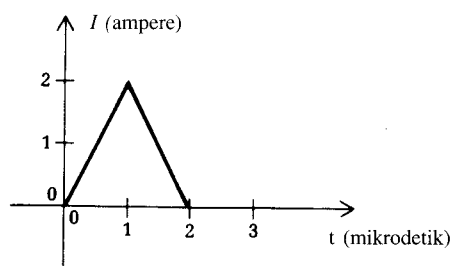
* Acuan mengenai topik ini: (1) H. H. Kolm dan R. D. Thornton, "Electromagnetic flight," *Scientific American*, Oktober 1973, hal. 17-25; (2) E. Ohno, M. Iwamoto dan T. Yamada, "Characteristics of superconductive magnetic suspension and propulsion for high-speed trains," *Proc. IEEE*, 6, No. 5 (1973): 579-786; (3) R.D Thornton, Y. Iwasa, dan H. H. Kolm "The magneplane system," *Proc. 5th International Cryogenic Engineering Conference*, IPC Science and Technology Press, England.

** J. Hillkirk, "Japan's high-speed trains to give rail travel a lift," *USA Today*, 31 Januari , 1989.

- RINGKASAN**
1. Pada suatu medan magnet yang berubah terhadap waktu saling mengait melalui suatu rangkaian, gaya gerak listrik (GGL) induksi akan dibangkitkan dalam rangkaian tersebut. magnitudo dan polaritasnya ditentukan berdasarkan hukum Faraday.
 2. Sebuah voltmeter akan menunjukkan dua nilai yang berbeda walaupun dihubungkan dengan dua simpul yang sama jika rangkaianannya terletak dalam suatu medan magnet yang berubah terhadap waktu. Pembacaan voltmeter bergantung pada penyusunan kawat-kawat utamanya
 3. Suatu GGL akan diinduksikan pada kawat yang “memotong” medan magnet.
 4. Energi magnetik akan disimpan dalam suatu solenoid yang membawa arus DC. Koil pada solenoid tersebut akan mengalami gaya ekspansi. Gaya itu dapat diperoleh dengan menghitung perubahan energi tersimpan dalam sistem dengan memandang perubahan radius koil.
 5. Transformator ideal adalah transformator yang memiliki inti besi dengan permeabilitas yang tak terhingga. Sebagai hasilnya, intensitas medan magnet H yang diperlukan untuk menghasilkan fluks magnet sangat kecil dan tidak terdapat kebocoran fluks.
 6. Rugi histeresis disebabkan oleh adanya medan magnet yang berubah terhadap waktu pada suatu bahan ferromagnetik. Rugi ini ditentukan oleh simpal histeresis bahan tersebut.
 7. Generator ac merupakan suatu piranti untuk mengubah daya mekanik menjadi daya listrik. Motor DC merupakan suatu piranti untuk mengubah daya listrik menjadi daya mekanik. Dari hukum Faraday, kita membuktikan bahwa proses konversi itu terjadi seketika; artinya, energi akan kekal setiap saat.
 8. Kita dapat membangkitkan medan magnet berputar dengan menggunakan arus listrik tiga fase untuk membangkitkan medan magnet tersebut pada koil yang tetap (stator). Konfigurasi ini dimanfaatkan dalam induksi dan motor sinkron.

Soal-soal

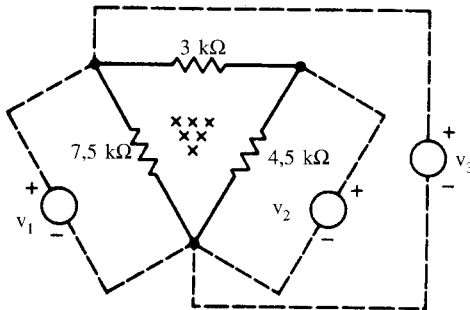
- 16.1 Sebuah simpal berbentuk lingkaran dengan radius 5 mm diletakkan sejauh 1 meter dari sebuah kabel daya 60 Hz. Tegangan induksi yang terukur pada simpal ini adalah 0,6 mikrovolt. Berapakah arus yang mengalir pada kabel tersebut?
- 16.2 Asumsikan bahwa bentuk gelombang dari arus yang mengalir pada sebuah kawat yang panjangnya tak terhingga seperti pada Gambar 16.1 adalah pulsa segitiga (lihat Gambar P16.2). Hitung tegangan induksi pada simpal yang berbentuk persegi panjang. Gunakan data-data berikut: $a = 2$ cm, $b = 4$ cm, $d = 1$ cm.



Gambar P16.2

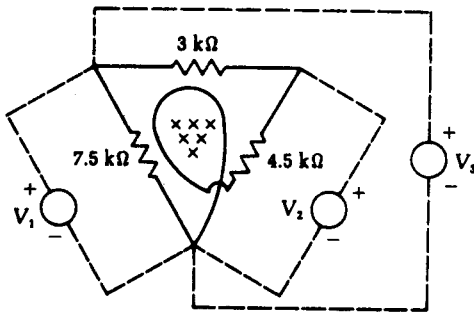
- 16.3** Perhatikan jaringan yang ditunjukkan pada Gambar P16.3. Fluks magnetik meningkat dengan laju $0,5 \text{ Wb/s}$ dengan arah menembus ke dalam bidang kertas. Tentukan pembacaan pada voltmeter yang terlihat.

Gambar P16.3



- 16.4** Tentukan pembacaan voltmeter pada Gambar P16.4. Fluks magnetik meningkat dengan laju $0,5 \text{ Wb/s}$ dengan arah menembus ke dalam bidang kertas.

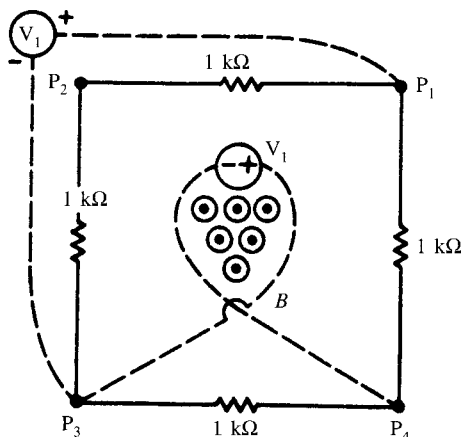
Gambar P16.4



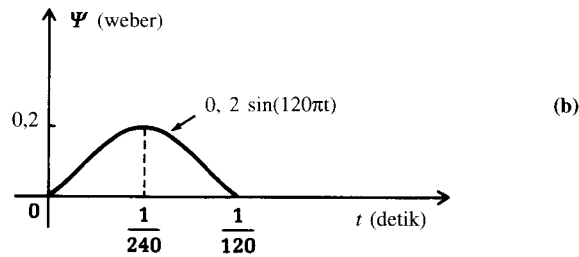
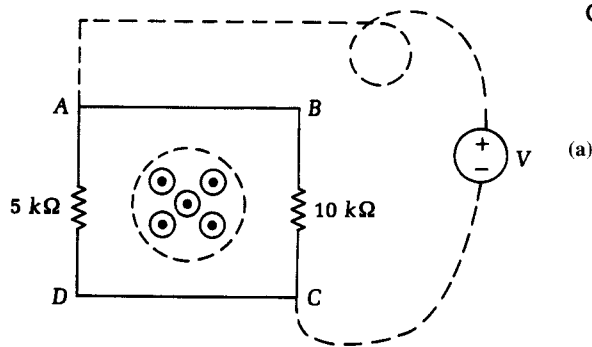
- 16.5** Empat buah resistor membentuk sebuah rangkaian seperti pada Gambar P16.5. Fluks magnet total yang mengait rangkaian tersebut bertambah dengan laju $0,5 \text{ Wb/s}$, dengan arah ke luar bidang kertas.

- Tentukan arah dan magnitudo arus yang induksi pada rangkaian.
- Tentukan pembacaan pada voltmeter V_1 dan V_2 .

Gambar P16.5

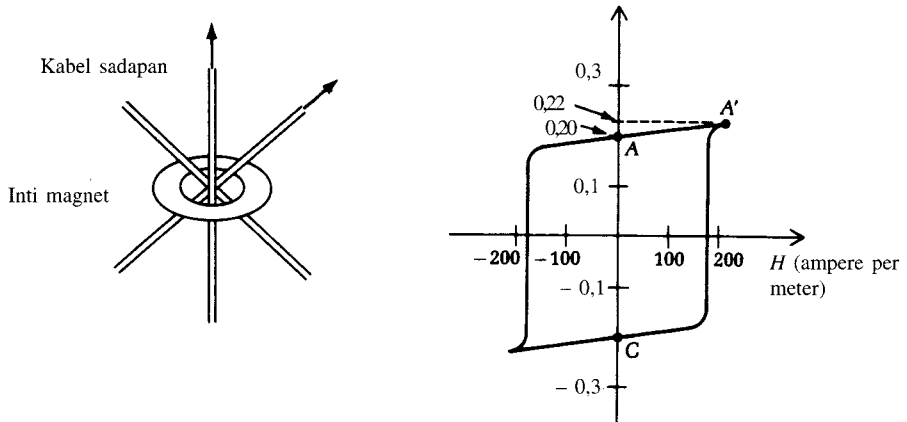


- 16.6** Rangkaian yang ditunjukkan pada Gambar P16.6a diletakkan dalam suatu medan magnet dengan arah fluks magnet menembus ke luar bidang kertas. Perubahan waktu dari fluks Ψ ditunjukkan pada Gambar P16.6. Fluks magnet yang ditimbulkan di bagian daerah tengah dibatasi oleh titik-titik ABCD. Tentukan dan plot tegangan yang terbaca pada voltmeter, sebagai fungsi waktu.

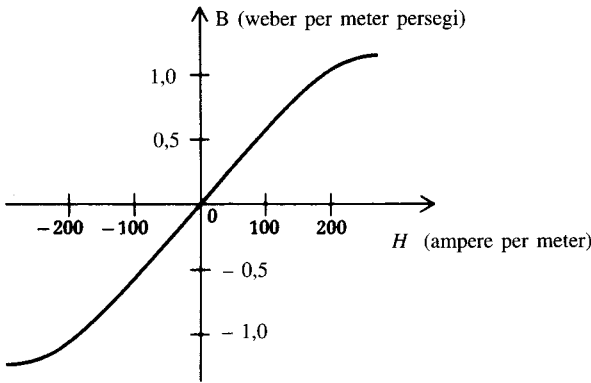


- 16.7** Berapakah GGL yang terinduksi pada sebuah bilah propeler (baling-baling) yang panjangnya 1,5 meter dan berputar 10.000 r/menit yang berada dalam medan magnet bumi ($0,5 \times 10^{-4} \text{ Wb/m}^2$)?
- 16.8** Tentukan gaya ekspansi total yang bekerja pada permukaan inti besi dari suatu solenoid yang memiliki 100 lilitan dengan jari-jari $a = 1 \text{ cm}$, panjang $l = 10 \text{ cm}$, dan arus $I = 10 \text{ A}$.
- 16.9** Ulangi latihan soal no. 16.8 untuk kasus koil dengan 100 lilitan yang dibelitkan pada suatu inti besi yang terbuat dari bahan ferromagnetik dengan $\mu = 1000 \mu_0$. Arus yang mengalir adalah 10 mA, dengan $a = 1 \text{ cm}$ dan $\ell = 10 \text{ cm}$.
- 16.10** Sebuah inti magnet dibuat dari suatu bahan yang memiliki karakteristik histeresis seperti pada Gambar P16.10. Perhatikan bahwa simpal histeresisnya bukan merupakan bujursangkar. Untuk mengukur muatan pada inti, diberikan 2 buah pulsa pada kawat. Arus ini membangkitkan H sebesar 200 A/m. Luas penampang dari inti yang digunakan adalah 3×10^{-7} .
- Berapakah tegangan yang diinduksikan pada kawat sensor tersebut jika inti berada dalam keadaan “nol” (pada titik C)? Asumsikan bahwa pertukaran dari C ke A linear terhadap waktu dan berlangsung dalam orde mikrosekond.
 - Berapakah tegangan yang diinduksikan pada kawat sensor tersebut jika inti berada dalam keadaan “satu” (pada titik A)? Asumsikan bahwa pertukaran dari A ke A' linear terhadap waktu dan berlangsung selama $0,5 \mu\text{s}$. Tegangan ini merupakan tegangan “derau” sebab pada kondisi yang ideal, bentuk simpal histeresisnya adalah bujursangkar sempurna dan besar tegangan ini adalah nol.

Gambar P16.10



- 16.11** Sebuah transformator, seperti yang nampak pada Gambar 16.11, dibuat menggunakan baja dengan permeabilitas 1100. Panjang efektif dari inti adalah 40 cm, sedangkan kerapatan fluksnya adalah $B = 0,3 \text{ Wb/m}^2$. $N_1 = 100$, $N_2 = 1000$, $I_1 = 60 \text{ A}$.
- Hitung I_2 , asumsikan bahwa transformator yang digunakan adalah transformator ideal.
 - Hitung I_2 , dengan menggunakan (16.37).
 - Bandingkan jawaban (a) dan (b).
- 16.12** Perhatikan rangkaian magnet yang sama seperti rangkaian pada Gambar 16.11. Panjang efektif intinya adalah 0,4 m dan permeabilitasnya adalah $2000 \mu_0$. Luas penampangnya $4 \times 10^{-4} \text{ m}^2$. $I_1 = 10 \text{ A}$, $I_2 = 24 \text{ A}$, $N_1 = 50$, dan $N_2 = 20$
- Hitung medan B pada inti. Berikan arah dan magnitudonya
 - Jika I_1 adalah ac dengan $f = 60 \text{ Hz}$, berapakah $|V_1|$ dan $|V_2|$? Asumsikan bahwa fluks magnetik tetap tinggal di inti tanpa terjadi kebocoran.
- 16.13** Jumlah lilitan koil primer dari sebuah transformator adalah 150 dan koilsekundernya 450. Panjang efektif inti besi yang digunakan 0,5 m dan kerapatan fluks pada inti besi adalah $0,25 \text{ Wb/m}^2$. Trafo yang digunakan serupa dengan yang ditunjukkan pada Gambar 16.11. Misalkan $I_1 = 60 \text{ A}$ dan tidak ada kebocoran fluks.
- Hitung I_2 , asumsikan bahwa transformator yang digunakan dalam kondisi ideal.
 - Hitung V_2 , asumsikan bahwa transformator yang digunakan ideal dan $V_1 = 110 \cos(120\pi t)$
 - Hitung I_2 , dengan mengambil kondisi bahwa bahan dari inti yang digunakan memiliki permeabilitas yang terbatas, yaitu sama dengan $1000 \mu_0$
 - Simpal histeresis dari bahan inti memiliki luas 90 Wb-A/m^3 . Berapakah rugi daya akibat adanya histeresis pada transformator? Asumsikan bahwa inti yang digunakan memiliki luas penampang 4 cm^2 .
- 16.14** Gambar P16.14 menunjukkan kurva magnetisasi dari sebuah inti transformator. Histeresis dapat diabaikan. Bentuk kurva magnetisasi pada interval $0 \leq H \leq 150 \text{ A/m}$ adalah linear, sedangkan di luar interval tersebut kurva magnetisasinya mengalami kejenuhan. Mari kita ulangi Contoh 16.10. Karena $|V_1| = \omega N_1 \Psi$, kita ingin menggunakan nilai Ψ maksimum untuk meminimalkan jumlah koil yang ada di trafo. Dengan menggunakan Gambar P16.14, terangkan apa yang akan terjadi dengan bentuk dari $\Psi(t)$, dan juga $V_1(t)$, jika Ψ terlalu tinggi—sebagai contoh, jika Ψ terlalu besar dibanding $B = 1,2 \text{ Wb/m}^2$.

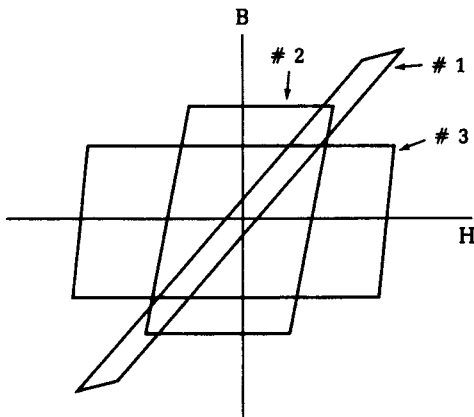


Gambar P16.14

16.15 Perkirakan rugi daya yang diakibatkan adanya efek histeresis pada inti besi yang terbuat dari ferit seperti ditunjukkan pada Gambar P16.10 jika inti besi itu berganti terus menerus antara “nol” dan “satu” setiap 1000 kali dalam satu detik. Anggap inti besi mempunyai radius 6×10^{-4} m dengan luas penampang 3×10^{-7} .

16.16 Tiga buah kurva histeresis bagi tiga jenis bahan feromagnetik yang berbeda ditunjukkan pada Gambar P16.16.

- (a) Jika Anda diharuskan menggunakan salah satu dari bahan tersebut itu sebagai inti besi suatu trafo daya, manakah yang akan Anda pilih? Mengapa?
- (b) Jika Anda diharuskan menggunakan salah satu bahan tersebut itu sebagai bahan untuk perekam magnetik, manakah yang akan Anda pilih dengan pertimbangan keamanan terhadap penghapusan data yang tidak sengaja akibat adanya medan magnet? Mengapa?



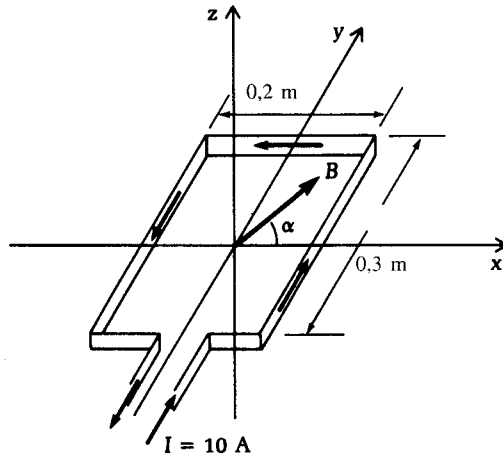
Gambar P16.16

16.17 Suatu medan magnet seragam dengan magnitudo 0,3 T berputar di sekitar sumbu y. Kecepatan putarnya adalah 40π rad/s. Sebuah simpal bujursangkar ditempatkan pada bidang x-y, seperti pada Gambar P16.17. Pada saat t, arah medan magnet akan membentuk sudut α dengan sumbu x.

- (a) Berapakah torsi pada simpal itu akibat medan magnet? Misalkan $\alpha = 30^\circ$.
- (b) Berapakah besarnya daya mekanis yang diteruskan ke beban luar oleh simpal ini?

- (c) Berapakah GGL induksi pada rangkaian tersebut? Apakah arahnya sama dengan arus yang ada pada rangkaian ataukah berlawanan arah?
- (d) Berapakah daya listrik yang harus disuplai sumber bagi rangkaian itu? Gunakan hasil yang didapat pada (d) dan bandingkan dengan hasil yang Anda dapat pada (b).

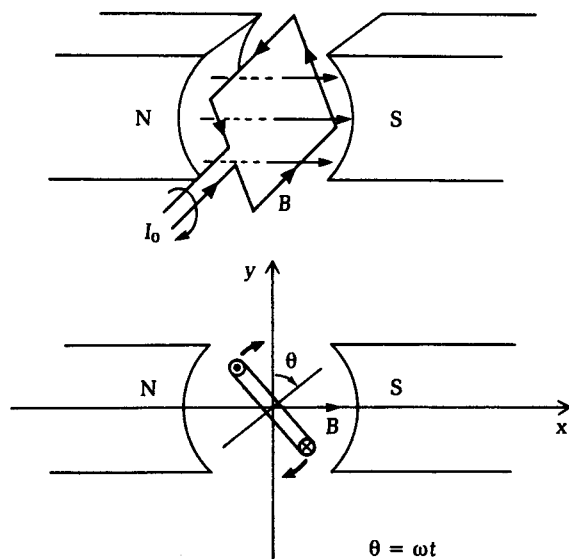
Gambar P16.17



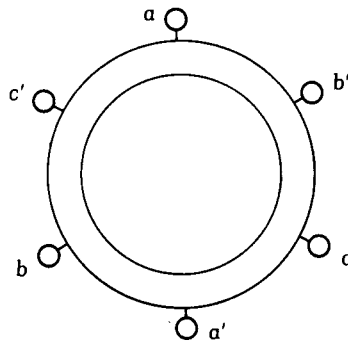
16.18 Sebuah koil yang membawa arus $DC I_0$ berputar dengan kecepatan angular ω dalam sebuah medan magnet konstan B , seperti ditunjukkan pada Gambar P16.18. Luas simpalnya adalah A .

- (a) Tentukan torsi pada koil sebagai fungsi waktu
- (b) Tentukan daya mekanis yang dihasilkan sebagai fungsi waktu
- (c) Tentukan fluks magnetik Ψ yang melewati koil sebagai fungsi waktu
- (d) Tentukan GGL yang diinduksikan pada koil. Anggap koil itu hanya terdiri dari satu lilitan
- (e) Tentukan daya listrik total yang diperlukan koil itu sebagai fungsi waktu. Tunjukkan bahwa energi selalu tetap setiap saat.

Gambar P16.18



- 16.19** Koil $a-a'$, $b-b'$, dan $c-c'$ yang diperlihatkan pada Gambar P16.19 dialiri oleh arus listrik tiga fase seperti pada Gambar (16.18). Jika I_a positif, maka arahnya akan menembus ke dalam bidang kertas pada titik a dan keluar pada titik a' . Begitu juga dengan arah arus listrik yang lainnya. Sketsa garis-garis fluks magnetnya pada saat $\omega t = 0$ dan $2\pi/3$, tentukan juga arah dan kecepatan medan magnet putarnya.



Gambar P16.19

- 16.20** Tunjukkan bahwa torsi mekanis yang dibutuhkan untuk memutar generator AC tidak konstan terhadap waktu atau tidak tetap, akan tetapi terdiri dari bagian yang konstan dan bagian yang bervariasi secara sinusoidal terhadap waktu dengan frekuensi angular 2ω . Berapakah rata-rata waktu dari torsi? Nyatakan torsi dalam luas belitan A , arus I , kerapatan fluks magnet B , dan sudut fase α antara tegangan dan arus. Plot T sebagai fungsi t dengan $\alpha = 0$.
- 16.21** Gambar 16.15 menggambarkan sebuah generator ac dengan lilitan tunggal yang diputar dalam suatu medan magnet konstan. Hal ini menunjukkan prinsip kerja dari generator ac fase tunggal. Sekarang perhatikan suatu generator ac tiga fase. Bagaimana cara anda mengatur secara fisik ketiga set koil sehingga dapat dihasilkan tegangan tiga fase? Untuk mengilustrasikan rancangan Anda, sketsa sebuah diagram seperti pada Gambar 16.15.
- 16.22** Berapakah torsi mekanis total yang dibutuhkan untuk memutar generator tiga fase yang anda rancang pada Soal 16.21? Nyatakan torsi ini sebagai fungsi waktu dalam parameter-parameter yang sesuai. Plot T sebagai fungsi waktu, dan bandingkan dengan yang dihasilkan pada Soal 16.20. Apakah kurva torsi mekanis yang seketika ini lebih “halus” (apakah nilai rata-rata waktunya berfluktuasi lebih sedikit) jika dibandingkan dengan kurva untuk generator fase tunggal?
- 16.23** Rancanglah sebuah konfigurasi koil yang mirip dengan Gambar 16.17. Rancanglah sedemikian rupa sehingga akan dihasilkan medan magnet putar pada celah udara di jangkar-stator, dan bahwa medan tersebut akan memiliki kecepatan putar $\omega/2$ ketika dialiri dengan arus listrik tiga fase seperti pada Gambar 16.18. Buktikan bahwa rancangan Anda benar dengan menggambar diagram arus sesaat yang mirip dengan Gambar 16.17.
- 16.24** Tunjukkan secara kualitas bahwa torsi yang dihasilkan pada suatu motor induksi dapat divariasikan dengan cara mengubah resistansi koil rotor. Gambar 16.21 menunjukkan kurva torsi versus v_r/v_s dengan konduktivitas yang berbeda-beda untuk ketiga rotornya. Bagaimanakah hubungan σ_1 , σ_2 , σ_3 ?
- 16.25** Berdasarkan motor sinkron yang ada pada Gambar 16.22, apakah yang akan terjadi jika sudut torsinya negatif—yaitu pada saat posisi momen magnetik rotor di depan medan magnet?

- 16.26** Perhatikan koil dari jalur magneplane pada Gambar 16.25. Dengan kecepatan 250 km/jam, berapakah seharusnya jarak ℓ_t (dalam meter)? Misalkan sumber daya yang diperlukan adalah tiga fase dengan frekuensi 60 Hz.
- 16.27** Tentukan tegangan yang diinduksikan pada suatu simpal bujursangkar pada Gambar 16.1 jika simpal tersebut berputar mengelilingi sebuah sumbu yang sejajar dengan sumbu z yang terletak pada $x = d + a/2$. Misalkan frekuensi angular rotasinya adalah ω dan panjang kawatnya tak berhingga dan dialiri arus listrik I ampere. Tunjukkan bahwa GGL yang terinduksi tidak benar-benar sinusoidal namun akan mendekati sinusoidal jika $d \gg a$.

LAMPIRAN

Lampiran A Simbol yang sering digunakan

Simbol	Kuantitas	Satuan	Bentuk singkat Satuan
\mathbf{A}	Potensial vektor	weber/meter	Wb/m
\AA	Satuan jarak atomik	1×10^{-10} meter	
B	Kerapatan fluks magnetik	tesla atau weber/meter ²	T Wb/m ²
b_0	Suseptansi (dinormalisasi)	tanpa dimensi	
C	Kapasitansi	farad	F
	Kapasitansi/panjang	farad/meter	F/m
D	Kerapatan fluks listrik	coulomb/meter ²	C/m ²
$D(\theta, \phi)$	Raihan arah antena	tanpa dimensi	
d_p	Kedalaman penetrasi gelombang elektromagnet dalam medium disipatif	meter	m
E	Besar muatan yang dibawa sebuah elektron	volt/meter	V/m
e	Kekuatan medan listrik	$1,602 \times 10^{-19}$ coulomb	
F	Gaya	newton	N
$F(\theta, \phi)$	Faktor matriks	tanpa dimensi	
f	Frekuensi	hertz	Hz
f_c	Frekuensi pemutus dari pemandu gelombang frekuensi siklotron	hertz hertz	Hz Hz
G	Konduktansi	mho atau siemens	mho atau S
H	Kuat medan magnetik	ampere/meter	A/m
I	Arus	ampere	A
J	Kerapatan arus listrik	ampere meter ²	A/m ²
J_s	Kerapatan arus listrik permukaan	ampere meter	A/m
j	Bilangan imajiner didefinisikan sebagai $j^2 = -1$	tanpa dimensi	
k	Bilangan gelombang	1/meter	1/m
\mathbf{k}	Bilangan gelombang vektor	1/meter	1/m
k_R	Bagian nyata dari k	1/meter	1/m
k_I	Bagian imajiner dari k	1/meter	1/m
L	Induktansi	henry	H
	Induktansi/panjang	henry/meter	H/m
ℓ	Jarak, panjang	meter	m
M	Kerapatan momen magnet	ampere/meter	A/m
M_{12}, M_{21}	Induktansi mutual	henry	H/m
m	Massa	kilogram	kg
\mathbf{m} atau m	Momen magnetik	ampere • meter ²	A • m ²
N	Jumlah elektron per volume plasma jumlah pembelitan elektron	1/meter ³ tanpa dimensi	1/m ³

Simbol	Kuantitas	Satuan	Bentuk singkat Satuan
\hat{n}	Satuan vektor tegak lurus dengan sebuah permukaan atau batas	tanpa dimensi	
P	Kerapatan momen dipol	coulomb/meter ²	C/m ²
p	Momen dipol	coulomb-meter	C-m
P_d	Daya/volume disipasi	watt/meter ³	W/m ³
Q	Muatan total pada sebuah kapasitor	coulomb	C
q	Muatan	coulomb	C
R	Resistansi (tahanan)	ohm	Ω
R_I	Koefisien pantul (polarisasi tegak lurus)	tanpa dimensi	
R_{II}	Koefisien pantul (polarisasi paralel)	tanpa dimensi	
r	Koordinat bola	meter	m
\mathbf{r}	Vektor posisi dari titik asal ke suatu titik	meter	m
\mathbf{r}_{12}	Vektor posisi dari titik 1 ke titik 2	meter	m
\mathbf{S}	Vektor poynting	watt/meter ²	W/m ²
$\langle S \rangle$	Vektor poynting waktu rata-rata	watt/meter ²	W/m ²
T	Periode dari sinyal waktu-harmonik,	sekon	s
	torque	newton-meter	N-m
t	Waktu	sekon	s
T_I	Koefisien transmisi (polarisasi tegak lurus)	tanpa dimensi	
T_{II}	Koefisien transmisi (polarisasi paralel)	tanpa dimensi	
U_E	Kerapatan energi listrik tersimpan	joule/meter ³	J/m ³
U_H	Kerapatan energi magnet tersimpan	joule/meter ³	J/m ³
V	Tegangan	volt	V
	Volume	meter ³	m ³
v	Kecepatan	meter/sekon	m/s
V_{Ab}	Beda tegangan ($V_A - V_B$)	volt	V
W	Kerja	Joule	J
x	Koordinat segi empat	meter	m
\hat{x}	Vektor satuan dalam arah x	tanpa dimensi	
y	Koordinat segi empat	meter	m
\hat{y}	Vektor satuan dalam arah y	tanpa dimensi	
$Y_n(z)$	Fungsi admitansi ternormalisasi	tanpa daya	
z''	Koordinat segi empat	meter	m
\hat{z}	Vektor satuan dalam arah z	tanpa dimensi	
Z_0	Impedansi karakteristik dari saluran transmisi	ohm	Ω
$Z(z)$	Fungsi impedansi dari saluran transmisi	ohm	Ω
Z_L	Impedansi beban	ohm	Ω
$Z_n(z)$	Fungsi impedansi ternormalisasi	tanpa dimensi	
Γ_L	Koefisien pantul pada suatu muatan	tanpa dimensi	
$\Gamma(z)$	Koefisien pantul umum	tanpa dimensi	
δ	kedalaman kulit	meter	m
$\tan \delta$	tangen hilang	tanpa dimensi	
ϵ	Permitivitas	farad/meter	F/m
ϵ_0	Permitivitas ruang bebas	$8,854 \times 10^{-12}$	F/m
ϵ_x	Permitivitas medium anisotropik untuk medan E dengan arah $-x$	farad/m	F/m
$\bar{\epsilon}$	Matriks permitivitas pada medium anisotropik		
ϵ'	Bagian nyata dari ϵ		

Simbol	Kuantitas	Satuan	Bentuk singkat Satuan
ε''	Bagian imajiner dari ε		
η	Impedansi intrinsik suatu medium	ohm	Ω
θ	Koordinat bola	radian	rad
θ_b	Sudut Brewster	radian	rad
θ_c	Sudut kritis	radian	rad
κ	Koefisien kopel	tanpa dimensi	
λ	Panjang gelombang	meter	m
λ_c	Panjang gelombang cutoff	meter	m
λ_g	Panjang gelombang penunjuk	meter	m
Λ	Kebocoran total fluks magnetik yang melalui periode loop N dari kumparan pada mesin berputar	weber	Wb
μ	permeabilitas	meter	m
μ_0	permeabilitas ruang bebas	henry/meter	H/m
μ_e	Mobilitas elektron	$4\pi \times 10^{-7}$	H/m
π	Konstanta	meter ² /sekon	m ² /s
ρ	Koordinat silinder	3,14159265 . . .	
ρ_s	Kerapatan muatan listrik permukaan	meter	m
ρ_v	Kerapatan muatan listrik volume	coulomb/meter ²	C/m ²
ρ_t	Kerapatan muatan listrik garis	coulomb/meter ³	C/m ³
ρ_r	Resistivitas	coulomb/meter	C/m
σ	Konduktivitas	ohm-meter	Ω -m
σ_{total}	Total penampang penghamburan	siemens/meter	S/m atau mho/m
$\sigma(\theta)$	Penampang penghamburan	atau mho/m	mho/m
$\sigma(\pi/2)$	Penampang penghamburan belakang	meter ²	m ²
Φ	Potensial skalar	meter ²	m ²
ϕ	Koordinat bola atau silinder	meter ²	m ²
	Sudut fasa sebuah bilangan kompleks	volt	V
χ_e	Suseptibilitas listrik	radian	rad
χ_m	Suseptibilitas magnetik	radian	rad
ψ	Sudut fasa inkremental antara elemen yang berdekatan dalam matriks seragam linier	tanpa dimensi	
Ψ	Kebocoran fluks magnetik melalui	tanpa dimensi	
ω	Frekuensi anguler	radian	rad
ω_c	Frekuensi anguler cutoff dari pemandu gelombang frekuensi siklotron anguler	weber	W/b
ω_p	Frekuensi plasma	radian/sekon	rad/s
Ω	ohm	radian/sekon	rad/s

Lampiran B Simbol Matematika

∇	Operator Gradien	$\langle \ \rangle$	rata-rata waktu
$\nabla \cdot$	Operator Divergen	\leftrightarrow	Ekivalen dengan
$\nabla \times$	Operator Curl	\equiv	Secara indentik sama dengan
∇_2	Operator Laplacian	\approx	Kira-kira sama dengan
\perp	Tegak lurus pada	$n!$	$n! = 1 \times 2 \times 3 \dots \times n$
\parallel	Sejajar dengan	$\text{Re} \{ \}$	bagian nyata dari kuantitas di dalam $\{ \}$
$*$	hubungan kompleks		

Lampiran C Awalan (Prefiks)

Awalan	Singkatan	Arti
Exa	E	10^{18}
Peta	P	10^{15}
Tera	T	10^{12}
Giga	G	10^9
Mega	M	10^6
Kilo	K	10^3
Hecto	H	10^2
Deka	da	10
Deci	d	10^{-1}
Centi	c	10^{-2}
Milli	m	10^{-3}
Micro	μ	10^{-6}
Nano	n	10^{-9}
Pico	p	10^{-12}
Femto	f	10^{-15}
Atto	a	10^{-18}
Pico	p	10^{-12}
Femto	f	10^{-15}
Atto	a	10^{-18}

CATATAN: Sebuah awalan ditulis langsung sebelum suatu satuan tanpa memakai titik. Misalnya, mm berarti milimeter, tetapi m • m berarti meter • meter atau m²

Lampiran D Konstanta Fisika

ϵ_0	Permitivitas ruang bebas	$8,8542 \times 10^{-12} \text{F/m}$ $\approx \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \text{F/m}$
μ_0	Permeabilitas ruang bebas	$4\pi \times 10^{-7} \text{H/m}$
c	Kecepatan cahaya dalam ruang hampa	$2,9979 \times 10^8 \text{m/s}$ $\approx 3 \times 10^8 \text{m/s}$
$-e$	muatan sebuah elektron	$-1,602 \times 10^{-19} \text{C}$
m_e	massa elektron dalam keadaan diam	$9,11 \times 10^{-31} \text{kg}$ $\approx 3,14159265$
π		

JAWABAN SOAL-SOAL NOMOR GANJIL

Bab 9 9.1 Eksak (a) $5,5302 \times 10^{-10}$ V (b) $5,54244 \times 10^{-12}$ V; Penghampiran:

(a) $5,5426 \times 10^{-10}$ V (b) $5,54256 \times 10^{-12}$ V 9.3 $\Phi(0, 0, 0) = 0$

9.5 $(-\hat{r}) \frac{1,44 \times 10^{-5}}{r^2}$ V/m 9.7 $E_y(0, 0, 0) = -2$ 9.9 Sketsa ditiadakan

9.11 (a) $\hat{\rho} \frac{\rho_\ell}{40\pi\epsilon h}$ (0,0499) V/m (b) $\hat{\rho} \frac{\rho_\ell}{40\pi\epsilon h}$ (0,05) V/m (c) 0,2% 9.13 (a) $\bar{E} = 0$

(b) $\bar{E} = \hat{x} \rho_s / \epsilon$ (c) $\bar{E} = 0$ 9.15 $\frac{10^{-6}}{\epsilon r^2} [2 - e^{-r} (r^2 + 2r + 2)]$

9.17 $\frac{10^{-6}}{\epsilon} (3e^{-1} - 1)$ Petunjuk $\int dr e^{-r} (1 + r)/r^2 = -e^{-r}/r$

9.19 3 V, tak tergantung dengan jalur 9.21 (a) $\frac{q}{4\pi\epsilon c}$ (b) $\frac{q}{4\pi\epsilon c}$ (c) $\frac{q}{4\pi\epsilon c} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)$

(d) $\frac{q}{4\pi\epsilon c} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)$ 9.23(a) $4,03 \times 10^{-6}$ C (b) 330 kV (c) 0,4 mA

Bab 10 10.1 $-\frac{4}{9}q$ 10.3 $1,8 \times 10^{-5}$ N (tarik menarik) (10.5) mencapai keping positif di

$x = 4,77$ cm 10.7 $a < 0,36$ mm atau $a > 26,3$ mm 10.9 $z = \pm 3,14$ cm

10.11(a) $v_0 = 1,874 \times 10^7$ m/s, $v_{0z} = 1,867 \times 10^7$ m/s, $v_{0x} = -0,163 \times 10^7$ m/s

(b) $x(t) = (8,78 \times 10^{14})t^2 - (0,163 \times 10^7)t$ m, $z(t) = 1,867 \times 10^7 t$ m

(c) $x = -3,52 \times 10^{-4}$ m, $z = 3 \times 10^{-2}$ m 10.13 Bukti ditiadakan

10.15 $5,3 \times 10^{-10}$ farad 10.17 (a) $\frac{A}{d} \left(\frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} \right)$ (b) $Q_1 = \frac{\epsilon_1 Q}{\epsilon_1 + \epsilon_2}$, $Q_2 = \frac{\epsilon_2 Q}{\epsilon_1 + \epsilon_2}$

10.19 $2\pi \left/ \left[\frac{1}{\epsilon_1} \ln(c/a) + \frac{1}{\epsilon_2} \ln(b/c) \right] \right.$ 10.21 $4,97 \times 10^{-6}$ J

10.23 (a) $Q^2 S/2A\epsilon_0$ (b) $-Q^2/2A\epsilon_0$ (tarik menarik)

Bab 11 11.1 $\Phi_3 = \Phi_1 + \Phi_2$ 11.3 $\Phi = [V_a \ln(b/\rho) + V_b \ln(\rho/a)] / \ln(b/a)$

$$11.5 \Phi(\theta) = V_0 \ln \left(\tan \frac{\theta}{2} \right) / \ln \left(\tan \frac{\theta_1}{2} \right), \rho_s = -V_0 \epsilon_0 / \left[r \ln \left(\tan \frac{\theta_1}{2} \right) \sin \theta_1 \right]$$

11.7 12,3 V 11.9 Sketsa ditiadakan 11.11 17,5 $\mu\mu\text{F/m}$ 11.13 $a \approx 2,9 \text{ cm}$

$$11.15 \frac{q}{4\pi\epsilon c} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{a}{dR_2} \right) + \frac{q(a/d) + q_0}{4\pi\epsilon r}, \text{ di mana } R_1 = (r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta)^{1/2},$$

$$R_2 = \left(r + \frac{a^4}{d^2} - 2\frac{ra^2}{d} \cos \theta \right)^{1/2} \quad 11.17 (\rho_r)^2 / [2\pi\epsilon(d-b)] \text{ di mana } d = a^2/b,$$

tarik menarik 11.19 $(d/a) q^2 / [4\pi\epsilon(d-b)^2]$, dimana $d = a^2/b$, tarik menarik

11.21 $200 \sin(2\pi x/a) \sinh(2\pi y/a) / \sinh(2\pi b/a)$

$$11.23 (400/\pi) \sum_{n=\text{ganjil}}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{ \frac{\sin(n\pi x/a) \sinh(n\pi y/a)}{\sinh(n\pi b/a)} + \frac{\sin(n\pi y/b) \sinh(n\pi x/b)}{\sinh(n\pi a/b)} \right\}$$

$$11.25 \text{ (a)} \left(\frac{V_0}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)} \right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) \text{ (b)} \left(\frac{V_0}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)} \right) \text{ (c)} D_{rl} = \frac{V_0 \epsilon_1}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) r^2} \text{ (d)} Q = \frac{2\pi V_0}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)} (\epsilon_1 + \epsilon_2)$$

$$D_{rl} \frac{V_0 \epsilon_2}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) r^2} \quad C = \frac{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)}$$

Bab 12 12.1 $R = 2d/[A(\sigma_1 + \sigma_2)]$ 12.3 (a) $I \ln(a/\rho)/(2\pi\sigma_1\ell)$ (b) $I \ln(a/b)/(2\pi\sigma_1\ell) + I \ln(b/\rho)/(2\pi\sigma_2\ell)$

$$\text{(c)} \frac{I}{2\pi\ell} \left[\frac{\ln(b/a)}{\sigma_1} + \frac{\ln(c/b)}{\sigma_2} \right] \quad 12.5 \ 0,92 \times 10^{-3} \text{ mho/m} \quad 12.7 \ 106 \text{ V}$$

$$12.9 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \right) \times 100\% \quad 12.11 \ 12,3 \ \Omega\text{-m} \quad 12.13 \text{ Sketsa ditiadakan}$$

$$12.15 \rho_a = 600 \left\{ \frac{1}{6} - \frac{50}{d[(y+6-r_0 y/d)^2 + (70-70r_0/d)^2]^{1/2}} + \frac{50}{d[(y+6)^2 + (70)^2]^{1/2}} \right\},$$

di mana $d = [(70)^2 + y^2]^{1/2}$, $r_0 = (50)^2 / [(70)^2 + y^2]^{1/2}$

Bab 13 13.1 $\hat{z} \ 2 \sqrt{2} I / (\pi b)$ 13.3 $\mathbf{H} = (-\hat{x}) J_y$ untuk $|y| < \frac{d}{2}$, $\mathbf{H} = (-\hat{x}) J(d/2)$ untuk $y > d/2$, $\mathbf{H} =$

$\hat{x} J(d/2)$ untuk $y < (-d/2)$ 13.5 $H_\phi = \rho$ untuk $0 < \rho < a$; $(2\rho^2 - a^2)/\rho$ untuk $a < \rho < b$; $(2b^2 - a^2)/\rho$ untuk $\rho > b$. 13.7 (a) $(-\hat{z}) I a (dy) / [4\pi(a^2 + y^2)^{3/2}]$ (b) $(-\hat{z}) I / (4\pi a)$ (c) 0 (d) $(-\hat{z}) I / (4\pi a)$ 13.9 $z_0 = \pm 0,27a$ 13.11 H_z di pusat adalah $9I / 4\pi a$ 13.13 2,8 MHz

13.15(a) $x = 0,04 \text{ m}$, $z = -0,00725 \text{ m}$ (b) $-20,5^\circ$ 13.17 $1,33 \times 10^{-3} \text{ N/m}$ (repulsif) 13.9 (a) Simpal harus ditempatkan secara horisontal atau secara vertikal di jurusan Timur-Barat

(b) $7,85 \times 10^{-3} \text{ N-m}$ (c) Vertikal dalam arah Utara-Selatan 13.21 (a) $H_\rho = \frac{I\rho}{2\pi a^2}$ (b) $U_H = \frac{\mu I^2}{16\pi}$

(c) $5 \cdot 10^{-8} \text{ H/m}$ **13.23** $2,74 \times 10^{-6} \text{ Joule/meter}$

$$\mathbf{13.25} \quad \frac{\mu_0}{2\pi} \left\{ \frac{1}{4} + \ln(b/a) + \frac{c^4 \ln(c/b)}{(c^2 - b^2)^2} - \frac{c^2}{c^2 - b^2} + \frac{c^2 + b^2}{4(c^2 - b^2)} \right\}$$

Bab 14 **14.1** Lukis **14.3** $0,21 \text{ weber/m}^2$, 100 A/m **14.5** $0,71 \text{ weber/m}^2$ **14.7** $x_3 y_1 = 1$, $x_3 y_2 = 0$, $x_3 y_3 = 1$, $x_3 y_4 = 0$, $x_1 y_2 = 1$, $x_2 y_2 = 1$, $x_4 y_2 = 1$ **14.9** (a) $1,10 \text{ mA}$ (b) $1,16 \text{ mA}$ **14.11** $8,32 \text{ A}$ **14.13** $0,29 \text{ weber/m}^2$

Bab 15 **15.1** $\mathbf{E}^{(0)} = 0$, $\mathbf{H}^{(0)} = -\hat{y} I_0 \cos(\omega t)/w$; $\mathbf{E}^{(1)} = -\hat{x} I_0 \omega \mu z \sin(\omega t)/w$, $\mathbf{H}^{(1)} = 0$; $\mathbf{E}^{(2)} = 0$, $\mathbf{H}^{(2)} = \hat{y} I_0 \omega^2 \epsilon \mu (\frac{1}{2}) z^2 \cos(\omega t)/w$; $\mathbf{E}^{(3)} = -\hat{x} I_0 \omega^3 \mu^2 \epsilon (\frac{1}{2})(\frac{1}{3}) z^3 \sin(\omega t)/w$; $\mathbf{H}^{(3)} = 0$ **15.3** $U_H^{(1)} = \frac{\mu}{2} \omega^2 \epsilon^2 V_0^2 \left(\frac{1}{a^2} \right) \sin(\omega t) \left(\frac{1}{3} \right) a w \ell^3$, $U_E^{(1)} = 0$ **15.5** $U_E^{(0)} = 0$, $U_H^{(0)} = \frac{\mu}{2} \frac{I_0^2}{w^2} \cos^2(\omega t)(w a \ell)$
15.7 $E_p^{(0)} = V_0 \cos(\omega t)/[\rho \ln(b/a)]$, $I^{(0)} = 2\pi V_0 \sigma \ell \cos(\omega t)/\ln(b/a)$, $Q^{(0)} = 2\pi V_0 \epsilon \ell \cos(\omega t)/\ln(b/a)$, $I^{(1)} = -2\pi V_0 \epsilon \ell \sin(\omega t)/\ln(b/a)$ **15.9** $11,1 \text{ s}$
15.11 $G_1 = \sigma_1 A/d_1$; $G_2 = \sigma_2 A/d_2$; $C_1 = \epsilon_1 A/d_1$; $C_2 = \epsilon_2 A/d_2$; G_1 dan C_1 dalam keadaan paralel lalu seri dengan G_2 dan C_2 paralel $Z = 1/(G_1 + j\omega C_1) + 1/(G_2 + j\omega C_2)$

Bab 16 **16.1** 101 A **16.3** $V_1 = 0,25 \text{ V}$, $V_2 = -0,15 \text{ V}$, $V_3 = -0,25 \text{ V}$ **16.5**(a) $0,125 \text{ mA}$ (searah jarum) (b) $V_1 = -0,25 \text{ V}$; $V_2 = 0,625 \text{ V}$ **16.7** $58,9 \text{ mV}$ **16.9** $0,395 \times 10^{-3} \text{ N}$
16.11(a) 6 A (b) $5,91 \text{ A}$ **16.13** (a) 20 A (b) $330 \cos(120\pi t)$ (c) $19,78 \text{ A}$ (d) $1,08 \text{ W}$
16.15 $0,16 \text{ mW}$ **16.17**(a) $\bar{T} = 0,156 \hat{y}$ (b) $P_m = 19,59 \text{ W}$ (c) $\text{EMF} = -1,959 \text{ V}$
 (d) $P_e = 19,59 \text{ W}$ **16.19** Laju = dalam arah putaran berlawanan jarum-jam **16.21** Sketsa ditiadakan **16.23** Sketsa ditiadakan **16.25** Maka ia menjadi generator

$$\mathbf{16.27} \quad V = \frac{U \ell b}{2} \frac{a \omega \left(d + \frac{a}{2} \right)}{\left(d + \frac{a}{2} \right)^2 - \left(\frac{a}{2} \cos \omega t \right)^2} \sin \omega t$$

DAFTAR PUSTAKA

- Crawford, Jr., F.S. *Waves*. New York: McGraw-Hill, 1965.
- Feynman, R.P., Leighton, R.O., dan Sands, M. *Lectures on Physics*, vol. 2. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1964.
- King, R.W.P. *Fundamental Electromagnetic Theory*. New York: Dover, 1963.
- Kong, J.A. *Theory of Electromagnetic Waves*. New York: Wiley, 1975.
- Lorrain, P., dan Corson, D.R. *Electromagnetism*. San Fransisco: W.H. Freeman, 1978.
- Paris, D.T., dan Hurd, F.K. *Basic Electromagnetic Theory*. New York: McGraw-Hill, 1969.
- Popovic, B.D. *Introductory Engineering Electromagnetics*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1971.
- Purcell, E.M. *Electricity and Magnetism*. New York: McGraw-Hill, 1963.
- Ramo, S., Whinnery, J.R., dan Van Duzer, T. *Fields and Waves in Communication Electronics*. New York: Wiley, 1965.
- Seshadri, S.R. *Fundamentals of Transmission Lines and Electromagnetic Fields*. Reading, Mass.: Addison Wesley, 1971.
- Towne, D.H. *Wave Phenomena*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1967.

Indeks

Armatu r 158
Arus eddy 225
Atom hidrogen 3

Batasan Elektrokuasistatik dari Saluran Transmisi 203
Batasan Magnetokuasistatik dari Saluran Transmisi 202
Metode bayangan untuk muatan garis di dekat silinder konduktor 93
Metode bayangan untuk muatan panjang takterhingga di dekat silinder konduktor 91
Betatron 232

Cakra Faraday 219
Cat Semprot Elektrostatik 46
Charles Coulomb 37
CRT 50

D.W. Kerst 232
Daya Poynting dalam Elektrokuasistatika 207
Dioda tabung hampa 81
Dipol elektrostatik 5, 9

Efek Hall 153
Efek Medan Magnetik Bumi pada Layar CRT* 155
Elektroforesis 72
Elektrokuasistatika Rangkaian 200
Elektron Volt 50
Energi Listrik Tersimpan dalam Sistem Muatan Kontinu 58
Energi Listrik Tersimpan dalam Sebuah Sistem Dua-Muatan 57
Energi Listrik Tersimpan dalam Sebuah Sistem N-Muatan 57
Energi magnetik tersimpan 159
Energi magnetik tersimpan dalam solenoid 159
Energi Magnetik Tersimpan dan Induktansi 159
Energi magnetik yang disimpan untuk toroid tipis 160
Energi Tersimpan dalam sebuah Kapasitor 63

Filter Elektrostatik 45
Fluks linkage 160
Frekuensi siklotron 150

Gaya gerak listrik 212
Gaya gravitasi 37
Gaya Listrik 36
Gaya Magnetik dan Torsi 148
Gaya magnetik pada elemen pembawa arus 149
Gaya magnetik pada muatan yang bergerak 148
Gaya magnetik total pada simpul 155
Gaya pada Bahan Dielektrik 68
Gaya pada Kumparan 219
Generasi kutub sejenis 219

Generator AC 235
Generator homopolar 223, 234
Generator Van de Graaff 29
Gerakan Partikel Bermuatan dalam Medan E Yang Seragam 39
GGL Induksi pada Kawat Bergerak 216

Hukum Ampere, bentuk integral 134
Hukum Biot-Savart 142
Hukum Biot-Savart dan prinsip superposisi 144
Hukum Child-Langmuir 81
Hukum Coulomb 37
Hukum Faraday 211
Hukum Gauss 12
Hukum Gaya Lorentz 36
Hukum Lenz 213
Hukum magnetik Gauss 134
Hukum tegangan Kirchhoff 27

Induksi Faraday dalam alat memori magnetik 218
Induktansi 160
Induktansi bersama 161
Induktansi bersama antara 2 buah induktor solenoid 162
Induktansi dari induktor toroid 162
Induktansi pada induktor solenoid 162
Induktansi Saluran Koaksial 164
Integral Poisson 2

Kabel Koaksial Dengan Lapisan Isolasi Majemuk 65
Kapasitansi 60
Kapasitor Bola 61
Kapasitor keping 68
Kapasitor Keping Sejajar 60
Kapasitor Silinder-Koaksial 62
Kegagalan Dielektrik 64
Kerja 48
Koefisien Kopling 164
Koil Helmholtz 167
Koil jangkar 237
Komutator 158
Konversi Energi oleh Motor DC 236
Korona Listrik 43
Kuat Medan Listrik Kegagalan 65

Magneplane 244
Medan dalam suatu keping sejajar 21
Medan E Akibat Sebuah Muatan Garis 8
Medan elektrokuasistatik 196
Medan Elektrokuasistatik dari suatu Dipol 203
Medan elektrostatik untuk sistem bvola-dan-kulit konsentris 18
Medan Kuasistatik dalam Daerah Keping Sejajar 198
Medan listrik akibat Saluran Tenaga Listrik 99

- Medan listrik akibat sebuah muatan bidang 15
- Medan listrik akibat sebuah muatan garis 10, 14
- Medan listrik akibat sebuah muatan titik 7
- Medan listrik antara keping sejajar 21
- Medan listrik dari konduktor bola di dalam kulit konduktor bola 17
- Medan listrik dalam sistem silindris 18
- Medan listrik pada permukaan dalam dari sebuah konduktor berlubang yang kosong 28
- Medan Magnet Putar 237
- Medan Magnetik akibat Saluran Daya 145
- Medan Magnetik pada Koil Toroid 141
- Medan magnetostatik 134
- Medan magnetostatik akibat arus dalam kawat panjang takhingga 136
- Medan Magnetostatik Akibat Arus Garis 135
- Medan Magnetostatik Akibat Arus pada Saluran Koaksial 136
- Medan Magnetostatik Akibat Keping Arus 137
- Menyelesaikan permasalahan keping sejajar dengan persamaan diferensial 78
- Metode bayangan 86
- Metode pemisahan variabel 102
- Mikrofon Kondensor 205
- Model Atom Bohr 38
- Model Atom Thomson 37
- Momen dipol 6
- Momen magnetik dari simpal arus 158
- Motor DC 158
- Motor Induksi 239
- Motor Sinkron 242
- Muatan dan E_r dalam saluran koaksial 18
- Muatan ruang 81
- Muatan titik di dekat sebuah bidang konduktor 87
- Muatan Titik di Dekat suatu Antarmuka Dielektrik 96
- Muatan Titik di Dekat suatu Bola Konduktor 95

- Nuclear logging sonde 30

- Pandangan melintang sederhana dari suatu mikrofon kondensor 205
- Parameter yang sesuai dengan siklotron 152
- Partikel bermuatan pada medan magnetik seragam 149
- Pelayangan magnetik 244
- Pelepasan korona 43
- Pemanasan Induksi 224
- Pembelokan Magnetik dari Berkas Elektron 153
- Pemisah isotop elektromagnetik 151
- Pemisahan Elektrostatik 41
- Pemisahan Isotop 150
- Penangkal petir 25

- Pendekatan Kuasistatik 196
- Pendorong Ion 52
- Penyelesaian permasalahan elektrostatik dengan hukum Gauss dan persamaan Laplace 80
- Permukaan ekipotensial 3
- Permukaan Perekat Elektrostatik 71
- Persamaan Laplace 78
- Persamaan orde nol 196
- Persamaan Poisson 2, 78
- Potensial Akibat Dipol Elektrostatik 5
- Potensial Akibat N Muatan Titik 4
- Potensial dari Konduktor Sempurna 23
- Potensial dari Medan Integral 22
- Potensial medan listrik dalam koordinat silinder 23
- Potensial dari Muatan Titik 2
- Potensial Elektrostatik 1
- Potensial elektrostatik di dalam kotak logam persegi panjang 106
- Printer Laser 47
- Printer Tinta (Ink Jet) 55

- Rail Gun 221
- Rangkaian ekuivalen untuk keping sejajar 204
- Rotor 237
- Rugi Arus Eddy pada Transformator 229
- Rugi Histeresis 229

- Sebuah Muatan Titik di Dekat suatu Antarmuka Dielektrik 96
- Siklotron 151
- Sinkrotron 234
- Stator 237
- Sudut torsi 243

- Tabung korona 44
- Tabung Sinar Katoda 50
- Tegangan Hall 153
- Tegangan induksi dalam simpal dengan medan B tergantung waktu 217
- Tegangan induksi pada kawat bergerak 217
- Tegangan Induktor 216
- Teorema Keunikan 83
- Teorema Stokes 26
- Teori rangkaian 200
- Torsi Magnetik 156
- Torsi maksimum 244
- Torsi pada simpal arus 158
- Triboelektrisitas 31

- Xerografi 46