مدونة ملحوظة

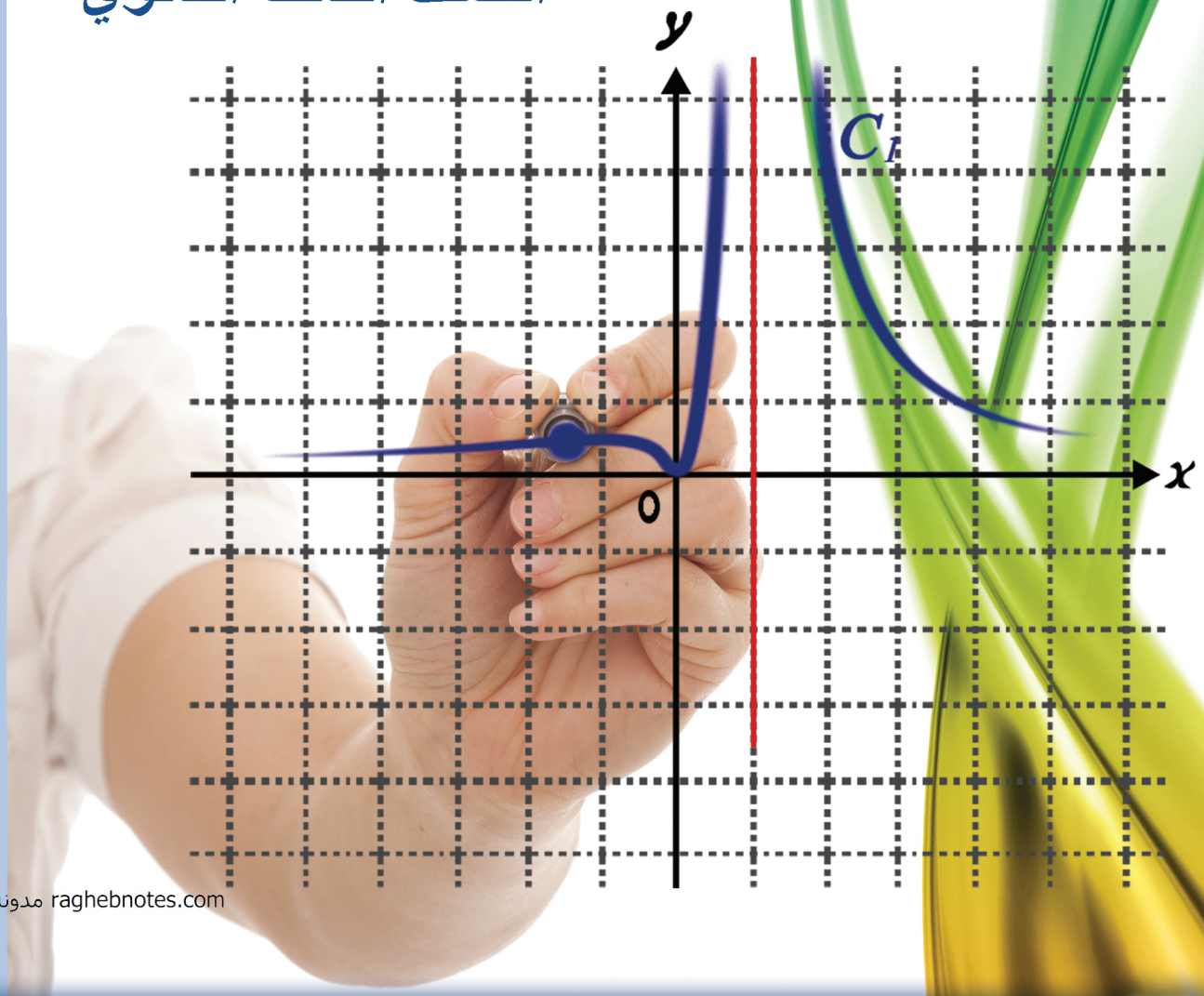
الجمهوريّة العربيّة السّوريّة
وزارة التّربيـة

الرياضيات

التحليل الرياضي

كتاب الطالب

الصف الثالث الثانوي



مدونة ملحوظة raghebnotes.com

٢٠١٢ - ٢٠١٣م
١٤٣٣ هـ

الجُمْهوريَّة العَربيَّة السُّوريَّة

وزارة التّربيـة

مدوّنة ملحوظة

الرّياضيّات

التحليل الرّياضي

كتاب الطالب

الثالث الثّانوي العلمي

المؤسَّسة العامة للطباعة

2012–2013 م

1433 هـ

مدوّنة ملحوظة

طُبِع أوّل مرّة للعام الدراسي 2012–2013 م

حقوقُ التأليف والنشر محفوظة

لوزارة التّربية في الجمهوريّة العربيّة السوريّة

أشرفت على تأليف هذا الكتاب اللجنة التوجيهية العليا المشكلة بالقرار الوزاري رقم 943/2053 تاريخ 2010/4/1.

مدوّنة ملحوظة

أشرفت على تأليف هذا الكتاب اللجنة التوجيهيّة العليا المشكَّلة
بالقرار الوزاريّ رقم 943/2053 تاريخ 2010/4/1

منسقا الصف

مروان بركة ميكائيل الحمود

المؤلّفون

إبراهيم سعده مأمون حاج قاسم
أحمد مريم مروان بركة
د. إسماعيل حمدان ميكائيل الحمود
خلدون الشماع نضال تفاحة
عدنان المحاسنة هايل فاعور
عيسى عثمان وفاء حمشو
وليد الحوش

وردت الأسماء حسب الترتيب الهجائي

المقوّمون

د. فرح سليمان المطلق د. عمران قوبا
د. عبد اللطيف هنانو د. إيلي قدسي
د. منير الشحف بسام بركات
غدير اندراوس صالح قرقوط
غياث الياس حسن أنيس

التدقيق اللغوي

جمال أبو سمرة ، رداح عسكور

تصميم الغلاف

م. عزّت تلجة ، زياد بيطار

التنضيد الطباعي وتنفيذ الرسوم والتنسيق الفني

خليل أشقر ، زياد بيطار ، عصام علي

الإخراج الفنيّ

فراس الحوش

الإشراف الفنيّ

م. عزّت تلجة
م. عماد الدين برما

مدوّنة ملحوظة

مقدمة:

قامت وزارة التربية في الجمهورية العربية السورية بمشروع وطني لتطوير المناهج وبنائها على أساس مفهوم جديد يُسمّى المستوياتِ التربوية والمعايير الوطنية بما ينسجم مع التطور المتسارع في ميادين المعرفة ، وذلك بغية تطوير التعليم والتميّز في التحصيل العلمي.

ولقد تمّ تأليف هذا الكتاب (التحليل الرياضي للصف الثالث الثانوي العلمي) اعتماداً على هذه المعايير وانسجاماً مع منهاج الرياضيات في الصفين الأول الثانوي والثاني الثانوي العلمي ومع الأهداف العامّة لتدريس الرياضيات،

وقد راعى الكتاب تنمية الفكر التّحليلي والتركيبي لدى الطالب وتنمية مهارات التفكير العليا من خلال اعتماد الترابط المنطقي للمفاهيم والبراهين والتبسيط قدر الإمكان، والتدرّج في عرض الأفكار النظرية ودعمها بالأمثلة والأنشطة والتدريبات والتمرينات المتنوعة والشاملة.

ويهدف الكتاب إلى تنمية قدرات الطلاب الذهنية والعملية على حل المسائل باستخدام التفكير الناقد من خلال الفهم والاستيعاب وصياغة الفرضيات واعتماد المسلمات في الوصول إلى النتائج وتقويمها واتخاذ القرارات المناسبة.

وراعـــى الكتاب أيضاً أن يكون الطالب هو المحور الأساسي في عملية التعلم، وربط الحقائق والمفاهيم التي يدرسها بحياته اليومية وبالعلوم الأخرى ما أمكن.

لقد تمّتِ الاستفادة من برامج الحاسوب المختلفة في إنشاء الرّسوم والمخطّطات والخطوط البيانية والصور في هذا الكتاب، ومن هذه البرامج (Google SketchUp – Cabri 3D – GEOPLANW 7 – Mathematica 7.0 – MathType).

نأمل من زملائنا المدرسين أن يزودونا بملاحظاتهم الميدانية ومقترحاتهم البنّاءة، متعاونين معاً لتطوير الكتاب المدرسي باستمرار، ومسهمين جميعاً في خدمة الوطن الغالي من أجل تقدّمه وازدهاره.

المؤلفون

الفهرس

المقدمة 4

الفهرس 5

الوحدة الأولى: حساب التفاضل وتطبيقاته

النهايات 8

1-1-1 نهاية دالة f معرّفة في جوار a عندما تسعى x إلى a حيث $a\in\mathbb{R}$ أو $a=+\infty$ أو $a=-\infty$

1-1-2 مبرهنة الإحاطة (الدالة المحصورة).

1-1-3 حالات عدم التعيين.

1-1-4 دراسة حالات عدم التعيين عند البحث عن نهاية دالة عدديّة.

الاستمرار 30

1-2-1 دراسة الاستمرار عند $x=a$.

الاشتقاق 34

1-3-1 مفهوم الدالة المشتقة.

1-3-2 توظيف تعريف المشتق في برهان بعض المبرهنات.

1-3-3 مبرهنات الاشتقاق.

الدالّة المشتقّة لمركّب دالتين عدديّتين (قاعدة السلسلة) 40

1-4-1 قاعدة مشتقّ قوةِ دالّةٍ عدديّة.

1-4-2 قاعدة اشتقاق الدوالّ المثلثيّة الأساسيّة للقياس غير الثابت $g(x)$.

1-4-3 قاعدة مشتق دالة أسيّة من الشكل $f(x)=e^{g(x)}$.

1-4-4 قاعدة اشتقاق دالة لوغاريتمية من الشكل $f(x)=\ln(g(x))$.

تطبيقات الاشتقاق في اشتقاق دوالّ عدديّة متنوّعة 48

1-5-1 المشتقّات المتتالية لدالة عددية.

1-5-2 تماس خطين بيانيّين

1-5-3 توظيف الاشتقاق في براهين العلاقات

توظيف المشتقات في دراسة تغيرات دالة عددية 58

1-6-1 اطراد دالة عددية.

1-6-2 دراسة تغيرات دالة عددية.

القيم الكبرى والقيم الصغرى محليّاً 64

1-7-1 تعريف القيم الكبرى والقيم الصغرى محلياً

1-7-2 إثبات أن $f(x_0)$ هي قيمة كبرى محلياً أو قيمة صغرى محلياً باستخدام التعريف.

1-7-3 مبرهنات القيمة الكبرى محلياً والصغرى محلياً.

تطبيقات القيم الكبرى والصغرى 70

1-8-1 خطوات حل مسألة تتضمن تطبيقاتِ القيم الكبرى والصغرى لدالة عددية بطرائق مختلفة.

الوحدة الثانية: حساب التكامل

التكامل غير المحدد 84

2-1-1 مفهوم التكامل غير المحدد

2-1-2 الخواص الأساسية للتكامل غير المحدد

2-1-3 قواعد التكامل غير المحدد لبعض الدوال الشهيرة

2-1-4 المنحني التكاملي – ايجاد ثابت التكامل

التكامل بالتجزئة–التكامل بالتعويض 94

2-2-1 طريقة تغيير المتحول في التكامل غير المحدد

2-2-2 طريقة التكامل بالتجزئة

2-2-3 حساب التكاملات بطريقة التكامل بالتجزئة

تكاملات الكسور الجزئية 100

2-3-1 تفريق كسر بسيط (فعلي) إلى مجموع كسور جزئية.

2-3-2 تكامل دالة كسرية اعتماداً على الكسور الجزئية.

التكامل المحدد 108

2-4-1 تقدير قيمة التكامل المحدد باستعمال المجاميع المنتهية

2-4-2 إيجاد التكامل المحدد

2-4-3 النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل والربط بين التكاملات المحددة والمشتقات المقابلة

2-4-4 التكامل المحدد بالتجزئة

تطبيقات التكامل 116

2-5-1 حساب مساحة سطح مستوٍ

2-5-2 حساب حجم مجسم دوراني

2-5-3 حساب طول منحنٍ أملس

2-5-4 تطبيق التكامل في العلوم

المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية على الأكثر 126

2-6-1 تعريف المعادلة التفاضلية الخطية والتعرف بالشكل العام للمعادلة التفاضلية

2-6-2 مرتبة المعادلة التفاضلية

2-6-3 حلّ معادلة تفاضلية

2-6-4 تشكيل معادلة تفاضلية

2-6-5 نماذج من معادلات تفاضلية بسيطة وتطبيقات حياتية

الدوال العددية ورسم خطوطها البيانية

المستقيمات المقاربة 136

3-1-1 المستقيم المقارب الموازي لأحد المحورين الإحداثيين.

3-1-2 المستقيم المقارب المائل.

3-1-3 الوضع النسبي للخط البياني لدالة مع مستقيم مقارب لها.

الدوالّ الكسرية 144

التمثيل البياني لنماذجَ من دوالّ مركبة 160

3-3-1 التمثيل البياني لنماذجَ من دوال المركبة

تمرينات عامة 176

I حساب التفاضل و تطبيقاته

- النهايات
- الاستمرار
- الاشتقاق
- الدالة المشتقة لمركب دالتين عدديتين
- تطبيقات الاشتقاق في اشتقاق دوال عدديّة متنوعة
- توظيف المشتقات في دراسة تغيرات دالة عددية
- القيم الكبرى و القيم الصغرى محلياً
- تطبيقات القيم الكبرى و الصغرى

النهايات

1.1

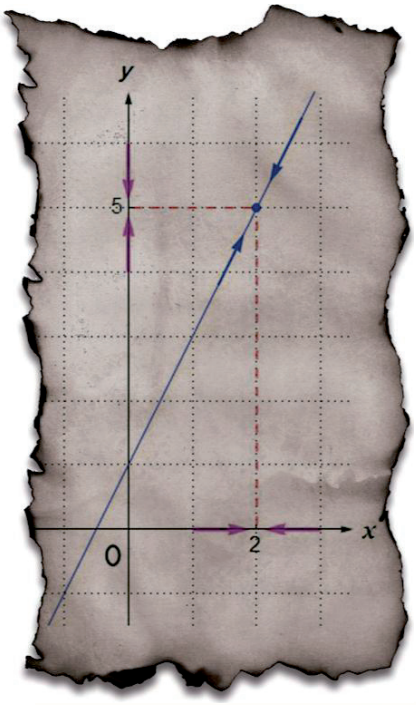
سوف تتعلّم

1-1-1 نهاية دالة f معرّفة في جوار a عندما تسعى x إلى a حيث $a \in \mathbb{R}$ أو $a = +\infty$ أو $a = -\infty$

2-1-1 مبرهنة الإحاطة (الدالة المحصورة).

3-1-1 حالات عدم التعيين.

4-1-1 دراسة حالات عدم التعيين عند البحث عن نهاية دالة عدديّة.



1.1.1 نهاية دالة f معرّفة في جوار a عندما تسعى x إلى a حيث $a \in \mathbb{R}$ أو $a = +\infty$ أو $a = -\infty$

عرض تمهيدي: يُعدّ مفهوم النهاية من المفاهيم الأساسيّة في الرياضيات وعلى وجه الخصوص في التحليل الرياضي والهندسة

فالمسألتان المحوريّتان في حساب التفاضل والتكامل المتمثّلتان في إيجاد المماس للخط البياني لدالة ما، عند نقطة من خطها البياني، ومسألة إيجاد مساحة السطح الواقع تحت الخط البياني لدالة مـا، تتركّزان حول مفهوم النهاية.

في مسألة النهايات نهتمّ بالقيم التي تأخذها الدالة $x \mapsto f(x)$ المعرّفة في جوار a عندما تكون x قريبة من a، من دون أن تساويها، أي أنّنا بصدد الإجابة عن التساؤل الآتي:

عندما تقترب x قرباً كافياً من a من دون أن تساويها فهل تقترب القيم $f(x)$ من عدد ما ℓ؟

وجدنا في الصف الثاني الثانوي العلمي، أنه إذا تحقّق ذلك نقول: إنّ العدد ℓ هو نهاية الدالة f عند a

ونرمز إلى ذلك كما يأتي : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

تذكرة

- إذا كان x_0 و ℓ عددين حقيقيين، قلنا: إنّ $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$, إذا وفقط إذا كان بالإمكان جعلُ الفرق بين $f(x)$ و ℓ قريباً جداً من الصفر, وذلك بجعل المتغير x يأخذ قيماً قريبةً من x_0 من دون أن تساويها.
- وجود نهاية للدالة f عند a لا يعتمد على كون الدالة معرّفةً عند a أو غير معرفة عندها, بل يُشترط كونها معرّفةً في جوار محذوف لـ a .

1) مبرهنات في النهايات

لتكن الدالتان f و g المعرفتان على $D\subseteq\mathbb{R}$ و لتكن λ و L و M أعدداً حقيقية. نفترض أنّ $\lim_{x\to a} g(x)=L$, $\lim_{x\to a} f(x)=M$. عندئذ تتحقق الخواص الآتيـة:

1] $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)=M+L.$

" يمكن تعميمُ هذه المبرهنة على مجموع عدد منتهٍ من الدوال "

2] $\lim_{x\to a}[\lambda\cdot f(x)]=\lambda\cdot\lim_{x\to a} f(x)=\lambda\cdot M \qquad :\lambda\in\mathbb{R}$

3] $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)=M-L$

4] $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)=M\cdot L$

" يمكن تعميمُ هذه المبرهنة على جداء عدد منتهٍ من الدوال "

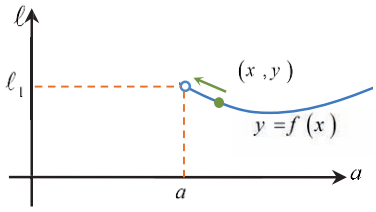
5] $\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{g(x)}\right)=\frac{1}{\lim_{x\to a} g(x)}=\frac{1}{L}. \qquad (L\neq 0)$

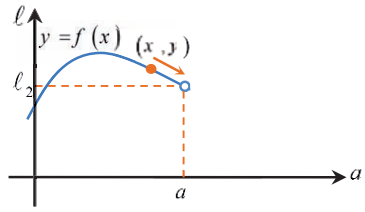
6] $\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}=\frac{M}{L}. \qquad (L\neq 0)$

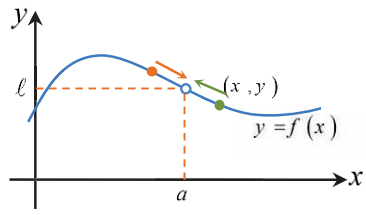
7] $\lim_{x\to a}[f(x)]^n=\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n=M^n. \qquad (n\in\mathbb{N}^*)$

8] $\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\lim_{x\to a} f(x)}=\sqrt{M}. \qquad (M\geq 0,\ f\geq 0)$

2) **نهاية دالّة عدديّة من اليمين عند x_0 ومن اليسار عند x_0:**







$$\lim_{x \xrightarrow{>} a} f(x) = \ell_1 \quad (1) \qquad \lim_{x \xrightarrow{<} a} f(x) = \ell_2 \quad (2) \qquad \lim_{x \to a} f(x) = \ell_1 \quad (3)$$

إذا كان للدالة f نهاية ℓ_1 من اليمين عند a، ونهاية ℓ_2 من اليسار عند a, وكانت هاتان النهايتان متساويتين كان للدالة f نهايةٌ عند a تساوي القيمة المشتركة $\ell_1 = \ell_2$ ونكتب $\lim_{x \to a} f(x) = \ell_1$.

ملاحظة:

1) إذا كانت $\ell_1 \neq \ell_2$ لا يكون للدالة f نهاية عند a.

2) تبقى المبرهنات السابقة صحيحة مع استبدال $x \xrightarrow{>} a$ أو $x \xrightarrow{<} a$ بـ $x \longrightarrow a$.

3) إذا كانت $P(x)$ كثيرة حدود فإنّه: أيّاً كانت $a \in \mathbb{R}$ فلدينا $\lim_{x \to a} P(x) = P(a)$

4) إذا كانت $f(x)$ دالة كسريّة حدوديّة و $a \in D_f$ فإنّ $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

مثال

1 احسب $\lim_{x \to 2} \dfrac{3x^2 + 5x - 6}{x^4 + x^2 + 1}$

الحل: لمّا كان العدد 2 ينتمي إلى $D_f = \mathbb{R}$ كان $\lim_{x \to 2} f(x) = \dfrac{3(2)^2 + 5(2) - 6}{(2)^4 + (2)^2 + 1} = \dfrac{16}{21}$

2 $\lim_{x \to -3} \sqrt[3]{3x^3 - 2x + 11} = \sqrt[3]{3(-3)^3 - 2(-3) + 11} = \sqrt[3]{-64} = -4$

تعريف دالة الجذور: نسمّي الدالة $x \to f(x) = \sqrt[n]{x}$ حيثُ $(n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\})$ دالّة الجذر من المرتبة n.

1) فإذا كان n عدداً زوجياً كانت الدالة $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[: x \mapsto \sqrt[n]{x}$ مستمرّةً على مجموعة تعريفها.

2) إذا كان n عدداً فردياً كانت $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt[n]{x}$ مستمرّة على $\mathbb{R}$. ومنه الخواص الآتية :

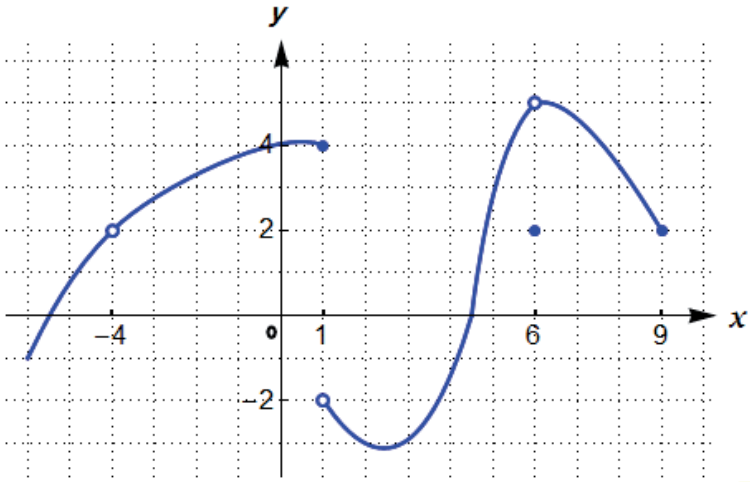
إذا كان $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ فإنّ

$$[1] \quad \lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\ell} \quad : n = 3, 5, 7, \ldots$$

$$[2] \quad \lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\ell} \quad : n = 2, 4, 6, \ldots \quad , (\ell \geq 0)$$

نشاط (1)

في الشكل الآتي ليكن C منحني الدالة f املأ الفراغ بما يناسبه فيما يأتي:



الحل

[1] $f(1)=.....$

[2] $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x)=.....$

[3] $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)=.....$

[4] هل للدالة f نهاية عند $x=1$

[5] $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -4} f(x)=.....$

[6] $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -4} f(x)=.....$

[7] $\lim\limits_{x \longrightarrow -4} f(x)=.....$

[8] $f(6)=.....$

[9] $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 6} f(x)=.....$

[10] $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 6} f(x)=.....$

[11] $\lim\limits_{x \longrightarrow 6} f(x)=.....$

نشاط (2)

لتكن الدالة f : $f(x)=\dfrac{x-3}{|x-3|}$

1) أوجد D_f.

2) اكتب f بالصيغة $f(x)=\begin{cases} ..... & : x>..... \\ ..... & : x<..... \end{cases}$

3) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 3} f(x)=.....$

4) $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 3} f(x)=.....$

5) هل للدالة f نهاية عند 3 ؟ علّل إجابتك ؟

6) ارسمِ الخطّ البيانيّ لهذه الدالة، وتحقّق من صحّة النتائج بيانيّاً.

تدريب

ابحث عن نهاية كلّ دالّة مما يأتي عند a الموافقة:

1 $f(x)=\sqrt[3]{x^2-5x+3}$ (عند $a=1$)

2 $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-2x+1}{1-2x}}$ (عند $a=-2$)

3 $f(x)$: $f(x)=\begin{cases} x+2 & : x\neq 1 \\ 2 & : x=1 \end{cases}$ (عند $a=1$)

3) النهايات عند اللانهاية :

- لتكن f دالّة معرّفة في جوار لـ $+\infty$، إذا كانت f تسعى إلى عدد حقيقي ℓ، عندما تسعى x إلى $+\infty$، عندئذٍ نقول إنّ للدالّة f نهاية عند $+\infty$ تساوي ℓ، ونُرمِّز لذلك بـ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$.
- لتكن f دالّة معرّفة في جوار لـ $-\infty$، إذا كانت f تسعى إلى عدد حقيقي ℓ، عندما تسعى x إلى $-\infty$، عندئذٍ نقول إنّ للدالّة f نهايةً عند $-\infty$ تساوي ℓ، ونرمِّز لذلك بـ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$.
- إذا كان $k\neq 0$ وكان n عدداً صحيحاً موجباً تماماً، نقبل أنّ:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{k}{x^n}=0 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{k}{x^n}=0$$

مثال

لتكنِ الدالّة f المعرّفة على $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ وفق $f(x)=\dfrac{2}{x-2}$ أوجد نهايتها عند $+\infty$ وكذلك عند $-\infty$

الحل: نكتب في حالة x من $\mathbb{R}\setminus\{0,2\}$: $f(x)=\dfrac{3}{x(1-\frac{2}{x})}=\dfrac{3}{x}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{2}{x}}$ فيكون

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0\cdot 1=0 \text{ و } \lim_{x\to-\infty} f(x)=0\cdot 1=0$$

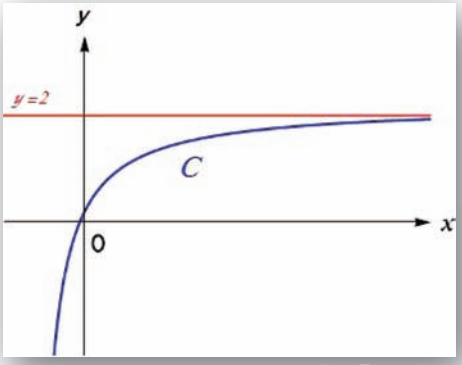
مثال

لتكن الدالّة f المعرّفة على $]0,+\infty[$ وفق $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{x}+1}$، أوجد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

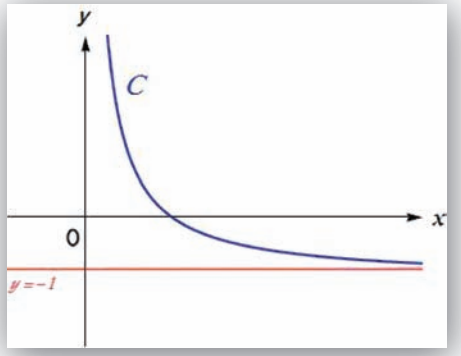
الحل: نكتبُ f بالصيغة: $f(x)=\dfrac{\frac{3}{\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}$ فنستنتج أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

نشاط 1

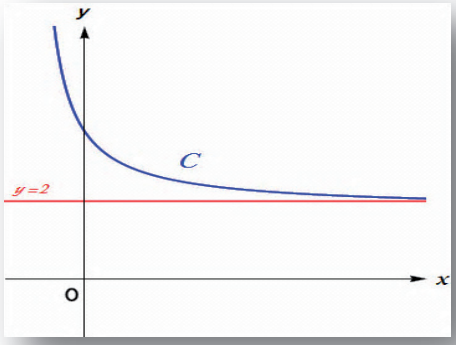
في كلّ شكلٍ ممّا يأتي خطّ بيانيّ C لدالّة f , ومستقيم أفقي مقارب ل C املأ الفراغ بما يناسبه فيما يأتي:



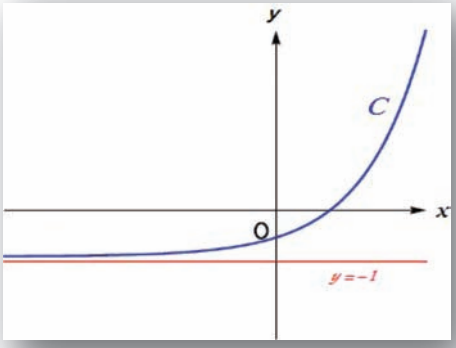
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = ...$



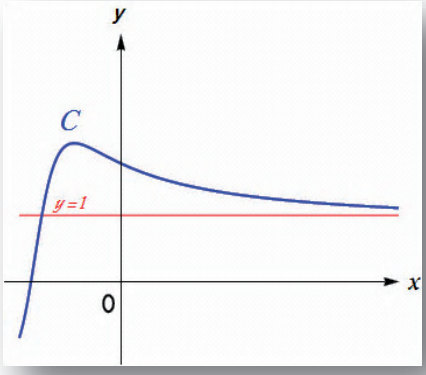
$\lim\limits_{x \to .....} f(x) = -1$



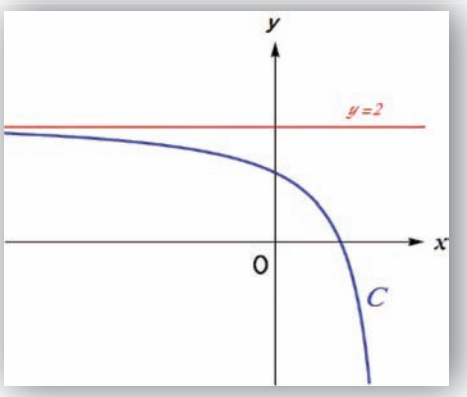
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = ...$



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = ...$



$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = ...$



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = ...$

نشاط 2

فيما يأتي مجموعة من العبارات لكل منها ثلاث إجابات ، واحدة منها فقط صحيحة، اقرأ كلّ عبارة جيداً، و بالتشاور مع زملائك في مجموعتك، ضع دائرة على الرمز الدال على الإجابة التي تختارونها و ترون أنّها صحيحة:

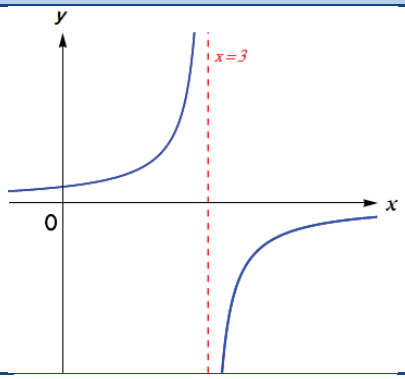
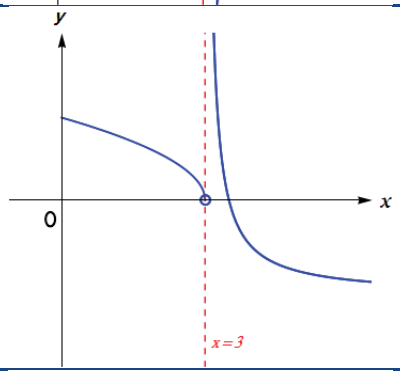
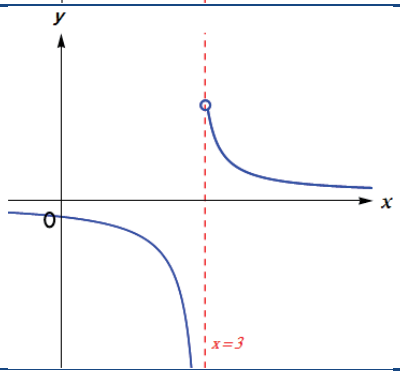
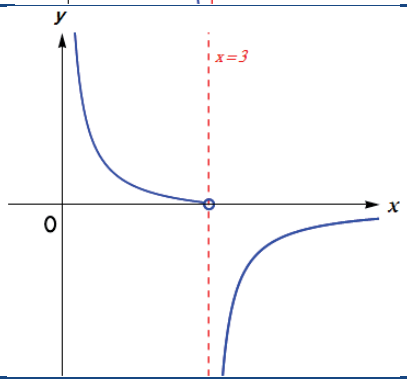
الرقم	العبارة	الرمز	الإجابات المقترحة
1	$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x + \frac{1}{x-1} \right)$	A	$-\infty$
		B	$+\infty$
		C	0
2	الدالّة f من الدوال المذكورة جانباً, التي تحقّق $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ هي:	A	$f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$
		B	$f(x) = \frac{3x^4+5x}{x+1}$
		C	$f(x) = \frac{3x^2+5x+1}{x^2+3}$
3	إذا كانت f دالّةً زوجيّة ومعرّفة على $\mathbb{R}$ وكانت : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$ فإنّ	A	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -3$
		B	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$
		C	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
4	إذا كانت f دالّةً فردية ومعرّفةً على $\mathbb{R}$ وكانت : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ فإن	A	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$
		B	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
		C	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

4) **النهاية من الشكل** : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

لنتذكر القاعدة الآتية، ولنستفدْ منها في حلّ التمارين: $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} a} \frac{1}{x-a} = -\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} a} \frac{1}{x-a} = +\infty$

نشاط 3

صل كلّ جواب للنهاية في العمود A مع الخط البياني للدالّة الموافقة في العمود B فيما يأتي:

B	A
	$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 3} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 3} f(x) = 0$
	$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 3} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 3} f(x) = +\infty$
	$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 3} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 3} f(x) = +2$
	$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 3} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 3} f(x) = 0$

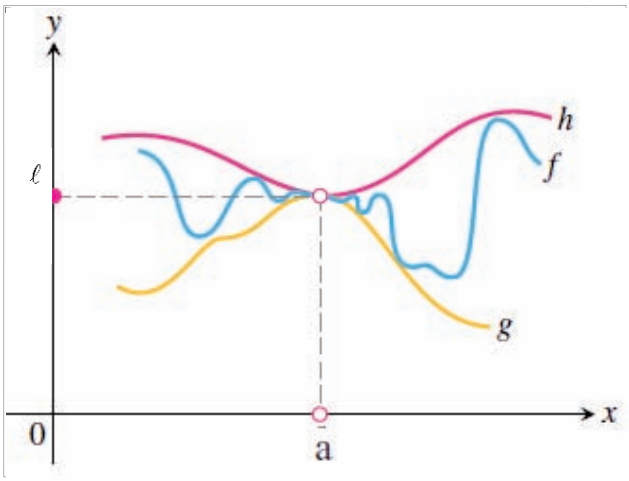
2.1.1 مبرهنة الإحاطة (الدالة المحصورة).

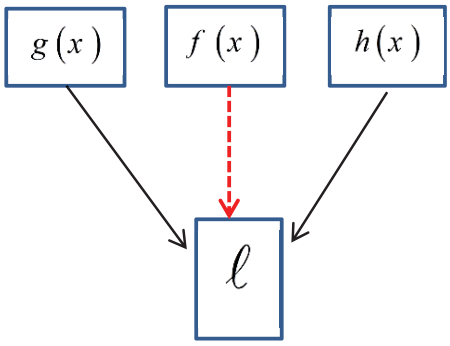
نقبل بصحة المبرهنات الآتية:

مبرهنة1: ليكن D مجالاً، ولتكن f و g دالتين معرّفتين على $D\setminus\{a\}$ وتحقّقان : $f(x)\le g(x)$ أياً كان $x\in D\setminus\{a\}$. إذا كانت النهايتان : $\lim\limits_{x\to a} f=L$ وَ $\lim\limits_{x\to a} g=M$ موجودتين كان $L\le M$.

مبرهنة2: ليكن D مجالاً ولتكن f و g و h ثلاث دوالّ معرفة على $D\setminus\{a\}$ وتحقق: في حالة $x\in D\setminus\{a\}$ المتراجحة $g(x)\le f(x)\le h(x)$. إذا كانتِ النهايتان $\lim\limits_{x\to a} h(x)$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ موجودتين ومتساويتين وقيمتُهما المشتركة ℓ كان $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$.

تُسمّى هذه المبرهنةُ مبرهنةَ الإحاطة (الحصر) ويمكن تمثيلها في الشكل الآتي:





مبرهنة3: ليكن D مجالاً، ولتكن f و g دالتين معرّفتين على $D\setminus\{a\}$.

1- إذا كان $g(x)\le f(x)$ وكان $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$ فإنّ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$.

2- إذا كان $g(x)\ge f(x)$ وكان $\lim\limits_{x\to a} g(x)=-\infty$ فإنّ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$.

ملاحظة: تبقى المبرهناتُ السابقةُ صحيحةً عندما $a=-\infty$ أو $a=+\infty$

مثال

أوجد $\lim\limits_{x\to 0} x^2.\cos\frac{1}{x}$

الحل: إن $-1\le\cos\frac{1}{x}\le+1$ أياً كانت $x\in\mathbb{R}^*$ إذن

$$-x^2\le x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\le x^2$$

ولأنّ $\lim\limits_{x\to 0}(x^2)=0$ و $\lim\limits_{x\to 0}\left(-x^2\right)=0$،

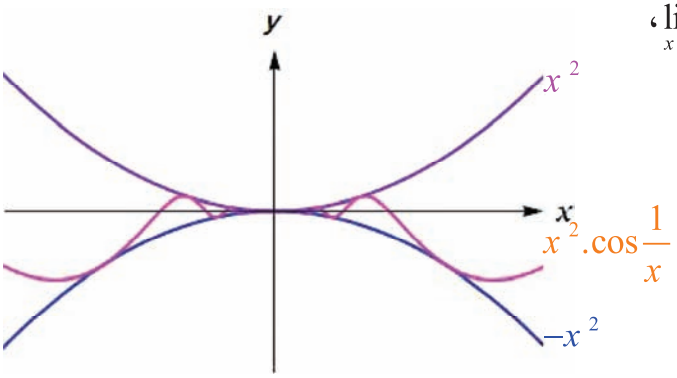
استنتجنا حسب مبرهنة الإحاطة أنّ

$$\lim_{x\to 0} x^2.\cos\frac{1}{x}=0$$

نعلم أن

$-1\le\cos\theta\le+1$

أياً كانت $\theta\in\mathbb{R}$



مثال1

أوجد نهاية الدالة f المعرّفة على $[0,+\infty[$ كما يأتي $f(x)=x-\sqrt{x}$.

الحل: نلاحظ أنّ $f(x)\ge\sqrt{x}-1$ (لماذا؟). ولأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-1\right)=+\infty$ استنتجنا أنّ

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

مثال2

أوجد نهاية $(x-1)^2\cdot\cos\left(\frac{1}{x-1}\right)$ عند 1

الحل: في حالة $x\ne 1$ لدينا $-1\le\cos\frac{1}{(x-1)}\le+1$. ولأنّ $(x-1)^2\ge 0$ استنتجنا

$$-(x-1)^2\le(x-1)^2\cdot\cos\frac{1}{(x-1)}\le(x-1)^2$$

ولمّا كان $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2=0$ فاستناداً إلى مبرهنة الإحاطة نجد $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2\cdot\cos\left(\frac{1}{x-1}\right)=0$.

مثال3

أوجد نهاية $e^{x-\sin x}$ عند $+\infty$

الحل: نعلم أنّ $-1\le-\sin x$ إذن $x-1\le x-\sin x$. ولمّا كانتِ الدالة الأسية متزايدةً كان

$e^{x-1}\le e^{x-\sin x}$. ولكن $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-1}=+\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-\sin x}=+\infty$

تدريب

باستعمال مبرهنة الإحاطة أثبت أن:

1 $\lim\limits_{x\to 0} x^2.\sin\frac{1}{x}=0$

2 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{\cos x}{x^2}\right)=+1$

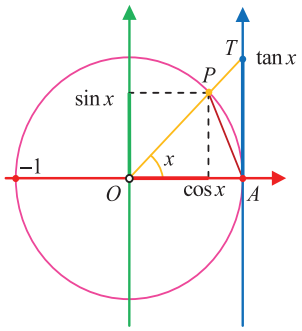
3 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{x}\ .\sin\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=0$

مبرهنة: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

نتأمّل حالةَ $0<x<\frac{\pi}{2}$، لاحظ من الشكل:

مساحة المثلث OAT > مساحة القطاع الدائري OAP > مساحة المثلث OAP

$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$ (حيثُ قياسُ القوس $AP=x$ مقدّرةٌ بالراديان)



أو $\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$ إذن

$x\cos x < \sin x < x$ لأنّ $\cos x > 0$ ومنه

$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$

لأنّ $x>0$

وبحسب مبرهنة الدالّة المحصورة نجد:

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\sin x}{x}=1$.

لدراسة النهاية من اليسار عند 0 نلاحظُ أنّ الدالّة $x\mapsto f(x)=\frac{\sin x}{x}$ دالّةٌ زوجيّة على $\mathbb{R}^*$

فمنحنيها متناظر بالنسبة إلى oy , و النهايةُ من اليسار عند 0 تساوي النهايةَ من اليمين عند 0 ومنه

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\frac{\sin x}{x}=1$

تذكر أن
مساحة القطاع الدائري تساوي
$\frac{1}{2}r^2x$

ممّا سبقَ نستنتجُ أنّ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ وكذلك $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$ و $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$

مثال 1

احسب $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{4x}$

الحلّ: نكتبُ $\dfrac{\sin 5x}{4x}$ بالشكل $\dfrac{\sin 5x}{4x}=\dfrac{\sin 5x}{5x}.\dfrac{5}{4}$ ومنه $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{4x}=1.\dfrac{5}{4}=\dfrac{5}{4}$

مثال 2

احسب نهاية $\dfrac{x\tan 2x}{3x^2+3\sin^2 x}$ عند 0

في حالة $x\neq 0$ لدينا $\dfrac{x\tan 2x}{3x^2+3\sin^2 x}=\dfrac{\dfrac{\tan 2x}{x}}{3+3\dfrac{\sin^2 x}{x^2}}=\dfrac{2\dfrac{\tan 2x}{2x}}{3+3\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2}$

ولمّا كان $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)=1$ و $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{2x}=1$ استنتجنا أن $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\tan 2x}{3x^2+3\sin^2 x}=\dfrac{1}{3}$

نشاط

برهن أنّ $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{1-\cos(2\theta)}{\theta}=0$

الحل

لاحظ أنّه في حالة $\theta\neq 0$ لدينا

$$\frac{1-\cos(2\theta)}{\theta}=\frac{2\sin^2(\theta)}{\theta}=2\sin(\theta)\cdot\frac{\sin(\theta)}{\theta}$$

إذن $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{1-\cos(2\theta)}{\theta}=0\cdot 1=0$

تذكّر أنّ

$$\frac{1-\cos 2x}{2}=\sin^2 x$$

تدريب

احسب

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x\cos x}{\sin x}$

3.1.1 حالات عدم التعيين.

نقبل بصحة المبرهنات الآتية:

لتكن f و g دالّتين عدديّتين معرّفتين في جوار عدد حقيقيّ a عندئذ:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\ell\in\mathbb{R}$	$\ell\in\mathbb{R}$		$\ell\in\mathbb{R}$		$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$M\in\mathbb{R}$	$+\infty$		$-\infty$		$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$	$\ell+M$	$+\infty$		$-\infty$		$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}(f(x).g(x))$	$\ell.M$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	?
		$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$					

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\ell\in\mathbb{R}$	$\ell\in\mathbb{R}$	$\ell\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$M\in\mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	$M>0$	$M<0$	$M>0$	$M<0$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{\ell}{M}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	?	?

إنّ (?) في الجدولين السابقين تعني أنّنا لا نستطيع إعطاء الجواب مباشرة .

تُسمّى مثلُ هذه الحالات حالاتِ عدم التعيين وقد تكون من الصيغ: $\dfrac{\infty}{\infty}$, $+\infty-\infty$, $0.\infty$, $\dfrac{0}{0}$

وهناك أشكالٌ أخرى سنذكرها عند ورودها.

ولإزالة حالة عدم التعيين ندرس كلّ حالة نتعرّض لها، وقد نعيد صياغةَ قاعدة الربط؛ لنتمكّنَ من تطبيق مبرهنات النهايات السابقة.

4.1.1 دراسة حالات عدم التعيين عند البحث عن نهاية دالّة عدديّة.

نجد فيما يأتي أنشطة لتوضيح بعض طرائق إزالة عدم التعيين:

1) **إزالةُ عدم التعيين من الشكل** $+\infty-\infty$:

نشاط1

أوجد نهايةَ الدالّة f : $f(x)=x-\sqrt{x}$ عند $+\infty$ حيثُ $D_f=[0,+\infty[$

الحل

f معرف في جوار $+\infty$

وبما أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=.....$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x=.....$ فإنّنا أمام حالة عدم تعيين من النمط $+\infty-\infty$ لإزالة عدم التعيين نكتب ما يأتي : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=+\infty$ علّل ذلك.

طريقة ثانية: لمّا كان $f(x)=\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)$ في حالة $x>0$. استنتجنا من كون $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=\cdots\cdots$ أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)=+\infty$.

نشاط2

لتكنِ الدالّة f المعرّفة على $D_f=[-1,+\infty[$ وفق : $f(x)=\sqrt{x+1}-x$ أوجد نهاية الدالّة عند $+\infty$.

الحل

الدالة f معرفة في جوار $+\infty$

ولأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}=.....$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x=.....$ فإنّنا أمام حالة عدم تعيين من النمط $+\infty-\infty$.

لإزالة عدم التعيين نكتبُ في حالة $0<x$: $f(x)=x\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}}-1\right)$

ولأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=.....$ نستنتجُ أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=(+\infty)\cdot(-1)=-\infty$.

نشاط 3

لتكنِ الدالّةُ f المعرّفة على $[1,\infty[$ وفق $f(x)=2x+1-\sqrt{x^2+x-2}$ ، أوجد نهايتها عند $+\infty$:

الحل

الدالة f معرفة في الجوار $[1,\infty[$ لـ $+\infty$. ولأنّ

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x-2}\right)=.....\quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty}(2x+1)=.....$$

فإنّنا أمام حالة عدم تعيين من النمط $+\infty-\infty$. ولإزالة عدم التعيين نكتب في حالة $x\geq 1$:

$$f(x)=\left[x\left(2+\frac{1}{x}\right)-\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}\right)\right]$$

$$=\left[x\left(2+\frac{1}{x}\right)-\left(x\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}\right)\right]$$

$$=x\cdot\left(2+\frac{1}{x}-\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}\right)$$

ولأنّ

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}\right)=.....$$

إذن

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=(.....)\cdot(.....)=.....$$

مثال أوجد $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ حيث $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$

الحل الدالة f معرّفة في جوار $+\infty$ ، ولأنّ

$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ ، فإنّنا أمام حالة عدم تعيين من النمط $+\infty-\infty$. لإزالة عدم التعين نكتب:

$$(\sqrt{x^2+1}-x)=\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)}=\frac{1}{(\sqrt{x^2+1}+x)}$$

((حيث ضربنا بالمرافق ، وقسمنا عليه)) إذن $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+1}-x=0$.

تدريب

أوجد نهايةَ الدالّة f : $f(x)=2x+\sqrt{1-x}$ عند $-\infty$.

2) إزالةُ عدم التعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$:

نشاط1

احسب ما يأتي :

[1] $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2-2x+1}{4x^2+7x-5}=.....$, [3] $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^5-2x+1}{x^3-1}=.....$

[2] $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3-2x+1}{4x^2+7x-5}=.....$, [4] $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x^2+1}=.....$

تذكّر أنّ

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x\to-\infty}}\frac{a_nx^n+.....+a_0}{b_mx^m+.....+b_0}=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x\to-\infty}}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}\begin{cases}+\infty \text{ أو } -\infty : & (n>m)\\ \frac{a_n}{b_m} : & (n=m)\\ 0 : & (n<m)\end{cases}, (a_n\times b_m\neq 0)$$

نشاط2

لتكنِ الدالّةُ f المعرّفة على $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$ وفق $f(x)=\frac{\sqrt{4x^2+5}}{1-3x}$، احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

الحل

الدالة f معرّفة على الجوار $]-\infty,0[$ لـ $-\infty$ وعندما $x<0$ لدينا:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2}.\sqrt{.....+\frac{....}{....}}}{1-3x}$$

$$f(x)=\frac{-x}{1-3x}\cdot\sqrt{.....+\frac{5}{....}}=\frac{1}{3-\frac{1}{.....}}\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}$$

إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\frac{2}{3}$.

تدريب

احسب النهايات الآتية :

1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-2x+1}{4x^2+7x-5}$

2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$

3 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x-1}{\sqrt{x^2+1}}$

3) إزالةُ عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$:

يمكنُ إزالةُ عدم التعيين من هذا الشكل، بأنّ نكتبَ كلاًّ من البسط والمقام على شكل جداء عوامل،واختصار العوامل المشتركة .

نشاط1

لتكنِ الدالّةُ f المعرّفة على $\mathbb{R}\setminus\{0,2\}$ وفق $f(x)=\dfrac{x^2+4x-12}{x^2-2x}$، احسب $\lim\limits_{x\to2}f(x)$ في حال وجودها.

الحل

إنّ $]0,3[\setminus\{2\}$ جوار محذوف للعدد 2 محتوى في مجموعة التعريف

ولمّا كان: $\lim\limits_{x\to2}(x^2+4x-12)=.....$, $\lim\limits_{x\to2}(x^2-2x)=.....$

فإنّنا أمام حالة عدم تعيين من النمط $\frac{0}{0}$. لإزالة عدم التعيين نكتُب: في حالة x تنتمي إلى $]0,3[\setminus\{2\}$ لدينا

$$f(x)=\frac{x^2+4x-12}{x^2-2x}=\frac{(x-....)(x+....)}{x(x-2)}=\frac{(...+...)}{x}$$

إذن: $\lim\limits_{x\to2}f(x)=\dfrac{8}{2}=4$

نشاط2

أوجد نهاية $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ عند (0)

الحل

لاحظ أنّنا أمام حالة عدم تعيين من النمط $\frac{0}{0}$, لذلك نكتبُ : في حالة x من $]-\pi,\pi[\setminus\{0\}$ لدينا

$$f(x)=\frac{.....}{2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}}=\frac{.....}{.....}$$

إذن $\lim\limits_{x\to0}f(x)=.....$

تـدريـب

ابحث عن نهاية الدالّة $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+10}-4}{x-3}$ عند $a=3$.

4) إزالةُ عدم التعيين من الشكل $0\cdot\infty$:

نصادف هذه الحالةَ عند حساب نهاية جداء دالّتين حيث نهايةُ إحداهما 0 و نهاية الأخرى $+\infty$ أو $-\infty$

نشاط

احسب نهاية $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}\left(\sqrt{x}+1\right)$ عند $+\infty$.

الحل

هذه حالة عدم تعيين من النمط $0\times\infty$ لذلك نكتب في حالة $x>0$

$$f(x)=\frac{x\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

مبرهناتٌ في النهايات (تُقبل من دون ذكر البرهان)

1] $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$	1] $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$
2] $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} \ln x=-\infty$	2] $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$
3] $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\ln x}=+\infty$	3] $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{e^x}=0$: $n\geq 0$
4] $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} x.\ln x=0$	4] $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n.e^x=0$: $n\geq 0$
5] $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$	5] $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x-1}{x}=1$

مثال (1)

أوجد: $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{4x}-1}{\tan x}$

الحل: في حالة $x\in\left]\dfrac{-\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\}$ لدينا $f(x)=\dfrac{e^{4x}-1}{\tan x}=\left(\dfrac{e^{4x}-1}{4x}\cdot 4\cdot\dfrac{x}{\tan x}\right)$ إذن

$$\lim_{x\to0} f(x)=1\,.\,1\,.\,4=4$$

مثال (2) أوجد نهاية الدالة $f:x\mapsto\dfrac{1}{x\ln x}$ عندما تسعى x إلى $+\infty$ وكذلك عندما تسعى x إلى 0 بقيم موجبة، وهل للدالّة f نهايةٌ عند 1 ؟

الحلّ: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{1}{x \ln x} = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x \ln x} = 0$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{1}{x \ln x} = +\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{1}{x \ln x} = +\infty$

و نلاحظ أنّه لا يوجد نهاية للدالّة f عند 1.

نشاط

احسب $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{\ln(1+3x)}$

الحل

في حالة $x > -\frac{1}{3}$ لدينا

$$f(x) = \frac{\sin 5x}{\ln(1+3x)} = \left[\frac{\sin 5x}{\ln(1+3x)} \cdot \frac{3x}{5x} \cdot \frac{5}{3}\right] = \left[\frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{3x}{\ln(1+3x)} \cdot \frac{5}{3}\right]$$

ومنه: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{\ln(1+3x)} = \ldots\ldots\ldots \times \ldots\ldots\ldots \times \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$

تدريب

أوجد نهاياتِ الدوالّ الآتية في حال وجودها عند a الموافقة:

1. $f(x) = 2x - e^x$ عند $+\infty$
2. $f(x) = \frac{e^x - e^{4x}}{x}$ عند الصفر.
3. $f(x) = \sqrt{x} - \ln(x)$ عند $+\infty$.
4. $f(x) = \frac{x}{x - \ln(x)}$ عند $+\infty$.

تمارين

أولاً : احسب نهاياتِ كلّ دالة ممّا يأتي عند a الموافقة، وذلك في حال وجودها :

	a	$f(x)$		a	$f(x)$		a	$f(x)$	
1	8	9	2	-2	$7x$	3	$+\infty$	$-5x$	
4	2	x^3-8	5	9	$\dfrac{3+x}{9-x}$	6	4	$\dfrac{\sqrt{x}}{1+2x-x^2}$	
7	-1	$\dfrac{x^3+1}{x^2-1}$	8	$-\infty$	$\dfrac{2-x}{\sqrt{7+6x^2}}$	9	$+\infty$	$\dfrac{6-x^3}{7x^3+3}$	

ثانياً: احسب نهاياتِ كلّ دالة ممّا يأتي عند a الموافقة، وذلك في حال وجودها:

	a	$f(x)$		a	$f(x)$	
1	2	$\dfrac{\lvert x-1\rvert\cdot(1-2x)}{x^2+x-2}$	2	2	$(x-2)^2\cdot\cot(x-2)$	
3	2	$\lvert x-2\rvert\cdot\cos^2\left(\dfrac{1}{x-2}\right)$	4	0	$\dfrac{\tan(3x)-x}{x+2\sin x}$	
5	0	$\dfrac{x^2}{2+\cos\frac{1}{x}}$	6	1	$\dfrac{x^3-1}{x^2-3x+2}$	
7	0	$(\sin x)\cdot\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$	8	1	$\dfrac{\sqrt{2x^3-1}-1}{x-1}$	
9	0	$\dfrac{\sin x}{\sqrt{x^2+x^3}}$	10	$+\infty$	$\sqrt{2x^2+3}-\sqrt{2x^2-5}$	
11	1	$\dfrac{\tan^2(2x-2)}{x^2-2x+1}$	12	1	$\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{x-1}$	
13	0	$\dfrac{2x+\sin 3x}{x-\tan(6x)}$	14	1	$\dfrac{x-1}{\sqrt{2x}-\sqrt{3-x}}$	
15	$+\infty$	$\dfrac{x\cos(e^x)}{x^2+1}$	16	0	$\dfrac{3\sin x-\sin(3x)}{x^3}$	

ثالثاً:

في التمارين الآتية أوجد قيمة $\lim_{x \to a} f(x)$ عند a الموافقة إن وُجِدَتْ وعلّل سبب عدم وجودها إذا لم تكن موجودة:

(1 $f(x) = \dfrac{|x+3|}{x+3}$ عند $a = -3$

(2 $f(x) = \begin{cases} 1 & : x \le 1 \\ \dfrac{1}{1+x^2} & : x > 1 \end{cases}$ عند $a = 1$

(3 $f(x) = \begin{cases} 1-x & : x < 0 \\ x^2 - 2x + 1 & : x > 0 \end{cases}$ عند $a = 0$

(4 $f(x) = \sqrt{2x - 1 - x^2}$ عند $a = 1$

رابعاً:

1) لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} x-3 & : x \ne -3 \\ k & : x = -3 \end{cases}$، احسب قيمة k التي تجعل

$$\lim_{x \to -3} f(x) = f(-3)$$

(2

a. برهن أنّ $\lim_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0$

b. احسب النهاياتِ الآتيةَ بعد أن تتحقّق من وجودها

1 $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin 6x}{5x}$

2 $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{5x}$

3 $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{1-\cos\theta}{\theta \cdot \sin\theta}$

4 $\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{2x^2 + \sin x}{x} \right)$

5 $\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{x \cdot \cos x - x^2}{3x} \right)$

خامساً: احسب كلاً ممّا يأتي:

1 $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos x)}{\ln(\cos 3x)}$

(توجيه لحل تمرين 1: يمكن إضافة وطرح 1 إلى مضمون كل $\ln$)

2 $\lim_{x \to 0} \frac{\ln x - x}{x^3}$

3 $\lim_{x \to 0} \frac{xe^x}{1-e^x}$

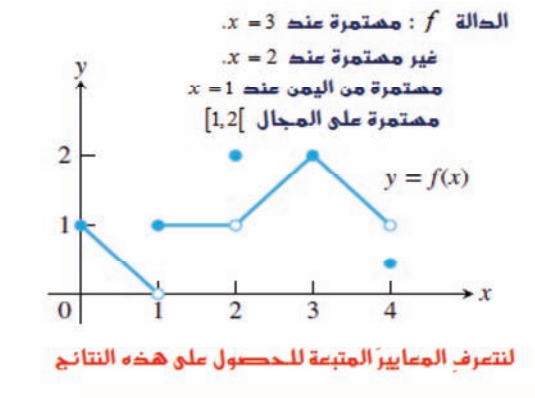
1.1

الاستمرار

2.1

سوف تتعلم

1.2.1 دراسة الاستمرار عند $x=a$.



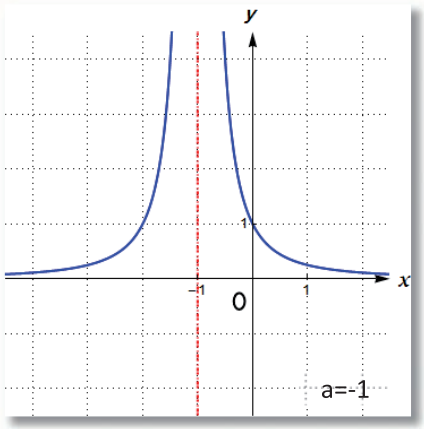
1.2.1 دراسةُ الاستمرار عند $x=a$.

عند دراسة نهاية دالة f عند نقطة a حرصنا على تأكيد أن قيمة الدالة عند a لا تؤدي أيّ دور في تعريف النهاية أو خصائصها، ولكن رأينا أنّ هناك بعضَ الدوال، مثل كثيرات الحدود والدوال الأسيّة واللوغاريتميّة و cos و sin تحقّق $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ مثل هذه الدوال هي دوالّ مستمرة عند a.

تعريف لتكن f دالّةً معرّفةً على مجال مفتوح I ، ولتكن $a\in I$ ، نقول إنّ: f دالة مستمرة عند a إذا وفقط إذا كان: $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

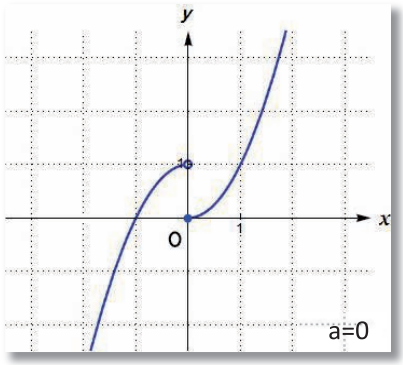
أمثلة على دوالّ غيرِ مستمرّة عند نقطة a :

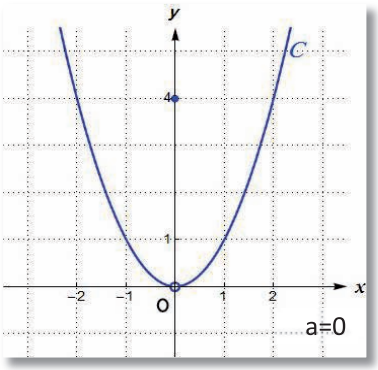
1. f غير معرّفة عند a

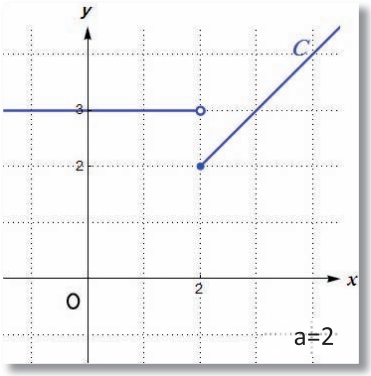


مدوّنة ملحوظة

2. f ليس لها نهايةٌ عند a أو $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ كما في الأشكال الآتية:







تذكرة

1. إنّ كلّ كثيرة حدود تكون مستمرّةً على $\mathbb{R}$.
2. إنّ كلّ دالة كسرية مستمرّة على أي مجال محتوى في D_f
3. إذا كانت كلٌّ من f و g دالّةً مستمرّة عند a وكان c عدداً ثابتاً، فإنّ كلاً من الدوال الآتية مستمرّةٌ عند النقطة a:

$f+g$ و $f-g$ و $c\cdot f$ و $f\cdot g$ و $\dfrac{f}{g}$: $g(a)\neq 0$

مثال

لتكنِ الدالّةُ f: $\begin{cases} f(x)=x+2 & : x\neq 4 \\ f(x)=k & : x=4 \end{cases}$ عيّن k لتكونَ الدالّةُ مستمرّةً عند $x=4$.

الحل: لدينا $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=6$

فلكي تكون الدالّةُ مستمرّةً عند $x=4$ يجب أن يكون $f(4)=6$ و منه $k=6$.

نشاط

إذا كانت f: $f(x)=\begin{cases} ax & : x\geq 3 \\ 4x+b & : |x|<3 \\ x^2+x & : x\leq -3 \end{cases}$، فعيّن قيمةَ كلّ من الثابتين a , b حتى تكون f مستمرّة على $\mathbb{R}$

الحل: إنّ الدالّة $x \to ax$ مستمرّةٌ على $]3,+\infty[$ و الدالّة $x \to 4x+b$ مستمرّة على $]-3,+3[$ والدالّة $x \to x^2+4x$ مستمرّةٌ على $]-\infty,-3[$, إذن f مستمرة على $\mathbb{R}\setminus\{-3,3\}$

وعليه فإنّ الشرط اللازم والكافي لاستمرار f على $\mathbb{R}$ هو أن تكونَ مستمرّةً عند كل من 3 و -3 أي

$\lim\limits_{x\to+3} f(x)=f(3)$, $\lim\limits_{x\to-3} f(x)=f(-3)$.

عند $x=-3$: $f(-3)=(-3)^2+(-3)=6$ و

$$\lim_{x \xrightarrow{>} -3} f(x)=\lim_{x \xrightarrow{>} -3}(.....)=-12+b$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} -3} f(x)=\lim_{x \xrightarrow{<} -3}(.....)=6$$

ومنه نرى أنّ استمرار f عند $x=-3$ يُكافئ $-12+b=6$ أي $b=18$.

عند $x=+3$: $f(+3)=.....=.....$ و

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 3} f(x)=\lim_{x \xrightarrow{<} 3}(.....)=3a$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 3} f(x)=\lim_{x \xrightarrow{<} 3}(.....)=12+b=30$$

إذن تكون f مستمرّةً عند $x=+3$ إذا وفقط إذا تحقّق $3a=30$ أي $a=10$.

تذكّر أنّ

1. إذا كانت f مستمرّة عند b , وكانت $\lim\limits_{x\to a} g(x)=b$ فإنّ:

$$\lim_{x\to a} f(g(x))=f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)=f(b)$$

2. إذا كانت g مستمرّةً عند a , و كانت f مستمرّةً عند $g(a)$, فإنّ: $f\circ g$ مستمرّةٌ عند a.
3. الدالّتان $\sin$ و $\cos$ مستمرّتان على $\mathbb{R}$

نشاط

أثبت أنّ $\lim\limits_{x\to\pi}\left(\sin\left(\dfrac{x^2}{\pi+x}\right)\right)=1$

الحل لتكن g: $g(x)=\dfrac{x^2}{\pi+x}$ إذن $\lim\limits_{x\to\pi} g(x)=.....$ ، ولمّا كانت $\sin$ مستمرّةً على $\mathbb{R}$ كان

$$\lim_{x\to\pi}\left[\sin(g(x))\right]=\sin\left(\lim_{x\to\pi} g(x)\right)=.....=+1$$

تـدريـب

احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\cos\left(\dfrac{\pi x^2+1}{x^2+3}\right)\right]$

تمارين

1 أوجد قيمة c التي تجعل f مستمرّة على $\mathbb{R}$.

$$f(x)=\begin{cases} cx+1 & : x\le 3 \\ cx^2-1 & : x>3 \end{cases}$$

2 عيّن قيم c , d بحيث تكون الدالة f المعرّفة فيما يأتي مستمرّةً على $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\begin{cases} x & : x<-1 \\ cx+d & : -1\le x\le 2 \\ 2x-7 & : x>2 \end{cases}$$

3 عيّن قيم A و B بحيث تكون الدالة f المعرّفة فيما يأتي مستمرة على $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\begin{cases} |x|+\dfrac{\sin^3 A.x}{x^3} & : x<0 \\ 8 & : x=0 \\ \sqrt{x}+B & : x>0 \end{cases}$$

4 عيّن قيم A و B بحيث تكون الدالة f المعرّفة فيما يأتي مستمرة على $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\begin{cases} A.x^2+B & : x<-1 \\ -x+2B & : 0>x\ge -1 \\ A\dfrac{\sin 2x}{x}+B & : x\ge 0 \end{cases}$$

5 عيّن قيم A و B بحيث تكون الدالة f المعرّفة فيما يأتي مستمرة على $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\begin{cases} A\cdot\left(\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x-2}}{x^2+3x-4}\right) & : x<1 \\ -\dfrac{1}{10} & : x=1 \\ \dfrac{B\cdot|x-1|}{(x^3+1)\cdot\sin(x-1)} & : x>1 \end{cases}$$

6 عيّن قيم A و B بحيث تكون الدالة f المعرّفة فيما يأتي مستمرة على $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\begin{cases} A+\dfrac{3|x-1|}{x^2+x-2} & : x<1, x\ne -2 \\ B & : x=1 \\ \sqrt{2x-1} & : x>1 \end{cases}$$

مدونة ملحوظة raghebnotes.com

الدالّةُ المُشتقّة

3.1

سوف تتعلم

2-3-1 توظيف تعريف المشتق في إثبات بعض الخواص

3-3-1 مبرهنات الاشتقاق.

1.3.1 مفهوم الدالة المشتقة

مقدمة

- لنتأمّل نقطةً متحركة على محور عندئذ تكون فاصلةً موضعُها S في لحظة t، دالّة تابعة للزمن t أي: $S=f(t)$. وكلّ قيمة محدّدة لـ t توافقها قيمة معرّفة لـ S . فإذا تزايد t بمقدار Δt، فإنّ الفاصلة تتغيّر بمقدار ΔS وتكون المسافة المقطوعة في الفترة الزمنية Δt هي ΔS.

  تُمثّل السرعة الوسطى للمتحرّك في الفترة الزمنية $[t,t+\Delta t]$ بالعلاقة $v_a=\frac{\Delta S}{\Delta t}$. إنّ نهاية هذه النسبة عندما تنتهي Δt إلى الصفر تمثّل السرعة اللحظية للمتحرّك في اللحظة t.

- أيضاً لنفترض أنّ مادةً ما تدخل في تفاعل كيميائي، ولتكن c الكميةَ الموجودة من هذه المادة في وسط التفاعل عند اللحظة t، فهي إذن دالّةٌ تابعةٌ للزمن t. في الفترة $[t,t+\Delta t]$، يتفاعل مقدارٌ قدره Δc من المادة. والنسبة $\frac{\Delta c}{\Delta t}$ تعطي السرعةَ الوسطى لتفاعل المادة في الفترة الزمنية $[t,t+\Delta t]$، إنّ نهاية هذه النسبة عندما تنتهي Δt إلى الصفر تمثّل السرعةَ اللحظيّةَ للتفاعل الكيميائي في اللحظة t.

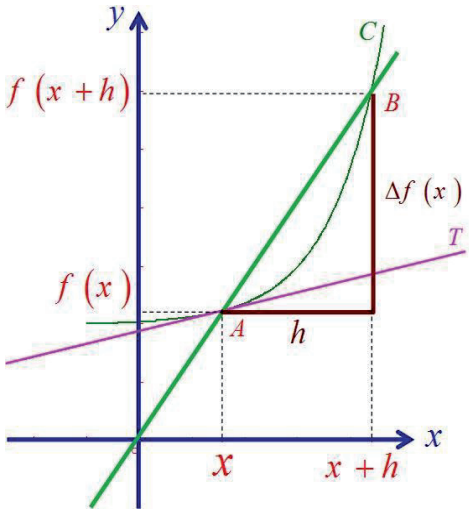
لنتذكر إذن تعريف **العدد المشتقّ** و**الدالّة المشتقّة** :

تعريف : لتكن $f : D \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ دالّةً معرّفة على مجال D. في حالة x_0 من D، نعرّف على $D \setminus \{x_0\}$ دالّة **نسبة التغيّر** عند x_0، التي نرمزها Δ_{f,x_0}، بالصيغة $\Delta_{f,x_0}(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. فإذا كان لهذه الدالّة نهاية حقيقية عندما تسعى x إلى x_0 في D، رمزنا إلى هذه النهاية بالرمز $f'(x_0)$، وأسمينا هذه النهاية **العدد المشتقّ للدالّة** f **عند** x_0. وعندئذ نقول: إنّ **الدالّة** f **اشتقاقيّة عند** x_0.

تعريف : لتكن $f : D \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ دالّة معرّفة على مجال D. نقول: إنّ الدالّة f **اشتقاقيّة** على مجال جزئي I محتوى D، إذا كانت اشتقاقيّة عند كلّ x من D، وعندئذ نعرّف **الدالّة المشتقّة** f' على I بأنّها تلك الدالّة التي تقرن بكلّ x من I قيمة العدد المشتق $f'(x)$ عند x. أي $x \mapsto f'(x)$.

خواص :

- إذا كانت الدالّةُ f اشتقاقيةً على I فهي مستمرّة على هذا المجال .
- إذا كانت الدالّة f غير مستمرّة على I فهي غير اشتقاقية على هذا المجال .
- إذا كانت f دالّة مستمرّة عند x_0 فليس من الضروري أن تكون اشتقاقيّة عند x_0.
- $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$



تذكرة

- إذا كانت الدالّة $x \mapsto f(x)$ اشتقاقيّة عند x_0 فإنّ ميل المماس لمنحني الدالة $y = f(x)$ عند النقطة $M_0(x_0, y_0)$ منه هو $f'(x_0)$. أمّا معادلة هذا المماس فهي: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
- إن معادلة مستقيم ميلُهُ m و يمرّ من نقطة معلومة $M_0(x_0, y_0)$ هي : $y - y_0 = m(x - x_0)$

نشاط داعم

ليكن C الخطّ البياني للدالّة f : $y=f(x)=1+\frac{1}{x}$ المعرفة في المجال $]0,\infty[$

1. أوجد الدالّة المشتقة بالاعتماد على التعريف.
2. اكتب معادلة المماس T للخط C في النقطة M_0 منه التي فاصلتها $x=1$
3. اكتب معادلة d الناظم للخط C في النقطة M_0.

تذكّر

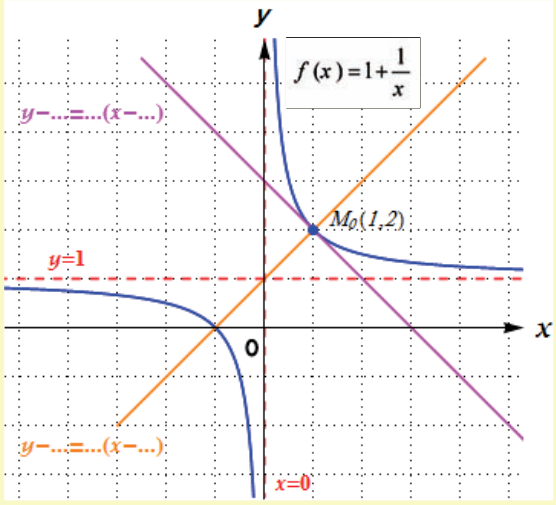
الناظم عند نقطة من منحني دالة هو المستقيم العمودي على المماس للمنحني عند تلك النقطة.

الحل

1. الدالّة f معرفة على $]0,+\infty[$. لتكن x_0 نقطة ما من $]0,+\infty[$، عندئذ أيّاً كانت x من $]0,+\infty[\setminus\{x_0\}$ فلدينا

$$\Delta_{f,x_0}(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{x-x_0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right)=\frac{x_0-x}{x_0x(x-x_0)}=-\frac{1}{x_0x}$$

إذن $\lim_{x\to x_0}\Delta_{f,x_0}(x)=-\frac{1}{x_0^2}$، والدالّة f اشتقاقيّة عند x_0 و $f'(x_0)=-\frac{1}{x_0^2}$. ولأنّ x_0 عدد كيفي من $]0,+\infty[$، استنتجنا أنّ الدالّة المشتقة f' معرّفة على $]0,+\infty[$، وأنّه مهما كانت x من $]0,+\infty[$ كان $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$.



2. لنجد ميل المماس للخط C في النقطة M_0 هو $m_T=f'(1)=-1$، وترتيب النقطة M_0 هو : $f(x_0)=y_0=1+\frac{....}{....}=....$

فمعادلة المماس هي :

$$y-....=....(x-.....)$$

3) ميل d المستقيم الناظم :

هو $m_N=\frac{.....}{m_T}$ فمعادلة الناظم هي : $y-....=....(x-.....)$

2.3.1 توظيف تعريف المشتق في إثبات بعض الخواص

تطبيق أول: توظيف تعريف المشتق في برهان أنّ : $\lim_{x \to 0}\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) = 1$

البرهان: لتكن الدالّة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = e^x$

نعلم أنّ الدالّة f اشتقاقية على $\mathbb{R}$ ومشتقّها $f'(x) = e^x$ ، إذن $f'(0) = 1$

و $f(0) = 1$ وحسب تعريف العدد المشتق نجد $1 = f'(0) = \lim_{x \to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0}\frac{e^x - 1}{x}$

إذن $\lim_{x \to 0}\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) = 1$

تطبيق ثان: توظيف تعريف المشتق في برهان أنّ : $\lim_{x \to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

البرهان: لتكن الدالّة f المعرّفة على $]-1, +\infty[$ وفق $f(x) = \ln(1+x)$

نعلم أنّ الدالّة f اشتقاقية على مجموعة تعريفها ومشتقّها $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ ، وبوجه خاص $f'(0) = 1$، وبحسب تعريف العدد المشتق نجد:

$$1 = f'(0) = \lim_{x \to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0}\frac{\ln(1+x) - \ln(1+0)}{x - 0}$$

إذن $\lim_{x \to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

3.3.1 مبرهنات الاشتقاق:

درسنا سابقا مبرهناتِ الاشتقاق نتذكرها وفق الجدول الآتي:

لتكن h , g دالتين اشتقاقيتين على المجال $I \subseteq \mathbb{R}$ ، وليكن k ثابتاً حقيقياً .

في الجدول الآتي قواعد اشتقاق لدوالّ عدديّة ناتجة عن عمليّات على دوالّ اشتقاقيّة وهذه القواعد تمثّل مبرهناتٍ في الاشتقاق.

بافتراض أنّ الدالّة h قابلة للاشتقاق على $I_1 \subseteq \mathbb{R}$ ، والدالّة g قابلة للاشتقاق على $I_2 \subseteq \mathbb{R}$

الدالّة العدديّة	قاعدة الاشتقاق	مجال الاشتقاق
$h+g$	$(h+g)'=h'+g'$	$I=I_1\cap I_2$
$h\cdot g$	$(h\cdot g)'=h'\cdot g+h\cdot g'$	$I=I_1\cap I_2$
$k\cdot g$	$(k\cdot g)'=k\cdot g'$	$I=I_2$
$\frac{h}{g}$	$\left(\frac{h}{g}\right)'=\frac{h'\cdot g-h\cdot g'}{g^2}$	$I\subseteq(I_1\cap I_2)\setminus\{x:g(x)=0\}$
$\frac{1}{g}$	$\left(\frac{1}{g}\right)'=\frac{-g'}{g^2}$	$I\subseteq I_2\setminus\{x:g(x)=0\}$

خواص :

1) دوالّ كثيرات الحدود اشتقاقيّة على $\mathbb{R}$.

2) الدالّة الكسريّة المعينة بعلاقة من الشكل $\frac{f(x)}{g(x)}$ حيث (f , g دالّتان حدوديتان) قابلة للاشتقاق على كلّ مجال مفتوح محتوى في مجموعة تعريفها .

نشاط

لتثبيت القواعد ومبرهنات الاشتقاق:

بالتشاور مع مجموعتك أكمل ما يأتي :			
تسلسل	الدالّة العدديّة	الدالّة المشتقّة	مجال الاشتقاق
1	$f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-1$	$f'(x)=.....$	$\mathbb{R}$
2	$f(x)=\frac{2x+1}{x^2+4}$	$f'(x)=.....$	$\mathbb{R}$
3	$f(x)=(x+1)\cdot\sqrt{x^3}$	$f'(x)=.....$	$]0,+\infty[$
4	$f(x)=\frac{\sin x}{x}$	$f'(x)=.....$	$]-\infty,0[$
5	$f(x)=\frac{x+1}{x^2+x}$	$f'(x)=.....$	$]-1,0[$
6	$f(x)=\frac{e^x-1}{\ln x}$	$f'(x)=.....$	$]0,1[$

تدريب

أولاً: أوجدِ الدالّةَ المشتقّةَ لكلّ من الدوال الآتية في المجال المذكور بجانب كلّ منها:

1. $f(x)=\dfrac{x}{1+x^4}$ $\quad D_f=\mathbb{R}$
2. $f(x)=\dfrac{3\sin x-\cos x}{2+\cos x}$ $\quad D_f=\mathbb{R}$
3. $f(x)=x\ln x-x$ $\quad D_f=\left]0,+\infty\right[$
4. $f(x)=(x-1)e^x$ $\quad D_f=\mathbb{R}$
5. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$ $\quad \left]-1,+\infty\right[$
6. $f(x)=x\sqrt{x}+2$ $\quad \left]0,\infty\right[$
7. $f(x)=\sqrt{\sin x}+2$ $\quad \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$
8. $f(x)=\sqrt{1+\sqrt{x}}$ $\quad \left]0,\infty\right[$
9. $f(x)=\sqrt[3]{x}-\sqrt[5]{x}$

ثانياً : ليكن C الخطّ البياني للدالّة f المعرفة على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق $f(x)=\dfrac{x^2-3x+6}{x-1}$

اكتب معادلتي المماسّين للخطّ البياني، الموازيين للمستقيم الذي معادلته $y=-3x$

الدالّة المشتقّة لمركّب دالتين عدديّتين
(قاعدة السلسلة)

4.1

سوف تتعلّم

1-4-1 قاعدة مشتق قوة دالّة عدديّة.
2-4-1 قاعدة اشتقاق الدوالّ المثلثيّة لدالة
3-4-1 قاعدة مشتق دالة أسيّة لدالة .
4-4-1 قاعدة اشتقاق دالة لوغاريتمية لدالة.

بفرض $f_1: D \to E$, $f_2: W \to M$

فيكون $f_2 \circ f_1 : D \to M$

بحيث

$$(f_2 \circ f_1)(x) = f_2(f_1(x))$$

1.4.1 قاعدة مشتق قوة دالّة عددية

قاعدة: إذا كانتِ الدالّة g اشتقاقيّةً على مجال مفتوح I و الدالة h اشتقاقيّة على كل مجال محتوى في $g(I)$ فإنّ الدالة $h \circ g$: $(h \circ g)(x) = h(g(x))$ اشتقاقيّة على المجال I

و قاعدة اشتقاقها هي $(h \circ g)'(x) = h'(g(x))g'(x)$

مثال

لتكن الدالّة f المعرفة على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = 2(x^2+3)^2$ أوجد الدالّة f'

الحل: نلاحظ أنّ الدالّة f هي مركّب دالتين من الشكل $f = h \circ g$ حيث

$h : x \mapsto h(x) = 2x^2$ و $g : x \mapsto g(x) = x^2 + 3$

كلٌّ من الدالتين h , g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ إذن f اشتقاقيّة على $\mathbb{R}$ ومنه :

$$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = 2 \cdot 2 \cdot (g(x)) \cdot (2x) = 8x(x^2+3)$$

تدريب لتكنِ الدالّة f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=(x^3+4x-5)^4$ أوجد الدالّة f'

تطبيق قاعدة السلسلة في إيجاد قواعد اشتقاق دوالّ معيّنة :

القاعدة الأولى: (مشتق قوة دالة)

إذا كانت الدالة g اشتقاقيّةً على مجال مفتوح $I\subseteq\mathbb{R}$ وكانت الدالة f من الشكل:
$r\in\mathbb{Q}$: $f(x)=(g(x))^r$ اشتقاقية على $I_1\subseteq I$ فإنّ:

$$f'(x)=r(g(x))^{r-1}\cdot g'(x)$$

مثال

أوجد مشتقّ الدالّة f : $f(x)=(2x^2-x+3)^4$ على $\mathbb{R}$.

الحل: الدالّة $g(x)=2x^2-x+3$ اشتقاقيّة على $\mathbb{R}$ (لاحظ أنّ $f(x)=(g(x))^4$)

ويكون : $g'(x)=4x-1$ وبالتالي : $f'(x)=4\cdot[(2x^2-x+3)]^3\cdot(4x-1)$

نشاط لتثبيت القاعدة:

أوجد مشتقّ الدالّة f على $]2,+\infty[$. حيثُ: $f(x)=\sqrt{x^2-4}$

الحل

لنكتب الدالة f بالشكل: $f(x)=(x^2-4)^{\frac{1}{2}}$.

الدالة $g(x)=x^2-4$ اشتقاقية على $]2,+\infty[$ ويكون $g'(x)=2x$. إذن

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot(x^2-4)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x)$$

ومن ثَمّ $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$.

تدريب

أوجد مشتقّ الدوال الآتية على I:

1. $f(x)=(x^3+\sqrt{x}-2)^3$ على $I=]0,\infty[$.
2. $f(x)=\dfrac{1}{(x^2-1)^4}$ على $I=]-\infty,1[$.

تفكير ناقد :

إذا كانت الدالّة f زوجيّة على المجال D و اشتقاقيّة على هذا المجال فإنّ الدالّة المشتقة دالـةٌ فردية، ادرس مدى صحة هذا القول معللاً رأيك.

2.4.1 قاعدة اشتقاق الدوال المثلثية لدالة

القاعدة الثانية: مشتقّ الدوال المثلثية الأساسيّة لدالة:

إذا كانت الدالّة $g(x)$ اشتقاقيّة على مجال مفتوح $I\subseteq\mathbb{R}$ وكانت الدالّة f من الشكل:

تسلسل	الدالّة المثلثية	الدالّة المشتقّة
1	$f(x)=\sin(g(x))$	$f'(x)=g'(x)\cdot\cos(g(x))$
2	$f(x)=\cos(g(x))$	$f'(x)=-g'(x)\cdot\sin(g(x))$
3	$f(x)=\tan(g(x))$	$f'(x)=g'(x)\cdot(1+\tan^2(g(x)))$ $=\dfrac{g'(x)}{\cos^2(g(x))}$
4	$f(x)=\cot(g(x))$	$f'(x)=-g'(x)\cdot(1+\cot^2(g(x)))$ $=\dfrac{-g'(x)}{\sin^2(g(x))}$

مثال أوجد مشتقّ الدالّة f على $\mathbb{R}$ حيث: $f(x)=\sin(x^2+x)$

الحل: هنا $g(x)=x^2+x$ اشتقاقيّة على $\mathbb{R}$ و $g'(x)=2x+1$ إذن:

$$f'(x)=(2x+1)\cdot\cos(x^2+x)$$

نشاط1

لتثبيت القاعدة : أوجد مشتق الدالّة f على المجال $\left]\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right[$ حيث : $f(x)=\tan(2x+\frac{\pi}{6})$

الحل

$$f'(x)=\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)'\tan'\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=2\left(1+\tan^2\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

نشاط2

أوجد مشتقّ الدالّة f على $\mathbb{R}$ حيثُ: $f(x)=\cos^3(2x-\frac{\pi}{3})$

الحل

إنّ الدالّة f اشتقاقيّة على $\mathbb{R}$ وهي قوة دالّة فيكون مشتقّها :

$f'(x)=3\cdot\cos^{\cdots}(\ldots\ldots\ldots\ldots)\cdot\left[\cos(2x-\frac{\pi}{3})\right]'$ وبالتالي :

$f'(x)=3\cdot(\ldots\ldots\ldots\ldots)\cdot(\ldots\ldots)\cdot(\ldots\ldots\ldots\ldots)$

تدريب

أوجدِ الدالّة المشتقّة لكلّ دالّة من الدوال الآتية على المجال المذكور جانبها

1. $f(x)=\sqrt[3]{\cos(2x)+2}$: $x\in\mathbb{R}$
2. $f(x)=\sqrt{3\cos^2 x+4}$: $x\in\mathbb{R}$
3. $f(x)=\sin\left(\sqrt{2+x^2}\right)$: $x\in\mathbb{R}$
4. $f(x)=\tan(3x)$: $x\in\left]0,\frac{\pi}{6}\right[$
5. $f(x)=\sin\left(2x^2+x-4\right)$: $x\in\mathbb{R}$

3.4.1 قاعدة مشتق دالة أسيّة لدالة

القاعدة الثالثة: مشتق الدالّة من الشكل $f(x)=e^{g(x)}$

إذا كانتِ الدالّةُ $g(x)$ اشتقاقيّةً على مجال مفتوح $I\subseteq\mathbb{R}$ وكانت الدالة f من الشكل :

$f(x)=e^{g(x)}$ فإنّ مشتقها : $f(x)=g'(x)\cdot e^{g(x)}=g'(x)\cdot f(x)$

مثال

أوجد الدالّة المشتقّة للدالة f على $\mathbb{R}$ حيثُ : $f(x)=e^{(x^4-3x)}$

الحل:

لاحظ أنّ $f(x)$ من الشكل $f(x)=e^{g(x)}$ حيثُ $g(x)=x^4-3x$ و هي دالّة اشتقاقيّة على $\mathbb{R}$ ومشتقّها : $g'(x)=4x^3-3$ إذن

$$f'(x)=\left(4x^3-3\right)\cdot e^{x^4-3x}$$

تدريب : أوجدِ الدالّة المشتقّة لكل دالة من الدوال الآتية على المجال المذكور جانبها					
1	$f(x)=e^{2x-4}$	$I=\mathbb{R}$	2	$f(x)=e^{2(x^3-5x+2)}$	$I=\mathbb{R}$
3	$f(x)=e^{\frac{1-x}{x}}$	$I=]-\infty,0[$	4	$f(x)=e^{\cos\sqrt{2-x}}$	$I=]-\infty,2[$
5	$f(x)=x^2\cdot e^{-2x}$	$I=\mathbb{R}$	6	$f(x)=e^{e^x}$	$I=\mathbb{R}$

4.4.1 قاعدة اشتقاق دالة لوغارتمية لدالة

القاعدة الرابعة : مشتق الدالّة من الشكل : $f(x)=\ln(g(x))$

إذا كانتِ الدالّةُ $g(x)$ اشتقاقيةً على مجال مفتوح $I\subseteq\mathbb{R}$, وكانت الدالة f من الشكل $f(x)=\ln(g(x))$. إنّ f اشتقاقيّة على كلّ مجال محتوى في المجال I يكون فيه $g(x)>0$ ومشتقّها :

$$\boxed{f'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}}$$

نشاط

أوجد مشتقّ الدالّة f على المجال $I=]2,+\infty[$ حيثُ $f(x)=\ln(2x-4)$

الحل

إنّ $f'(x)=\left(\ln(2x-4)\right)'=\frac{(2x-4)'}{2x-4}=\frac{2}{2x-4}=\frac{1}{x-2}$

نشاط

فيما يأتي مجموعة من العبارات لكلّ منها ثلاث إجابات، واحدة منها فقط صحيحة
اقرأ كلّ عبارة جيداً و بالتشاور مع زملائك في مجموعتك
ثمّ ضع دائرة على الرمز الدال على الإجابة التي تختارونها و ترون أنها صحيحة

الرقم	العبارة	الرمز	الإجابات المقترحة
1	إذا كانت الدالّة العددية f اشتقاقيّة على $]0,\infty[$ ، و كانت $f(x)=\ln(2x)$ فإنّ	A	$f'(x)=2\ln(x)$
		B	$f'(x)=\frac{2}{\ln x}$
		C	$f'(x)=\frac{1}{x}$
2	إذا كانت الدالّة العددية f اشتقاقيّة على $]-2,+\infty[$ ، و كانت $f(x)=\ln\frac{1}{x+2}$ فإنّ	A	$f'(x)=\frac{-1}{(x+2)^2}$
		B	$f'(x)=\frac{-1}{x+2}$
		C	$f'(x)=\frac{2}{x+2}$
3	إذا كانت الدالّة العددية f اشتقاقيّة على $\left]0,\frac{\pi}{4}\right[$ ، و كانت $f(x)=\ln(\cos 2x)$ فإنّ	A	$f'(x)=2\cot 2x$
		B	$f'(x)=-2\tan 2x$
		C	$f'(x)=-2\sin 2x$
4	إذا كانت الدالّة العددية f اشتقاقيّة على $]0,+\infty[$ ، و كانت $f(x)=x+\ln x$ فإنّ	A	$f'(x)=\frac{1+x}{x}$
		B	$f'(x)=\frac{1-x}{x}$
		C	$f'(x)=1-\frac{1}{x}$
5	إذا كانت الدالّة العددية f اشتقاقيّة على D ، و كانت $f(x)=\ln(1-x)+\ln(x+1)$ فإنّ	A	$D=]-1,1[\quad , \quad f'(x)=\frac{-1}{1-x}+\frac{1}{1+x}$
		B	$D=]0,2[\quad , \quad f'(x)=\frac{-1}{1-x}+\frac{1}{1+x}$
		C	$D=]0,\infty[\quad , \quad f'(x)=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}$

تـدريـب

1 أوجدِ الدالة المشتقة لكل دالة من الدوال الآتية على المجال المذكور جانبها:

$$f(x)=\frac{1}{x}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \qquad I=]0,+\infty[$$

$$f(x)=\ln^2(x^3-1) \qquad I=]1,+\infty[$$

$$f(x)=(\ln x)^2-\ln x \qquad I=]0,+\infty[$$

$$f(x)=\ln(e^{2x}+1) \qquad I=\mathbb{R}$$

$$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) \qquad I=\mathbb{R}$$

$$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \qquad I=]1,+\infty[$$

$$f(x)=\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) \qquad I=]-1,+1[$$

2 ليكن C الخطّ البياني للدالة f المعرفة على $]-2,\infty[$ وفق $f(x)=\ln(x+2)$.

عيّن نقطة من C يكون عندها المماس Δ موازياً للمستقيم الذي معادلته $y=x$.

3 دالة عددية معرفة كما يأتي:

$$\begin{cases} g(x)=x|x| & x\neq 0 \\ g(0)=0 \end{cases}$$

1- ادرس قابلية اشتقاق الدالة g عند الصفر.

2- بيّن أنّ منحني الدالة g يقبل مماسين موازيين للمستقيم الذي معادلته $y=4x$

4 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$

1- تحقّق أنّ $x^3-3x+2=(x+2)(x-1)^2$.

2- اكتب مجال استمرار الدالة f .

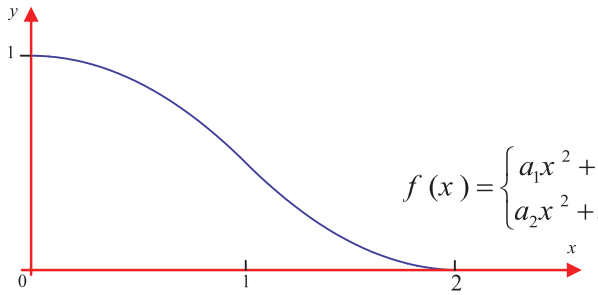
3- احسب النهايات الآتية :

$$\lim_{x \xrightarrow{>} -2} \frac{f(x)}{x+2} \quad , \quad \lim_{x \xrightarrow{<} 1} \frac{f(x)}{x-1} \quad , \quad \lim_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{f(x)}{x-1}$$

هل f اشتقاقيٌّ عند 1 ؟ علل إجابتك.

5 في الشكل المجاور

الخط البياني لدالة من النمط $f(x)=\begin{cases} a_1x^2+b_1x+c_1 & 0\le x\le 1 \\ a_2x^2+b_2x+c_2 & 1<x\le 2 \end{cases}$



إذا علمت أنّ f اشتقاقيةٌ على المجال $[0,2]$ فعيّن الأمثال.

تطبيقات الاشتقاق في اشتقاق دوالّ عدديّة متنوّعة

5.1

سوف تتعلم

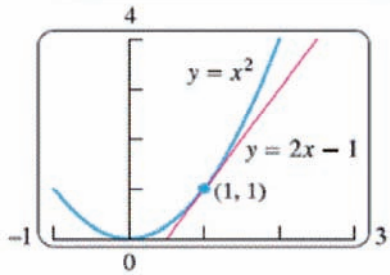
1-5-1 المشتقات المتتالية لدالة عددية.

2-5-1 تماس خطين بيانيين.

3-5-1 توظيف الاشتقاق في التقريب الخطيّ.

4-5-1 توظيف الاشتقاق في حساب معدلات التغيّر.

$$m_{\Delta} = f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$



كيف يمكن الاستفادة من مفهوم الاشتقاق في تطبيقات رياضية مختلفة؟

1.5.1 المشتقات المتتالية لدالّة عدديّة

تعريف: لتكن f دالة عددية اشتقاقية على المجال $D =]a,b[$ نسمي الدالة

$$f' : D \to \mathbb{R} : x \mapsto f'(x)$$

المشتق الأول للدالة f.

إذا كانت f' اشتقاقيةً على مجالٍ مفتوح D_1 نسمّي الدالة $f'' : D_1 \to \mathbb{R} : x \mapsto (f'(x))'$ المشتق الثاني للدالة f.

إذا كانت f'' اشتقاقية على مجالٍ مفتوح $D_2 \subseteq D_1$ نسمي الدالة $f^{(3)} : D_2 \to \mathbb{R} : x \mapsto (f''(x))'$ **المشتق الثالث للدالة f ... وهكذا نستطيع تعريف** $f^{(4)}$ ، $f^{(5)}$ ، ... ، $f^{(n)}$.

نسمي : f' ، f'' ، $f^{(3)}$ ، $f^{(4)}$ ، $f^{(5)}$ ، ... ، $f^{(n)}$ المشتقات المتتالية للدالة f كما نسمّي $f^{(n)}$ المشتق من المرتبة n $(n \in \mathbb{N}^*)$ للدالة f.

مثال 1

لتكن f الدالة المُعَرّفة على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x-3$ ، أوجد المشتقّات المتتالية للدالة f .

الحل: f اشتقاقية على $\mathbb{R}$ ، و $f'(x)=x+1$ ، f' اشتقاقية على $\mathbb{R}$ و $f''(x)=1$.

f'' اشتقاقية على $\mathbb{R}$ و $f^{(3)}(x)=0$ و أياً كان $n\geq 3$ ، كان $f^{(n)}(x)=0$.

مثال 2

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\sin x$.

1 أوجد المشتقاتِ المتتاليةَ للدالة f حتى المرتبة الرابعة.

2 بافتراض أن f اشتقاقي n مرة على $\mathbb{R}$. أثبت أنه أياً كان $n\in\mathbb{N}^*$ ، فإنّ $f^{(n)}(x)=\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2}+x\right)$.

الحل 1) الدالة f اشتقاقية على $\mathbb{R}$

$$f'(x)=\cos x \quad ، \quad f''(x)=-\sin x \quad ، \quad f^{(3)}(x)=-\cos x \quad ، \quad f^{(4)}(x)=\sin x$$

2) نثبت بالاستقراء الرياضي صحة المساواة

$$E(n):\ f^{(n)}(x)=\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2}+x\right)$$

البرهان بالاستقراء الرياضي إذا كانت $E(n)$ قضية رياضية تتعلّق بالعدد n من $\mathbb{N}$. لكي نثبت صحة $E(n)$ أياً كانت $n\geq n_0$.
أولاً : نتحقق من صحة $E(n_0)$.
ثانياً : نفترض أن $E(k)$ صحيحة في حالة $k\geq n_0$، ثم نبرهن صحة $E(k+1)$.

أولاً: في حالة $n=1$ الخاصة $E(1)$ صحيحة لأنّ

$$f'(x)=\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$

ثانياً: لنفترض أن $E(k)$ صحيحة ، أي أنّ $f^{(k)}(x)=\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}+x\right)$، ولنثبت $E(k+1)$. في الحقيقة لدينا باشتقاق طرفي المساواة السابقة :

$$f^{(k+1)}(x)=\left[f^{(k)}(x)\right]'=\left[\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}+x\right)\right]'$$
$$=\cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\cdot\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin\left(\frac{\pi(k+1)}{2}+x\right)$$

وهي الخاصّة $E(k+1)$، فهي إذن صحيحة.

تدريب

لتكنِ الدالةُ f المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ وفق : $f(x)=\frac{1}{x}$

1) أثبت أنّه أياً كان $n\in\mathbb{N}^*$ ، فإنّ $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n\cdot n!}{x^{n+1}}$

2) لتكن الدالة f المعرّفة على $]0,+\infty[$ وفق : $f(x)=\ln x$

احسب $f'(x)$ في حالة $x\in]0,+\infty[$ ، و بالاستفادة من الطلب السابق استنتج

أنّه أياً كان $n\in\mathbb{N}^*$ كان $f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{x^n}$

تطبيقات المشتق

2.5.1 تماس خطّين بيانيّين

أولاً: تماس مستقيم وخط بياني:

ليكن d مستقيماً معادلته $f_1(x)=mx+\lambda$ ، وليكن C خطاً بيانياً لدالة f اشتقاقية، ولتكن $A(x_1,y_1)$ نقطةً من المستوي المحدث بمعلمٍ متجانس عندئذٍ :

الشّرط اللازم والكافي ليكون المستقيم d مماساً للخط البياني للدالة f في النّقطة A هو:

$$f'(x_1)=m \text{ و } A\in d\cap C$$

تدريب ليكن d المستقيم الذي معادلته $y=x$ وليكن C الخطّ البياني للدالة f المعيّنة بالعلاقة: $f(x)=-\frac{1}{4}x^2+x$. أثبت أنّ d مماسٌّ للخط البياني C في مبدأ الإحداثيّات $O(0,0)$.

ثانياً: تماسّ منحنيين بيانيّين لدالتين:

إذا كان C_1 الخطّ البياني لدالة f_1 و C_2 الخطّ البياني لدالة f_2 كلاهما اشتقاقيتان. نقول إنّ الخطين البيانيين C_1 و C_2 متماسّان في النّقطة $A(x_1,y_1)$ إذا وفقط إذا كان :

[$A\in C_1\cap C_2$ و C_1 و C_2 يقبلان مماساً مشتركاً في النقطة A]

إذن يكون C_1 و C_2 متماسّان في النّقطة $A(x_1,y_1)$ إذا وفقط إذا كان

[$f_1(x_1)=f_2(x_1)$ و $f_1'(x_1)=f_2'(x_1)$]

مثال 1

ليكن C_1 الخطّ البيانيّ للدالة f_1 المُعَرّفة على $\mathbb{R}$ وفق $f_1(x)=\frac{1}{2}x^3$

وليكن C_2 الخطّ البيانيّ للدالة f_2 المُعَرّفة على $\mathbb{R}$ وفق $f_2(x)=x^2-\frac{1}{2}x$.

أثبت أنّ C_1 و C_2 متماسّان في النّقطة $A\left(1,\frac{1}{2}\right)$.

الحلّ:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(1)=\frac{1}{2}(1)^3=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad A\in C_1 \\ f_2(1)=(1)^2-\frac{1}{2}(1)=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad A\in C_2 \end{array}\right\} \Rightarrow A\in C_1\cap C_2 \text{.....}(1)$$

$$\left.\begin{array}{l} f_1'(x)=\frac{3}{2}x^2 \\ f_2'(x)=2x-\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f_1'(1)=\frac{3}{2}(1)^2=\frac{3}{2} \\ f_2'(1)=2(1)-\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow f_1'(1)=f_2'(1) \text{ .....}(2)$$

و من (1) , (2) نستنتج أنّ C_1 , C_2 متماسّان في النقطة $A\left(1,\frac{1}{2}\right)$.

ملاحظة مهمّة: من شروط تماس خطّين بيانيين لدالتين نستنتج أنّ للخطين البيانيين مماساً مشتركاً في نقطة تماسّهما.

ففي المثال السابق للخطين C_1 , C_2 مماسّ مشترك في النقطة $A\left(1,\frac{1}{2}\right)$ ميله :

$$m=f_1'(1)=f_2'(1)=\frac{3}{2}$$

و معادلته : $y-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}(x-1)$ ، و بتبسيط المعادلة نجد أنّ معادلة المماس تُكتب بالشكل :

$$3x-2y-2=0$$

مثال 2

ليكن C_1 الخطّ البيانيّ للدالة f_1 المعرّفة على $\mathbb{R}$ وفق $f_1(x)=e^{x-1}+2$ ، وليكن C_2 الخطّ البيانيّ للدالة f_2 المعرفة على $]0,+\infty[$ وفق $f_2(x)=3+\ln x$ برهن أنّهما متماسّان في النقطة $A(1,3)$.

الحلّ:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(1)=e^0+2=1+2=3 \\ f_2(1)=3+0=3 \end{array}\right\} \Rightarrow A\in C_1\cap C_2 \text{.....}(1)$$ وكذلك:

$$\left.\begin{array}{l} f_1'(x)=e^{x-1} \\ f_2'(x)=\dfrac{1}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f_1'(1)=e^0=1 \\ f_2'(1)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow f_1'(1)=f_2'(1)=1 \ldots\ldots(2)$$

من (2), (1) نستنتج أنّ C_1 و C_2 متماسّان في النقطة $A(1,3)$.

تـدريـب

1 لـيكن C_1 و C_2 خطّـين بيـانيين للـدالتين : $f_1(x)=2e^x-6,\ f_2(x)=\dfrac{-2x-4}{x+1}$ بالترتيـب، بـرهن أنّ C_1, C_2 متماسّـان فـي النقطـة $A(0,-4)$ ، و اكتـب معادلـة المماس المشـترك لهمـا فـي نقطـة تماسهما .

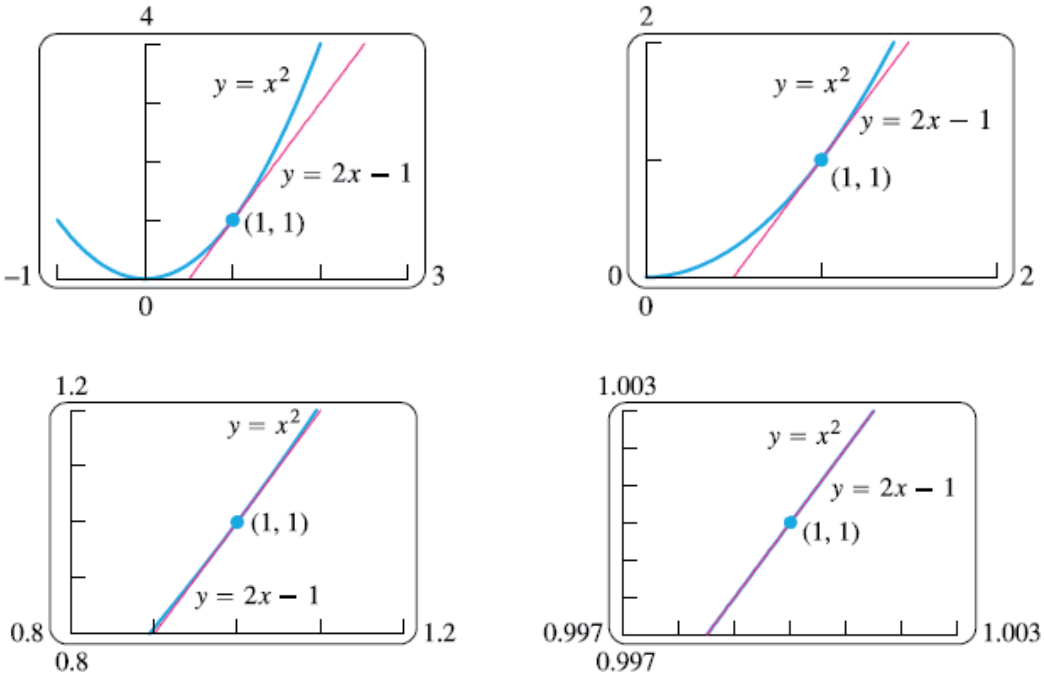
2 ليكن C_1 و C_2 خطّين بيانيين للدالتين: $f_1(x)=e^x-1, f_2(x)=x^2+x$ بالترتيب، برهن أنّ C_1, C_2 متماسان في النقطة $O(0,0)$، واكتب معادلة المماس المشترك لهما في نقطة تماسهما .

3 ليكن C_1, C_2 خطين بيانيين للدالتين: $f_1(x)=2e^{x-1}-2,\ f_2(x)=\ln(2x-1)$ بالترتيب، برهن أنّ C_1, C_2 متماسان في النقطة $A(1,0)$، و اكتب معادلة المماس المشترك لهما في نقطة تماسهما.

3.5.1 توظيف الاشتقاق في التقريب الخطي

قد لا نستطيع حساب قيم دالة f بدقة عند قيمة a من مجموعة تعريفها، فنلجأ إلى حساب تقريب لهذه القيمة باستبدال دالة أخرى بالدالة f. شريطة أن يكون حساب قيمتها عند a أكثر سهولةً. ومن أبسط الطرائق المتبعة في تقريب الدوال هي طريقة التقريب الخطي.

لنلاحظِ الخطّ البياني للدالة f : $f(x)=x^2$ والمماس لهذا الخط عند النقطة $(1,1)$ كما في الرسوم:



تبينُ لنا الأشكالُ المرسومة أنه في جوار للعدد 1 قطره صغير بقدر كافٍ، تكون تراتيب النقاط الواقعة على المماس قريبةً جداً من قيم الدالة عند كل قيمة لـ x في هذا الجوار، فهي يمكن أن تكون تقريباً جيداً لقيم الدالة.

عموماً: معادلة المماس لمنحني الدالة f في النقطة $(a, f(a))$ هي $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ والخط البياني لهذا المماس هو بيان للدالة الخطية L المعرفة بالعلاقة

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

تعريف :

إذا كانت الدالة f اشتقاقيةً عند a فإنّ التقريب الخطي للدالة في جوار للنقطة a يُعطَى بالعلاقة:

$$f(x) \approx L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

أو بالصيغة المُكافئة

$$f(a + h) \approx f(a) + f'(a)h$$

وكما أشرنا كلما كانت قيمة $h = x - a$ صغيرة كان هذا التقريب جيداً.

مثال 1

ليكن r عدداً من $\mathbb{Q}$. ولتكن الدالة $f:]-1,+\infty[\to\mathbb{R}, f(x)=(1+x)^r$. اكتب عبارة التقريب الخطي للدالة f عند النقطة $a=0$.

الحل : نعلم أنّ f اشتقاقيّة عند الصفر، ونجد بحساب بسيط أنّ $f(0)=1$ و $f'(0)=r$ إذن عبارة التقريب الخطي للدالة f عند النقطة $a=0$. هي $(1+h)^r\approx 1+rh$ عند القيم الصغيرة للمقدار h.

وهي علاقة برنولي وقد رأيتها عند دراستك للفيزياء.

مثال 2

لتكن الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin(x)$. اكتب عبارة التقريب الخطي للدالة f عند النقطة $a=0$.

الحل: نعلم أنّ f اشتقاقيّة عند الصفر، ونجد بحساب بسيط أنّ $f(0)=0$ و $f'(0)=1$ إذن عبارة التقريب الخطي للدالة f عند النقطة $a=0$. هي $\sin h\approx h$ عند القيم الصغيرة للمقدار h.

وهي خاصة نستعملها في الفيزياء لإثبات أنّ النواس الثقلي يتحرك حركة جيبيّة عند السعات الصغيرة.

مثال 3

لتكن الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: f(x)=x^5+2x-1$ أوجد قيمةً تقريبية لقيمة الدالة عند 1.01.

الحل: لما كانتِ الدالّة f اشتقاقيةً في جوار العدد 1 نستطيع تطبيق علاقة التقريب الخطي على الدالة f، عند $a=1$. حيث نحسب بسهولة $f(1)=2$ و $f'(1)=7$ فنستنتج عبارة التقريب الخطي للدالة f عند a :

$$f(1+h)\approx f(1)+f'(1)h=2+7h$$

بأخذ $h=0.01$ نجد $f(1+0.01)\approx 2+7\times 0.01=2.07$.

لاحظ أنّ القيمة الحقيقية للدالة $f(1+0.01)=2.0710100501$ لا تختلف كثيراً عن القيمة التقريبية.

مثال 4

باستعمال التقريب الخطي أوجد قيمة تقريبية للعدد $\sin(46^\circ)$.

نتأمّل الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: f(x)=\sin(x)$ وهي اشتقاقية على $\mathbb{R}$ ولدينا $f'(x)=\cos(x)$.

نلاحظ أنّ الزاوية 46° قريبة من $45^\circ=\frac{\pi}{4}$ ذات النسب المثلثية الشهيرة؛ لذلك نكتب "علاقة التقريب الخطي للدالة f" عند $a=\frac{\pi}{4}$: أي $f(a+h)\approx f(a)+f'(a)h$ فنجد

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+h\right)\approx\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}h$$

ثُم نختار $h=1^\circ=\frac{\pi}{180}$ لنستنتج أنّ $\sin\left(46^\circ\right)\approx\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{\pi}{180}\right)$.

مثال 5

باستعمال التقريب الخطي أوجد قيمة تقريبية للعدد $\sqrt{15.9}$.

لتكن الدالة $f:]0,+\infty[\to\mathbb{R}: f(x)=\sqrt{x}$ و f هي اشتقاقية على $]0,+\infty[$ و $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

نلاحظ أنّ 15.9 قريب من 16 الذي جذره التربيعي معروف. لذلك نكتب "علاقة التقريب الخطي للدالة f" عند $a=16$: أي $f(a+h)\approx f(a)+f'(a)h$ فنجد

$$\sqrt{16+h}\approx 4+\frac{1}{8}h$$

ثُم نختار $h=-\frac{1}{10}=-0.1$ لنستنتج أن $\sqrt{15.9}\approx 4-\frac{1}{80}=3.9875$.

تدريب

1) أوجد قيمة تقريبية لمساحة حلقة دائرية نصف قطر دائرتها الداخلية 19.8 و نصف قطر دائرتها الخارجية 20. (الجواب : $\Delta s\approx 7.92\pi$).

2) أوجد قيمة تقريبية للعدد: $e^{0.2}$. (الجواب : $e^{0.2}\approx 1.2$).

3) إذا علمت أن $\ln(200)\approx 5.2983$، فأوجد قيمة تقريبية للعدد $\ln(200.2)$.
(الجواب: $\ln(200.2)\approx 5.2993$).

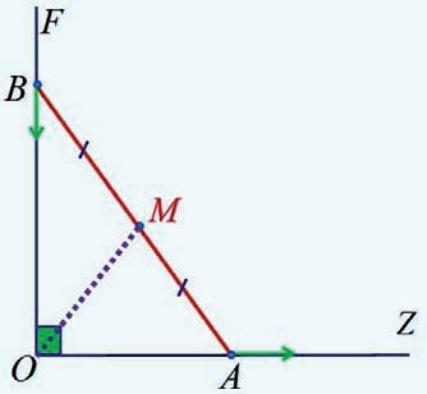
4) لتكن الدالة $f:]0,+\infty[\to\mathbb{R}: f(x)=\sqrt{x^3}$ ، وليكن C الخط البياني لهذه الدالة، احسبِ القيمة التقريبية لميل المماس للخط C في نقطة منه فاصلتها 4.1. (الجواب : $m\approx 3.075$).

5) أوجد قيمة تقريبية للعدد: $\sqrt[3]{8.1}$. (الجواب : $\sqrt[3]{8.1}=\frac{240}{120}$)

4.5.1 توظيف الاشتقاق في إيجاد معدلات التغير

إذا كان x دالة تابعة للزمن t فإننا نسمي $\frac{dx}{dt}$ معدل تغير x في اللحظة t.

مثال ZOF قطاعٌ زاوي قائم، $[AB]$ قطعة مستقيمة طولها $AB = 10\text{cm}$ ومنتصفها M، ينزلق طرفها A على الضلع OZ، وينزلق طرفها B على الضلع OF. فإذا كانت A تبتعد عن O بمعدل $2\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$ عندما يكون $OA = 6\text{cm}$. فاحسب عندئذٍ :



1) معدل اقتراب B من O.

2) معدل تغيّر OM.

3) معدل تغيّر مساحة المثلث OAB.

الحل : في اللحظة t نعرّف $OA = x = x(t)$ و $OB = y = y(t)$. واعتماداً على الفرض، في اللحظة t_0 التي يكون عندها $x(t_0) = OA = 6$ لدينا $\frac{dx}{dt}(t_0) = 2\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$.

1) يتحوّل كل من x و y في المجال $]0,10[$. واستناداً إلى مبرهنة فيثاغورث هناك علاقة بين هذين المقدارين هي $y(t) = \sqrt{100-(x(t))^2}$. المطلوب هو حساب $\frac{dy}{dt}$ لذلك نشتق العلاقة الأخيرة بالنسبة إلى الزمن t مطبقين قاعدة السلسلة : فنجد

$$\frac{dy}{dt}(t) = \frac{-x(t)}{\sqrt{100-(x(t))^2}}\cdot\frac{dx}{dt}(t) = \frac{-x(t)}{y(t)}\cdot\frac{dx}{dt}(t)$$

في اللحظة t_0 لدينا $x(t_0) = 6$ و $\frac{dx}{dt}(t_0) = 2\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$ إذن بالتعويض نجد

$$\frac{dy}{dt}(t_0) = \frac{-6}{\sqrt{100-36}}\cdot 2 = -\frac{3}{2}\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$$

2) نفترض أن $OM = L$ فيكون $L = \frac{1}{2}AB = 5\text{cm}$ (علل)، وهو ثابت لا يتبع الزمن فمعدل تغيره $0\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$.

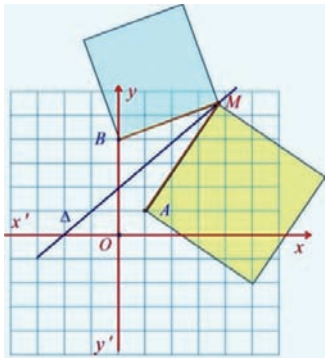
3) لتكن S مساحة المثلث OAB فيكون $S(t) = \frac{1}{2}x(t)y(t)$ ومنه نجد :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\cdot y + \frac{dy}{dt}\cdot x\right) = \frac{1}{2}\left(2\times 8 + \frac{-3}{2}\times 6\right) = \frac{7}{2}\text{cm}^2\cdot\text{s}^{-1}$$

تـدريـبات

1 في مستوٍ منسوب إلى معلمٍ متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$، نتأمل مستقيماً Δ معادلته : $x-y+2=0$. ونتأمّل النقطتين $A(1,1)$ و $B(0,4)$.

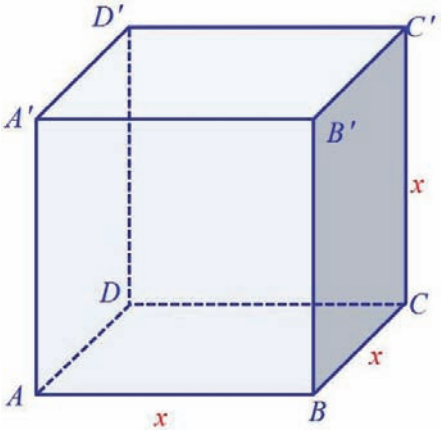
تتحرك النقطة $M(x,y)$ على المستقيم Δ. ننشئ مربعين على القطعتين MA و MB (كما في الشكل المجاور) مجموع مساحتيهما S



1) احسب معدل تغير S مجموع مساحتي المربعين في اللحظة التي يكون فيها $y=4$ إذا علمت أن معدل تغير x في تلك اللحظة يساوي $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$.

2) عيّن موضع النقطة M عندما يكون مجموع مساحتي المربعين S أصغر ما يمكن .

2 مكعّب طول حرفه x (كما في الشكل المجاور) تزداد مساحة السطح الكلي للمكعب بمعدل $0.2\text{cm}^2.\text{s}^{-1}$.

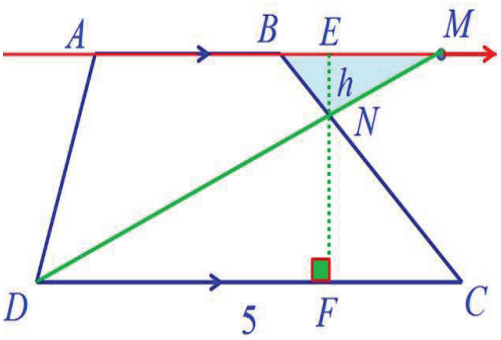


1) احسب معدل تغير طول حرف المكعب عندما يكون طول الحرف يساوي 6cm.

2) احسب معدل تغير حجم المكعب عندما يكون طول الحرف يساوي 6cm

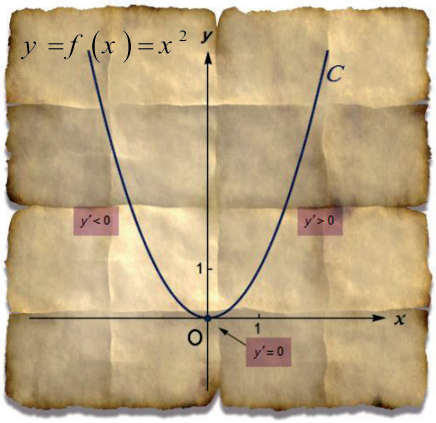
3 $ABCD$ شبه منحرف قاعدتاه AB و CD ارتفاعه يساوي 3cm و $CD=5\text{cm}$ (كما في الشكل المجاور).

تتحرك النقطة M على حامل القاعدة الصغرى AB مبتعدةً عن الرأس B بمعدل $\frac{24}{5}\text{cm.s}^{-1}$، نصل MD فيقطع BC في النقطة N. احسب معدّل تغيّر مساحة المثلث NMB في اللحظة التي يكون فيها $BM=1\text{cm}$.



توظيف المشتقات في دراسة تغيرات دالة عددية

6.1



سوف تتعلم

1-6-1 اطراد دالة عددية.

2-6-1 دراسة تغيرات دالة عددية.

1.6.1 اطّرادُ دالةٍ عدديةٍ

مبرهنة (تُقبل من دون ذكر البرهان):

إذا كانت الدالة f اشتقاقيّةً على مجال ما عندئذٍ:

[1] الشرطُ اللازم والكافي لتكون f متزايدةً تماماً على مجال هو أن يكون $f'(x) \geq 0$ على هذا المجال، وألاّ تنعدمَ على أيّ مجال جزئي من هذا المجال.

[2] الشرطُ اللازم والكافي لتكون f متناقصةً تماماً على مجال، هو أن يكون $f'(x) \leq 0$ على هذا المجال، وألاّ تنعدمَ على أيّ مجال جزئي من هذا المجال.

ملاحظة 1 : نقصدُ بدراسة اطراد دالة عددية تعرّف المجالات التي تكون الدالةُ متزايدةً تماماً عليها أو متناقصةً تماماً عليها أو ثابتةً عليها. ويمكن أن تُجرى هذه الدراسةُ بالاستفادة من المبرهنة السابقة عن طريق دراسة إشارة المشتقّ الأول، وتنظيمِ جدولٍ بهذه الدراسة إذا طُلب ذلك.

ملاحظة 2 : إذا كانت الدالةُ f مستمرةً على مجال I من النمط $[a,b]$ أو $[a,b[$ أو $]a,b]$ أو $]a,b[$، وكانت f متزايدةً تماماً على المجال المفتوح $]a,b[$ كانت f متزايدةً تماماً على المجال I.

وتبقى هذه الخاصّة صحيحة إذا استبدلنا التناقص التام بالتزايد التام في العبارة السابقة.

تطبيقات لدراسة اطراد دالة :

مثال 1

ادرسِ اطرادَ الدالةِ f المعرفةِ على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x^3+3x-2$.

الحل :

الدالة f اشتقاقية على $\mathbb{R}$ و $f'(x)=3x^2+3$

ولمّا كانت f' موجبة تماماً على $\mathbb{R}$ استنتجنا أنّ الدالةَ f متزايدةً تماماً على $\mathbb{R}$.

نشاط

ادرسِ اطرادَ الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x^4-4x+3$. واستنتج مجموعة حلولِ المتراجحة $f(x)\geq 0$.

الحل :

الدالة f اشتقاقيّةٌ على $\mathbb{R}$ و $f'(x)=4(x^3-1)=4(x^2+x+1)(x-1)$

إذن إشارةُ $f'(x)$ تماثلُ إشارةَ المقدار $(x-1)$ (لماذا ؟). وهذا يتيحُ لنا تنظيمَ جدولٍ باطراد الدالـة f كما يأتي:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

نلاحظُ من هذه الدراسة أنّ مجموعة حلول المتراجحة $f(x)\geq 0$ هي $\mathbb{R}$.

وأنّ $x=1$ هو الحل الحقيقيّ الوحيدَ للمعادلة $f(x)=0$.

إثبات المتراجحات تطبيقاً على دراسة اطراد دالة : بوجه عـام لإثبات صحة متراجحة مُعطاةٍ تحوي متغيراً واحداً، ننقلُ جميع حدودها إلى طرف واحد، فتأخذ الصيغة $f(x)\geq 0$ أو $f(x)>0$ حيثُ f هي دالة تحدّدها المتراجحةُ المطلوبة. ثُم ندرس اطرادَ الدالة f . نوضّحُ هذا الأسلوبَ في الأمثلة الآتية:

مثال

أثبت أنّه أياً كانت $x\in]0,+\infty[$ فإنّ $\ln(x)<x$

ثم استنتج أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)=0$

الحل : نلاحظ أنّ المتراجحة المطلوبة تُكافئ $f(x)>0$ حيث f هي الدالة المعرفة على $]0,+\infty[$ بالصيغة $f(x)=x-\ln(x)$. الدالة f مستمرة واشتقاقية على $]0,+\infty[$، ويكون

$$f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$$

ولأنّ المقام موجب على $]0,+\infty[$ نستنتج أنّ إشارة $f'(x)$ تماثل إشارة $(x-1)$ ومنه جدول الاطراد الآتي:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

نلاحظ من هذه الدراسة أنّ $f(x)\geq 1>0$ أياً كانت قيمة $x>0$. وهذه هي المتراجحة المطلوبة.

ولمّا كان $\ln(x)>0$ في حالة $x>1$ نستنتج من المتراجحة السابقة أنّ $0<\ln(x)<x$، وذلك مهما كان العدد x من $]1,+\infty[$.

في حالة $x>1$ يكون $\sqrt{x}>1$، فإذا طبقنا المتراجحة السابقة على $\sqrt{x}$ استنتجنا أنّ

$$0<\frac{1}{2}\ln(x)=\ln\left(\sqrt{x}\right)<\sqrt{x}$$

وبالقسمة على $\frac{x}{2}$ (الموجب) نجد

$$0<\frac{\ln(x)}{x}<2\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{2}{\sqrt{x}}$$

ولما كان $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$ استنتجنا اعتماداً على مبرهنة الإحاطة أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)=0$

تـدريـب

1. أثبت أنّ $e^x\geq 1+x$ وذلك مهما كانت x من $\mathbb{R}$. ثم استنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$.
2. أثبت أنّ $\ln(1+x)\leq x$ وذلك مهما كانت x من $]-1,+\infty[$.
3. أثبت صحة المتراجحتين $x+\frac{x^3}{3}\leq\tan x$ و $\tan x\leq x+\frac{(\tan x)^3}{3}$ في حالة $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$. ثُم استنتج من ذلك باستعمال مبرهنة الإحاطة قيمة $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\tan x-x}{x^3}$.

تطبيقات دراسة تغيرات دالة :

مثال 1

ليكن C الخطّ البيانيَّ للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x^2-2x$

1) ابحث عن مستقيماتٍ مقاربةٍ للخط C توازي المحور $x'x$.

2) ادرس تغيّراتِ الدالة f ونظّم جدولاً بها.

الحل:

1)الدالة f اشتقاقيةٌ على $\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$ نحسبُ النهاياتِ عند أطراف المجالات المفتوحة في مجموعة التعريف فنجد : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-2x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-2x)=+\infty$ إذن لا يوجد مستقيماتٌ مقاربةٌ للخط C توازي $x'x$.

2) $f'(x)=2x-2$ و منه نستنتجُ أنّ إشارة f' من إشارة $x-1$. ننظّمُ جدول التغيّرات ونضعُ عليه القيمَ المهمة مثل $f(1)=-1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

مثال 2

ليكن C الخطّ البيانيَّ للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=e^x-1$

1)ابحث عن مستقيماتٍ مقاربةٍ للخط C توازي المحور $x'x$ أو توازي المحور $y'y$.

2)ادرس تغيراتِ الدالة f ونظّم جدولاً بها.

معلومة مفيدة

$\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0,\ \lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}=0$

الحل: 1) الدالة f اشتقاقيّةٌ على $\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$ ،

نحسبُ النهاياتِ عند أطراف المجالات المفتوحة لمجموعة التعريف فنجد:

$\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-1)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x-1)=(0-1)=-1$

و منه نستنتجُ أنّ المستقيم الذي معادلته $y=-1$ مستقيم مقارب للخط C يوازي $x'x$.

2) نلاحظ أنّ $f'(x)=e^x>0$. نستنتج أن الدالة متزايدةٌ تماماً على مجموعة تعريفها . ومنه جدول التغيّرات الآتي:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

مثال 3

ليكن C الخطّ البياني للدالة f المعرفة على $]-\infty,1[$ وفق $f(x)=\ln(1-x)$

1) ابحث عن مستقيمات مقاربة للخط C توازي المحور $x'x$ أو توازي المحور $y'y$.

2) ادرس تغيرات الدالة f ونظّم جدولاً بها.

الحل: 1) الدالة f اشتقاقية على $D=]-\infty,1[$.

نحسب النهايات عند أطراف المجالات المفتوحة لمجموعة التعريف، فنجد :

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(1-x)=+\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}\ln(1-x)=-\infty$ و منه نستنتج أن $x=1$ مستقيم مقارب للخط C يوازي $y'y$.

2) $f'(x)=\dfrac{-1}{1-x}$ ومنه نستنتج أن $f'(x)<0$ لأن : $1-x>0$ على D. ننظّم جدول التغيّرات :

x	$-\infty$		1
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

القيمة الكبرى الشاملة، والقيمة الصغرى الشاملة لدالة :

تعريف. لتكن الدالة f المعرفة على D.

- نقول إن $f(x_0)$ هي قيمة كبرى شاملة للدالة f إذا وفقط إذا : مهما كانت $x\in D$ كان $f(x)\le f(x_0)$.
- نقول إن $f(x_0)$ هي قيمة صغرى شاملة للدالة f إذا وفقط إذا : مهما كانت $x\in D$ كان $f(x)\ge f(x_0)$.

مثال 1

لتكن الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\cos(x)$.

نعلم من دراستنا للدوال المثلثية، أنّه مهما كانت قيمة x من $\mathbb{R}$ فلدينا

$$\cos(\pi)=-1\le\cos(x)\le1=\cos(0)$$

فالقيمة الكبرى الشاملة للدالة cos هي 1 والقيمة الصغرى الشاملة للدالة نفسها هي -1.

مثال 2

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x^2+2x$، نلاحظ أنه مهما كانت قيمة x من $\mathbb{R}$ فلدينا $f(x)=(x^2+2x+1)-1=(x+1)^2-1\geq -1=f(-1)$

ومن ثَمّ فالقيمة الصغرى الشاملة تساوي -1 ولا توجد للدالة قيمة كبرى شاملة. لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

ملاحظة مهمة: إذا سعت دالة f معرّفة في جوار a إلى $+\infty$ عند a، فليس لهذه الدالة قيمة كبرى شاملة، وكذلك إذا سعت دالة f معرّفة في جوار a إلى $-\infty$ عند a، فليس لهذه الدالة قيمة صغرى شاملة.

مثال 3

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x+2\sin(x)$. بيّن أَتوجد للدالة f قيمة كبرى شاملة أو صغرى شاملة؟ وعلّل إجابتك.

الحل : نلاحظ أنّه مهما كانت قيمة x من $\mathbb{R}$ فلدينا $f(x)\geq x-2$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty$ ، وليس للدالة f قيمة كبرى شاملة.

ومن جهة أخرى مهما كانت قيمة x من $\mathbb{R}$ فلدينا $f(x)\leq x+2$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+2)=-\infty$ ، وليس للدالة f قيمة صغرى شاملة.

نشاط

[1] لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[-2,2]$ وفق $f(x)=\sqrt{4-x^2}$. بين أنّ لهذه الدالة قيمة كبرى شاملة وقيمة صغرى شاملة.

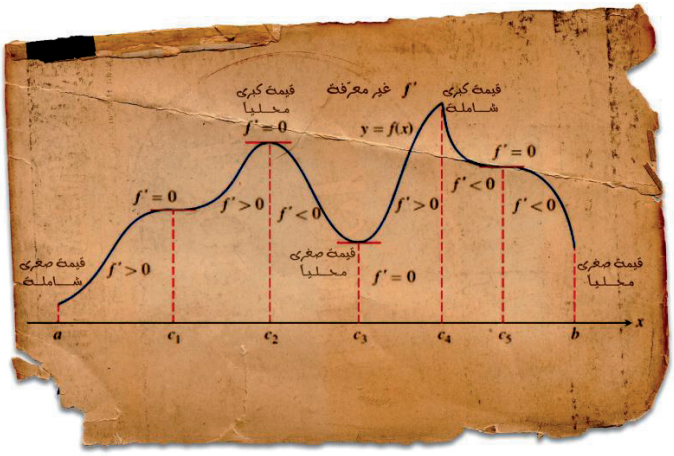
[2] لتكن الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x)=\sin x+\cos x+1$، أثبت أنّ للدالة قيمة كبرى شاملة وقيمة صغرى شاملة.

[3] بين إذا كان للدالة f قيمة كبرى شاملة أو قيمة صغرى شاملة في الحالات الآتية :

1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: f(x)=|x-2|-|x+1|$
2. $f:]-1,3]\to\mathbb{R}: f(x)=x^3$

القيم الكبرى والقيم الصغرى محلياً

7.1



سوف تتعلّم

1-7-1 تعريف القيم الكبرى والقيم الصغرى محلياً

2-7-1 إثبات أن $f(x_0)$ هي قيمة كبرى محلياً أو قيمة صغرى محلياً باستخدام التعريف.

3-7-1 مبرهنات القيمة الكبرى محلياً والصغرى محلياً.

1.7.1. تعريف القيم الكبرى والقيم الصغرى محلياً

تعريف: لتكن f الدالة المعرّفة على مجموعة جزئية D من $\mathbb{R}$، وليكن x_0 عنصراً من D.

1) نقول إن $f(x_0)$ قيمة كبرى محلياً للدالة f إذا وفقط إذا وُجِدَ مجال مفتوح D_1 يضمّ x_0 بحيث: أياً كان x من $D \cap D_1$، فإن $f(x) \le f(x_0)$.

2) نقول إن $f(x_0)$ قيمة صغرى محلياً للدالة f إذا وفقط إذا وُجِدَ مجال مفتوح D_1 يضمّ x_0 بحيث: أياً كان x من $D \cap D_1$، فإن $f(x) \ge f(x_0)$.

ملاحظة 1: ليس من الضروري أن يكون المجال D_1 محتوى في مجموعة التعريف D.

ملاحظة 2: درسنا سابقاً القيم الكبرى الشاملة والقيم الصغرى الشاملة. إنّ القيم الكبرى الشاملة هي قيم كبرى محليّة، وكذلك تكون القيم الصغرى الشاملة قيماً صغرى محليّة، (خذ $D_1 = \mathbb{R}$ في الحالتين). ولكن العكس غير صحيح كما سنرى في الأمثلة.

ملاحظة 3: في حالة لدينا دالة متزايدة تماماً أو متناقصة تماماً على مجال مفتوح، لا توجد لهذه الدالة على هذا المجال قيم كبرى محلياً ولا قيم صغرى محلياً.

2.7.1. إثبات أنّ $f(x_\circ)$ قيمة كبرى محلياً أو قيمة صغرى محلياً اعتماداً على التعريف

مثال 1

ليكن C الخطّ البياني للدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x^3-3x+2$

1) ادرس اطراد الدالة f ونظّم جدولاً بها.

2) أثبت أنّ $f(-1)$ قيمة كبرى محلياً للدالة f و أن $f(1)$ قيمة صغرى محلياً لها.

3) أتقبل الدالة f قيماً كبرى أو صغرى شاملة ؟

الحل:

1) الدالة مستمرة واشتقاقية على $\mathbb{R}$ ونلاحظ أنّ $f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)=3(x-1)(x+1)$

إذن إشارة f' هي إشارة المقدار $(x-1)(x+1)$، ومنه جدول الاطراد الآتي:

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	

حيث دوّنا فيه القيمتين $f(1)=0$ و $f(-1)=4$.

2) نقرأ القيم الكبرى والصغرى المحليّة من جدول الاطراد كما يأتي:

- لنختر $D_1=]-2,1[$ (أو أي مجال مفتوح ينتمي إليه -1 ومحتوى في $]-\infty,+1[$) فيكون لدينا من جهة أولى $D_1\cap\mathbb{R}=D_1=]-2,1[$، ومن جهة ثانية، أياً كان x من $]-2,1[$، كان $f(x)\le 4=f(-1)$ فالعدد $f(-1)=4$ يمثل قيمة كبرى محلياً للدالة f.
- وكذلك لنختر $D_1=]-1,5[$ فيكون $D_1\cap\mathbb{R}=D_1=]-1,5[$، وأياً كان x من $]-1,5[$، تحققت المتراجحة $f(x)\ge 0=f(1)$ فالعدد $f(1)=0$ قيمة صغرى محلياً للدالة f .

3) بملاحظة أنّ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$ نستنتج أن ليس للدالة f قيمة كبرى شاملة.

وكذلك، بملاحظة أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ نستنتج أن ليس للدالة f قيمة صغرى شاملة.

مثال 2

ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على $[1,+\infty[$ وفق $f(x)=2\sqrt{x-1}-x$.

1) ادرس تغيّرات الدالة f ونظّم جدولاً بها.

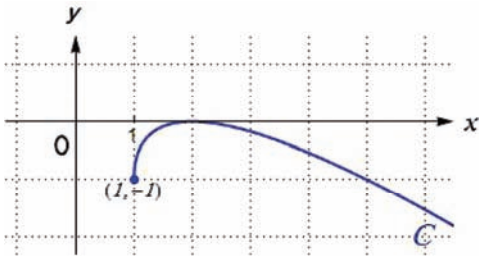
2) أثبت أن $f(2)$ قيمة كبرى محلياً للدالة f وأن $f(1)$ قيمة صغرى محلياً لها.

3) أتقبل الدالة f قيماً كبرى أو صغرى شاملة ؟

الحل: 1) f دالة مستمرة على المجال $[1,+\infty[$، و $f(1)=-1$.

لإيجاد نهاية الدالة f عند $+\infty$، نلاحظ أننا أمام حالة عدم تعيين من النمط: $\infty-\infty$.

ولإزالة عدم التعيين نلاحظُ أنّه في حالة $x>1$ لدينا:



$$f(x)=x\left(2\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1\right)$$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=(+\infty).(-1)=-\infty$.

الدالة f اشتقاقية على المجال $]1,+\infty[$ ولدينا

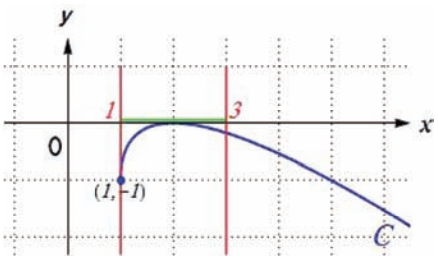
$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}-1=\frac{1-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}=\frac{2-x}{(1+\sqrt{x-1})\sqrt{x-1}}$$

إذن إشارة $f'(x)$ من إشارة المقدار $(2-x)$. وهذا ما يسمح بتنظيم جدول التغيّرات الآتي:

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	↗	0	↘	$-\infty$

وقد دوّنا عليه القيمة $f(2)=0$.

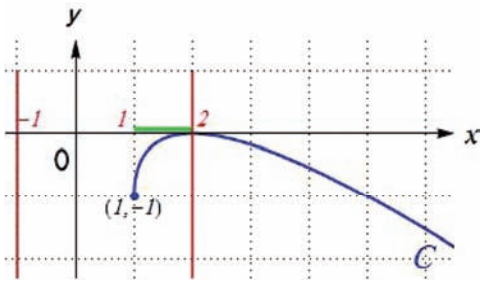
2) نلاحظُ أولاً من دراسة التغيّرات أنّ $f(2)=0$ هي قيمةٌ كبرى شاملة فهي إذن قيمة كبرى محلياً.



ومن جهة أخرى، باختيار $D_1=]-1,2[$ نجد أنّ

$$D_1\cap[1,+\infty[=[1,2[$$

وأياً كان العدد x من $[1,2[$ كان $f(x)\geq -1=f(1)$ فالعدد $f(1)=-1$ هو قيمة صغرى محلياً للدالة f.



3) لقد رأينا أنّ $f(2)=0$ هي قيمةٌ كبرى شاملة للدالة f، ولكن ليس للدالة f قيمةٌ صغرى شاملة لأننا رأينا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

3.7.1 مبرهناتُ القيمةِ الكبرى محلياً والصغرى محلياً

مبرهنة: لتكن f دالةً معرفة على مجموعة D. ولتكن x_0 نقطة من D، و $]a,b[$ مجالاً مفتوحاً تنتمي إليه x_0 ومحتوى في D. نفترض أنّ f اشتقاقية على $]a,b[$ عندئذٍ :

1) إذا كان $f'(x)>0$ على المجال $]a,x_0[$ وكان $f'(x)<0$ على المجال $]x_0,b[$، كانت $f(x_0)$ قيمة كبرى محلياً للدالة f.

2) إذا كان $f'(x)<0$ على المجال $]a,x_0[$ وكان $f'(x)>0$ على المجال $]x_0,b[$، كانت $f(x_0)$ قيمة صغرى محلياً للدالة f.

مبرهنة. لتكن f دالةً اشتقاقية على مجال مفتوح $]a,b[$. ولتكن x_0 نقطة من $]a,b[$، إذا كانت $f(x_0)$ قيمة كبرى محلياً أو صغرى محلياً للدالة f كان $f'(x_0)=0$.

ملاحظة: ليس بالضرورة أن تكون الدالة f اشتقاقية عند x_0 لتكون $f(x_0)$ قيمة كبرى أو صغرى محلياً.

ففي حالة دالة القيمة المطلقة f : $f(x)=|x|$، القيمة $f(0)=0$ قيمة صغرى محلياً (بل شاملة) لهذه الدالة، من دون أن تكون الدالة اشتقاقية عند 0

مثال 1

لتكن الدالة المعرّفة f على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}-1$

ادرس تغيّرات الدالة f و بيّن ما لها من قيم كبرى أو قيم صغرى محلياً .

الحل:

الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$، واشتقاقيّة على كل من المجالين $]1,+\infty[$ و $]-\infty,1[$. ولدينا

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{(x-1)^2}-1\right)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{(x-1)^2}-1\right)=+\infty$$

وفي حالة x من أحد المجالين $]1,+\infty[$ أو $]-\infty,1[$ لدينا $f'(x)=\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{-1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$، إذن إشارة $f'(x)$ تماثل إشارة $(x-1)$ ومنه جدول التغيّرات الآتي:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

نلاحظ أن $f'(x)<0$ على المجال $]-\infty,1[$ وأن $f'(x)>0$ على المجال $]1,+\infty[$، لذلك نستنتج أن $f(1)=-1$ قيمة صغرى محلياً للدالة f .

لاحظ أن $f(1)=-1$ قيمة صغرى محلياً مع أن f ليست اشتقاقية عند $x=1$.

ملاحظة: بالنظر إلى جدول تغيرات الدالة في المثال السابق نرى أنّ -1 هي قيمة صغرى شاملة للدالة.

هل يمكنك إثبات هذه النتيجة مباشرة من دون دراسة تغيرات الدالة ؟

مثال2

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ وفق $f(x)=\frac{x-1}{x^2}$،

1) استنتج كلّ مستقيم مقارب للخط البياني C يوازي المحور $x'x$ أو المحور $y'y$.

2) ادرس تغيّرات الدالة f ونظّم جدولاً بها، استنتج ما لها من قيم كبرى أو صغرى محلياً.

3) استنتجِ المستقرّ الفعليّ للدالة f.

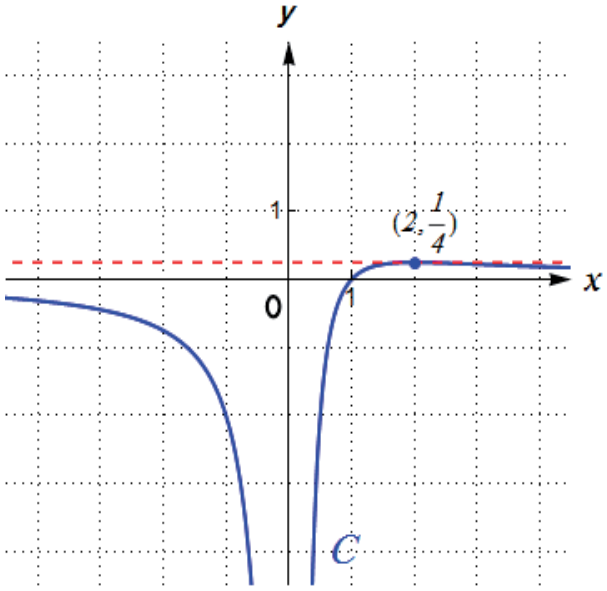
الحل: 1) الدالة f مستمرة واشتقاقية على كلٍّ من المجالين $]0,+\infty[$ و $]-\infty,0[$. ولدينا

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

ومنه نستنتج أنّ محور الفواصل $x'x$ مستقيم مقارب للخط C. ومن جهة أخرى

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}(x-1)=-\infty$$

إذن محورُ التراتيب $y'y$ مستقيم مقارب للخط C.



2) بحساب المشتقّ

$$f'(x)=\frac{x^2-2x(x-1)}{x^4}=\frac{-x^2+2x}{x^4}=\frac{-x(x-2)}{x^4}$$

نجد أنّ إشارة $f'(x)$ من إشارة $-x(x-2)$.

لننشئ جدولَ التغيّرات :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{4}$	↘	0

نلاحظ من جدول التغيّرات أنّ $f(2)=\frac{1}{4}$ قيمة كبرى محلياً.

بل إنّ القيمة $f(2)$ هي قيمة كبرى شاملة. هل يمكنك إثبات ذلك مباشرة من دون إجراء الدراسة السابقة ؟

3) إنّ $f(\mathbb{R}^*)=]-\infty,0[\cup]-\infty,\frac{1}{4}]\cup]0,\frac{1}{4}]$ إذن $f(\mathbb{R}^*)=]-\infty,\frac{1}{4}]$.

يمكنُ التحقّق من النتائج التي حصلنا عليها بملاحظة الخط البياني للدالة f.

مثال3

ليكن C الخطّ البيانيَّ للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ وفق $f(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}$

1) عيّن نهاياتِ الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف، ثمّ استنتج المستقيمات المقاربة للخط C.

2) ادرس تغيّراتِ الدالة f ونظّم جدولاً بها، ثمّ بيّن أنّه لا يوجد للدالة قيمٌ كبرى أو صغرى محلياً.

الحل:

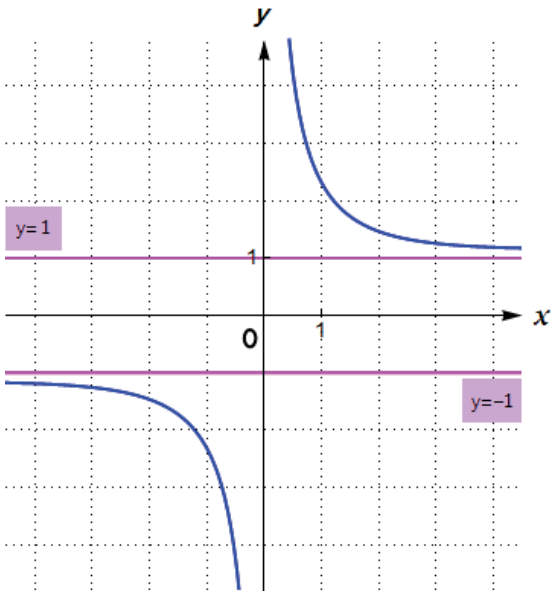
1) ينعدم المقام عند $x=0$ فقط. إذن الدالة f مستمرّةٌ واشتقاقيةٌ على كلٍّ من المجالين: $]0,+\infty[$ و $]-\infty,0[$

في جوار $+\infty$: لدينا $f(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}=\frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}$ ومن ثَمّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

نستنتجُ أنّ المستقيمَ الذي معادلتُهُ $y=1$ مستقيمٌ مقارب للخط C يوازي $x'x$.

في جوار $-\infty$: لدينا $f(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}$ ولأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ نجد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$.

و منه نستنتجُ أنّ المستقيم الذي معادلته $y=-1$ مستقيم مقاربٌ للخط C يوازي $x'x$



في جوار 0 : لدينا $f(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}=(e^x+1)\cdot\frac{x}{e^x-1}\cdot\frac{1}{x}$

ولكن

$$\lim_{x\to0}(e^x+1)=2\,,\lim_{x\to0}\frac{x}{e^x-1}=1\,,\ \lim_{\substack{x\to0\\<}}\frac{1}{x}=-\infty\,,\ \lim_{\substack{x\to0\\>}}\frac{1}{x}=+\infty$$

فيكون

$$\lim_{\substack{x\to0\\<}} f(x)=-\infty\,,\ \lim_{\substack{x\to0\\>}} f(x)=+\infty$$

إذن محورُ التراتيبِ الذي معادلتُهُ $x=0$ مستقيمٌ مقارب للخط C.

2) بحساب المشتقّ عند x من $]0,+\infty[$ أو $]-\infty,0[$ نجد

$$f'(x)=\frac{e^x(e^x-1)-e^x(e^x+1)}{(e^x-1)^2}=\frac{e^{2x}-e^x-e^{2x}-e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{-2e^x}{(e^x-1)^2}$$

وهو سالب تماماً، فالدالةُ متناقصةٌ تماماً على كلّ مجال من مجالات مجموعة التعريف، ومنه جدولُ التغيّرات:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	-1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1

نلاحظُ من جدولِ التغيّراتِ أو الرسم البياني عدمَ وجود قيمٍ كبرى أو صغرى محلياً للدالة f.

تطبيقات القيم الكبرى والصغرى

8.1

سوف تتعلم

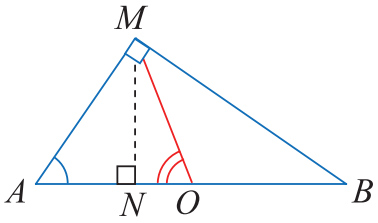
خطوات حلّ مسألة تتضمنُ تطبيقاتِ القيم الكبرى والصغرى لدالة عددية بطرائقَ مختلفة.

مقدمة:

- من بين جميع المجسّمات في الفراغ التي حجمُها يساوي مقداراً ثابتاً معطى V. أيّها تكون مساحة سطحه الكلي أصغر ما يمكن ؟
- تأخذُ قطرةُ المطر عند سقوطِها الشكل الذي تمليه عليها قوى التوترِ السطحي، وهو الشكلُ الذي يجعلُ مساحةَ سطحِها الكليّ أصغرَ ما يمكن. فكّر في الأمر وأجب عن السؤال السابق ؟

المسألة الأولى

A و B نقطتان ثابتتان في المستوي تحقّقان $AB = 8$. ولتكن M نقطة متحركة في المستوي بحيث يكون المثلث MAB قائم الزاوية في M، لتكن N المرتسمَ القائمَ للنقطة M على AB، والمطلوب تعيين M ليكون MN أكبر ما يمكن.



الحل:

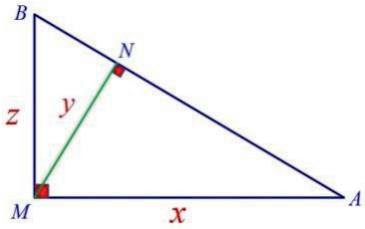
تتحوّل M في المستوي مع بقاء المثلث MAB قائماً في M و $AB = 8$. يتعيّنُ موقعُ M بعدّة أساليب :

- بتعيين المقدار AM؛ لأنّ مبرهنةَ فيثاغورث تتيحُ عندئذ حساب BM ومن ثَم المثلث MAB.
- بتعيين المقدار AN؛ لأنّ العلاقاتِ العدديةَ في المثلث القائم تتيح عندئذٍ حسابَ AM، ومن ثم تعيين المثلث MAB.
- بتعيين الزاوية $\angle BAM$؛ لأنّ تعيين هذه الزاوية يتيح تعيين $AM = 8\cos(\angle BAM)$، ومن ثم تعيين المثلث MAB.
- بتعيين الزاوية $\angle AOM$. حيثُ O منتصف AB، لأنّ M تتحرّكُ على الدائرة التي قطرها AB.

والسؤال هو أيّ الأساليب نختار ؟

في الحقيقة، ما يوجّهنا إلى الاختيار الصحيح هو مدى صعوبة الحسابات في كلّ أسلوب من الأساليب.

لنحاول إذن تقييمَ صعوبةِ الحسابات المتعلّقة في كلّ حالة.



الحالة الأولى : لنرمز بالرمز x إلى الطول AM ، ولأنه يمثّل طولَ ضلع قائمة في مثلث طول وتره 8 استنتجنا أنّ x تنتمي إلى المجال $]0,8[$.

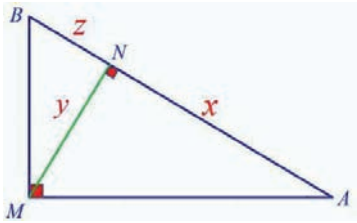
لنسعَ إلى حساب الطول MN بصفته دالةً تابعةً للمتغير x.

نستنتج استناداً إلى مبرهنة فيثاغورث أنّ $BM=\sqrt{64-x^2}$.

واعتماداً على العلاقات العددية في المثلث القائم لدينا : $MA\cdot MB=AB\cdot MN$ (أو بحساب مساحة المثلث)

إذن

$$MN=\frac{1}{8}AM\cdot BM=\frac{1}{8}x\sqrt{64-x^2}$$



فإذا عرّفنا الدالة f على المجال $]0,8[$ بالصيغة :

$$f(x)=\frac{1}{8}x\sqrt{64-x^2}$$

كان لدينا $MN=f(x)$. وآلتِ المسألةُ إلى تعيين القيم الكبرى الشاملة للدالة f على المجال $]0,8[$.

تسمح لنا دراستُنا السابقة بالمتابعة من هذه النقطة، ولكن لن نفعل ذلك الآن بل سننظر في الأساليب الأخرى.

الحالة الثانية : لنرمزْ بالرمز x إلى الطول AN . ولأنه يمثّل طول قطعة من الوتر AB استنتجنا أنّ x تنتمي إلى المجال $]0,8[$.

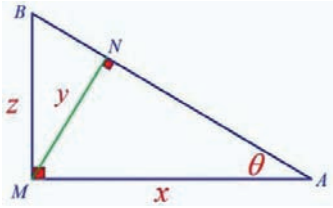
عندئذ يكون من السهل تعينُ طول القطعة BN : $BN=AB-AN=8-x$

ولكن نعلم من العلاقات العددية في المثلث القائم أنّ $MN^2=AN\cdot BN$. أي

$$MN^2=x(8-x)$$

فإذا عرّفنا الدالة g على المجال $]0,8[$ بالصيغة :

$$g(x)=x(8-x)$$



كان لدينا $MN^2 = g(x)$. ولأنّ المقدار الموجب MN يكون أكبر ما يمكن عندما يكون مربّعه أكبرَ ما يمكن، استنتجنا أنّ المسألةَ المطروحةَ تؤول إلى تعيين القيم الكبرى الشاملة للدالة g على المجال $]0,8[$.

وهنا أيضاً تسمحُ لنا دراستُنا السابقة بالمتابعة، ولكن لن نفعل ذلك الآن بل سننظر في الأساليب الأخرى.

الحالة الثالثة : لنرمز بالرمز θ إلى قياس الزاوية $\angle MAB$. وهو من ثَمّ عددٌ من المجال $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. اعتماداً على تعريف النسب المثلثية لدينا

$$\frac{MA}{BA} = \cos(\theta) \quad \text{و} \quad \frac{MN}{MA} = \sin(\theta)$$

إذن $\frac{MN}{AB} = \sin(\theta)\cos(\theta)$ ، فإذا تذكّرنا أنّ $AB = 8$ استنتجنا أنّ

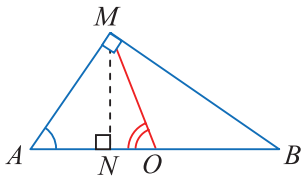
$$MN = 8\sin(\theta)\cos(\theta) = 4\sin(2\theta)$$

فإذا عرّفنا الدالة h على المجال $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ بالصيغة :

$$h(\theta) = 4\sin(2\theta)$$

كان لدينا $MN = h(\theta)$. وتؤول المسألة إلى تعيين القيم الكبرى الشاملة للدالة h على المجال $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

ومجدداً يمكنُنا بالاستفادة ممّا تعلمناه أن ندرس اطّراد الدالة h ، وأن نحدّد قيمَها الكبرى الشاملة ولكننا سننظر قبل ذلك في الحالة الرابعة.



الحالة الرابعة : لنرمز بالرمز θ إلى قياس الزاوية $\angle AOM$. حيث O هي منتصف AB . نعلم أنّ M تتحرك على الدائرة التي قطرها AB ، لذلك لدينا $OM = \frac{1}{2}AB = 4$ ، و θ تتحول في المجال $]0,\pi[$. واعتماداً على تعريف النسب المثلثية نجد $MN = OM\sin(\angle AOM)$ ، أو

$$MN = 4\sin(\theta)$$

فإذا عرّفنا الدالة k على المجال $]0,\pi[$ بالصيغة :

$$k(\theta) = 4\sin(\theta)$$

كان لدينا $MN = k(\theta)$.وتؤول المسألة إلى تعيين القيم الكبرى الشاملة للدالة k على المجال $]0,\pi[$.

وأخيراً، بملاحظة الدوال f و g و h و k نرى أن أبسطها وأسهلها دراسة هي الدالة k ؛ إذ نعلم أنّ $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ هي قيمة كبرى شاملة للدالة $\sin$ على $]0,\pi[$ ، ومن ثَمّ تكون $k(\frac{\pi}{2}) = 4$ قيمة كبرى شاملة للدالة k على $]0,\pi[$. وهي المرة الوحيدة التي تبلغ فيها الدالة k هذه القيمة على هذا المجال.

إذن أكبر قيمة يبلغها المقدار MN هي 4 ويبلغها عندما يكون المثلث القائم AMB متساوي الساقين.

تدريب

ادرسِ اطّرادَ كلٍّ من الدوالّ f و g و h المعرّفة كما يأتي، وعيّن قيمَها الكبرى الشاملة :

$$f :]0,8[\to \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{8}x\sqrt{64-x^2},$$

$$g :]0,8[\to \mathbb{R} : g(x) = x(8-x),$$

$$h : \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} : h(x) = 4\sin(2\theta)$$

العبرة:

عند حلّ مسائلَ مشابهةٍ للمسألة السابقة :

1 ـ نحدّدُ المقدارَ المطلوب تعيين أكبر قيمة له، أو أصغر قيمة له، و نـعدّه المتغيّرَ المستهدفَ، ونرمز له برمز مناسب.

2 ـ المسألة تتضمّن متغيراتٍ كثيرةً ، يجب أن نحدّد من بينها متغيراً أساسياً مناسباً نعدّه المتغيّرَ المستقلَّ و نرمزله برمز مناسب، ونحدد مجموعةَ القيم التي يتحوّل فيها.

3 ـ ثُمّ نبحثُ عن عبارة المتغيّر المستهدف بدلالة المتغيّر الأساسي بصيغة دالة.

4 ـ ندرسُ اطرادَ الدالة لتحديد أكبر قيمة أو أصغر قيمة تأخذها تبعاً لطبيعة المسألة.

المسألة الثانية:

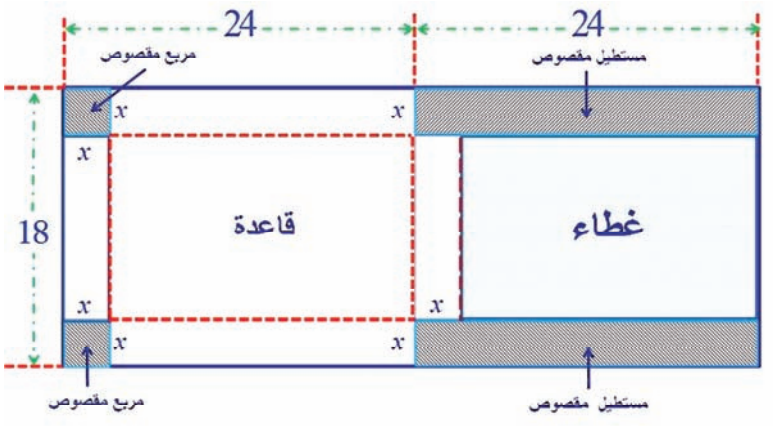
قطعةٌ من الورق المقوّى على شكل مستطيل بُعداه 18 و 48، نريد أن نصنع منها علبةً ذاتَ غطاء على شكل متوازي مستطيلات، حيث نقتطعُ عند رأسين منها مربعين طولُ ضلع كلّ منهما x، ونقتطع عند الرأسين الآخرين مستطيلين عرضُ كلٍّ منهما x و طولُهُ جزء من طول قطعة الورق، ثم نثني الأجزاء المتبقية بزاوية قائمة إلى الجهة ذاتها، وأخيراً نثني الجزء الملوّن ثانية لنشكّلَ غطاء العلبة.

1) أوجدْ حجمَ هذه العلبة بدلالة x.

2) أوجد بعدي كلِّ مستطيل اقتُطِعَ ليكون حجمُ العلبة أكبرَ ما يمكن.

الحل:

يوضح الشكلُ المرسوم عمليةَ صنع العلبة المطلوبة :



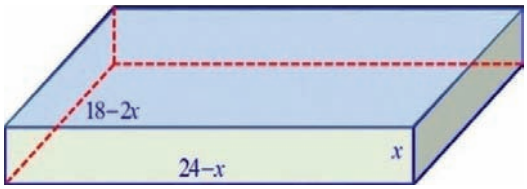
1) من الواضح أنَّ طريقةَ الإنشاء تفترض أنّ $0 < x < 9$، عندئذٍ يكون طول قاعدة العلبة $24-x$، وعرضُ قاعدة العلبة $18-2x$، وارتفاعها x.

عندئذٍ يُعطى حجمُ العلبة بدلالة x بالصيغة

$$V(x)=(24-x)\cdot(18-2x)\cdot x$$

ومنه نجد $V(x)=2x^3-66x^2+432x$

لاحظ شكل العلبة بعد تصنيعها.



2) لندرسِ اطرادَ الدالة V المعرّفة على المجال $]0,9[$ بالصيغة : $V(x)=2x^3-66x^2+432x$.

نلاحظ بحساب المشتق V' أنّ

$$V'(x)=6x^2-132x+432=6\left(x^2-22x+72\right)=6(x-4)(x-18)$$

أو

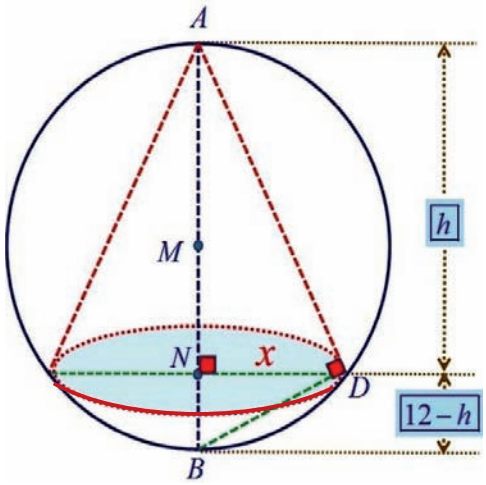
$$V'(x)=\underbrace{4(18-x)}_{\text{موجب عندما } 0<x<9}(4-x)$$

إذن إشارة $V'(x)$ تماثل إشارة $4-x$ على $]0,9[$. ومنه جدول الاطراد الآتي:

x	0		4		9
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$		↗	800	↘	

من جدول الاطراد نستنتج أنّ أكبر قيمة للحجم V هي 800، يبلغُها عندما $x=4$ و يكون بعدا المستطيل المقصوص عندئذ 4 و 24 .

المسألة الثالثة : قُطِعَتْ كرةٌ مركزها M و نصف قطرها $R=6$ بمستوٍ فكان المقطع دائرة، ليكن N مركزَها، ثم نرسم محور الدائرة المُقطّع فيلاقي الكرة في النقطتين A و B كما في الشكل، و ليكن V حجم المخروط الذي رأسه A (بحيث يكون مركز الكرة بين A و N) وقاعدته الدائرة المقطع (كما في الشكل) .



بيّن كيف نفعل ذلك ليكون حجم المخروط V أكبر ما يمكن.

الحل:

طريقة أولى:

أوّل ما يتبادر إلى الذهن هو افتراض نصف قطر دائرة المقطع ND متغيّراً فنضع $x=ND$، من الواضح أنّ نصف قطر دائرة المقطع يتحوّل بين 0 و $R=6$ وهي حالة كون المقطع دائرةً عظمى. إذن يتحوّل x في المجال $]0,6]$.

أمّا ارتفاع المخروط فيساوي $h=AN=AM+MN$، لأنّ M تقع بين A و N. فإذا استفدنا من مبرهنة فيثاغورث في المثلث القائم MND. وجدنا $h=6+\sqrt{36-x^2}$.

ومنه نستنتج أنّ حجم المخروط $V(x)$ يعطى بدلالة x بالصيغة :

$$V(x)=\frac{1}{3}\pi x^2\cdot\left(6+\sqrt{36-x^2}\right)$$

حيث $x\in]0,6]$.

يمكننا هنا أنّ نتابع دراسة اطراد الدالة V على المجال $]0,6]$. ولكن من الواضح أيضاً أنّ صيغتها معقدة وخاصّة بوجود دالة الجذر التربيعي.

تذكر أن
حجم المخروط
يساوي ثلث جداء
مساحة قاعدته
بارتفاعه.

طريقة ثانية:

لنحاول إذن البحثَ عن متغيّر آخرَ غير ND. لنختر مثلاً الزاوية $\angle NMD$ ولنضعْ متغيّراً $\theta=\angle NMD$، من الواضح أنّ θ تتحوّل في المجال $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ لأنّنا افترضنا أنّ M تقع بين A و N. وعندها يكون $ND=6\sin\theta$، و $h=AM+MN=6+6\cos\theta$.

ومنه نستنتج أنّ حجم المخروط $V(\theta)$ يُعطى بدلالة θ بالصيغة :

$$V(\theta)=72\pi\sin^2\theta\cdot(1+\cos\theta)$$

حيث $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

يمكنُنا هنا متابعة دراسة اطراد الدالة V على المجال $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. فنلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} V'(\theta) &= 72\pi\left(2\sin\theta\cos\theta\cdot(1+\cos\theta)-\sin^3\theta\right) \\ &= 27\pi\sin\theta\left(2\cos\theta+2\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)\right) \\ &= 72\pi\sin\theta\left(3\cos^2\theta+2\cos\theta-1\right) \end{aligned}$$

ولكن $3t^2+2t-1=(3t-1)(t+1)$، إذن

$$V'(\theta) = \underbrace{72\pi\sin\theta(1+\cos\theta)}_{\text{مقدار موجب عندما } 0<\theta\le\frac{\pi}{2}}(3\cos\theta-1)$$

وإشارة $V'(\theta)$ تتفق مع إشارة المقدار $(3\cos\theta-1)$ على المجال $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$، فإذا كانت θ_0 هي الزاوية الوحيدة من المجال $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ التي تحقّق $\cos\theta_0=\frac{1}{3}$ (وهي تساوي تقريباً 70° ولكن هذا غير مهم) كان لدينا جدول الاطراد الآتي :

θ	0		θ_0		$\frac{\pi}{2}$
$V'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$V(\theta)$		$\nearrow$	$V(\theta_0)$	$\searrow$	

إذن $V(\theta_0)$ هي قيمة كبرى شاملة للدالة V على المجال $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$، ولحسابها نلاحظ أنّ $\cos\theta_0=\frac{1}{3}$ يقتضي $\sin\theta_0=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. إذن

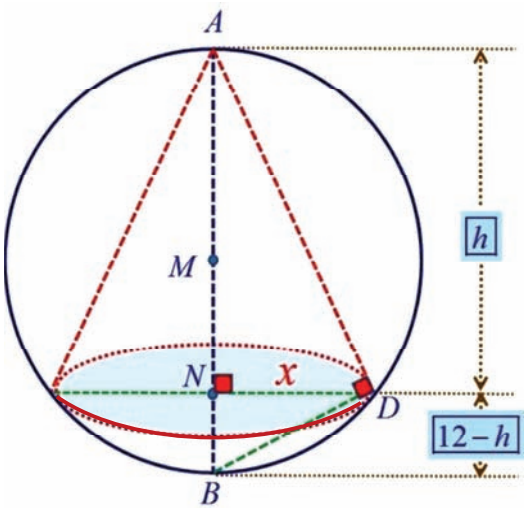
$$V(\theta_0)=72\pi\sin^2\theta_0\cdot(1+\cos\theta_0)=72\pi\frac{8}{9}\cdot\frac{4}{3}=\frac{256\pi}{3}$$

وفي هذه الحالة يكون

$$h=6+6\cos\theta_0=8 \quad \text{و} \quad ND=6\sin\theta_0=4\sqrt{2}$$

وبالنظر إلى هذه النتيجة نلاحظ أنّ ارتفاع المخروط الموافق لأكبر قيمة للحجم يساوي 8 ولا تحوي صيغته جذوراً فلماذا لم نفكّر باعتماد ارتفاع المخروط متغيراً ؟ هذه هي الفكرة وراء الطريقة الثالثة.

طريقة ثالثة لنعرّفْ إذن متغيّراً جديداً هو ارتفاع المخروط $NA = x$. ولأنّ M تقع بين A و N نستنتج أنّ المتغيّر x يتحوّل في المجال $[6,12[$.



وعندئذ يكون $NB = 12 - x$، واستناداً إلى العلاقات العددية في المثلّث القائم ADB، لدينا $ND^2 = NA \cdot NB$ إذن

$$ND^2 = x(12 - x)$$

وعلى هذا يُعطى حجمُ المخروط $V(x)$ بالصيغة

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi ND^2 \cdot NA = \frac{1}{3}\pi x^2 (12 - x)$$

ومنه نستنتج أنّ حجم المخروط $V(x)$ يُعطى بدلالة ارتفاعه x بالصيغة :

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi x^2 (12 - x)$$

حيث $x \in [6,12[$. وهذه الدالة أكثرُ وضوحاً وأسهل دراسةً من سابقتيها.

لنتابع دراسة اطراد الدالة V على المجال $[6,12[$. فنلاحظ أنّ

$$V'(x) = \frac{\pi}{3}\left(24x - 3x^2\right) = \pi x(8 - x)$$

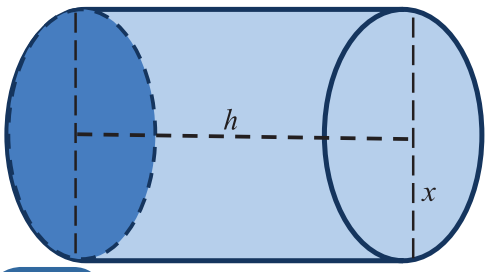
إذن إشارة $V'(x)$ على المجال $[6,12[$ تتفق مع الإشارة $(8 - x)$، ومنه جدول الاطراد الآتي :

x	6		8		12
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$		↗	$V(8)$	↘	

إذن $V(8) = \frac{256\pi}{3}$ هي قيمة كبرى شاملة للدالة V على المجال $[6,12[$، تبلغها دالة الحجم عندما يكون ارتفاع المخروط مساوياً 8، وهي نتيجة تتفق مع ما وجدناه في الطريقة السابقة.

المسألة الرابعة : يُراد صنعُ خزان ماء من مادة الصفيح بشكل أسطوانة حجمُها $V = (2\pi)\text{m}^3$.

1. أوجد S مساحة السطح الكلي للخزان بدلالة نصف قطر قاعدته الذي نرمز إليه x.
2. ادرسِ اطراد الدالة $x \mapsto S(x)$ ونظّم جدولاً بها، وعيّن قيمتها الصغرى الشاملة، واحسبِ ارتفاع الخزان عندئذ.



الحل: 1– لنفترض أن نصفَ قطر قاعدة الخزان يساوي $r = x$ فهو إذن عددٌ موجب تماماً، أي $x \in]0,+\infty[$. وإذا كان

ارتفاع الخزان h كان حجمه $V=\pi x^2\cdot h$، ولكن لدينا بحسب الفرْض $V=(2\pi)\text{m}^3$ إذن $h=\frac{2}{x^2}$

تُعطى مساحةُ السطح الكلّي للخزان بالصيغة : $S=2\pi rh+2\pi r^2$ وعليه

$$S(x)=2\pi x\frac{2}{x^2}+2\pi x^2=2\pi\left(x^2+\frac{2}{x}\right)$$

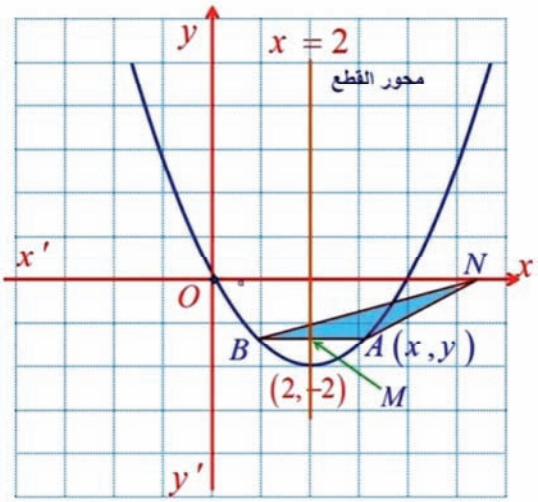
2– الدالة S معرّفة ومستمرّة واشتقاقية على المجال $]0,+\infty[$، ولدينا

$S'(x)=2\pi(2x-\frac{2}{x^2})=4\pi\left(\frac{x^3-1}{x^2}\right)=\frac{4\pi(x^2+x+1)}{x^2}(x-1)$ إذن إشارة $S'(x)$ على المجال $]0,+\infty[$ تتفق مع إشارة $(x-1)$، إذن يمكننا وضع جدول الاطراد الآتي :

x	0		1		$+\infty$
$S'(x)$		$-$	0	$+$	
$S(x)$		$\searrow$	$S(1)=6\pi$	$\nearrow$	

إذن $S(1)=6\pi$ هي قيمة صغرى شاملة للدالة S على المجال $]0,+\infty[$، تبلغها الدالة S عندما يكون قطرُ قاعدة الأسطوانة مساوياً ارتفاعَها.

المسألة الخامسة: في الشكل المرسوم جانباً قَطْعٌ مكافئ $\mathcal{P}$ معادلته: $y=f(x)=\frac{x^2}{2}-2x$.



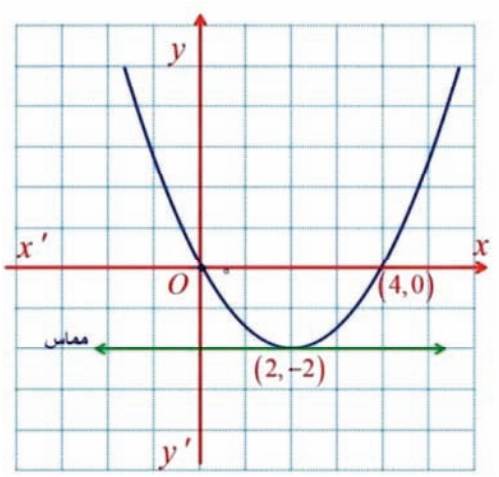
لتكن $A(x,y)$ نقطةً من القطع $\mathcal{P}$ فاصلتها x من المجال $]2,4[$. نرسم من A وتراً $[AB]$ للقطع $\mathcal{P}$ موازياً محورَ الفواصل $x'x$. وأخيراً لتكن N نقطة ما من محور الفواصل $x'x$.

1) عيّن x لتكون مساحةُ المثلث NAB أكبر ما يمكن.

2) ليكن $ABB'A'$ المستطيلَ الذي أحدُ أضلاعه $[AB]$ ويقع ضلعُهُ الآخرُ على محور الفواصل $x'x$. عيّن طول الوتر $[AB]$ عندما تكون مساحة المستطيل $ABB'A'$ أكبر ما يمكن.

الحل : 1) إنّ المستقيم Δ الذي معادلته $x=2$ هو محور تناظر للقطع $\mathcal{P}$، ولأنّ الوتر $[AB]$ عموديّ على محور القطع المكافئ كان محور القطع محورَ تناظر للقطعة $[AB]$، ومن ثَمّ B نظيرة A بالنسبة إلى Δ.

وعليه إذا كان (x,y) هما إحداثيا النقطة A كان $(4-x,y)$ هما إحداثيا النقطة B وكان طول الوتر $[AB]$ مساوياً $AB=x-(4-x)=2x-4$:



لمّا كانت N تقع على محور الفواصل الموازي للوتر $[AB]$ استنتجنا أنّ ارتفاع المثلث ANB يساوي $-y$.
وعليه تُعطى مساحة المثلث $S(x)$ بدلالة x، فاصلة النقطة A، بالصيغة

$$S(x)=\frac{1}{2}(-y)(2x-4)=-\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)(x-2)$$
$$=-\frac{1}{2}x^3+3x^2-4x$$

لندرس إذن اطرادَ هذه الدالة على المجال $]2,4[$، نلاحظ بحساب بسيط أنّ

$$S'(x)=-\frac{3}{2}x^2+6x-4=\frac{1}{2}(-x^2+12x-8)$$

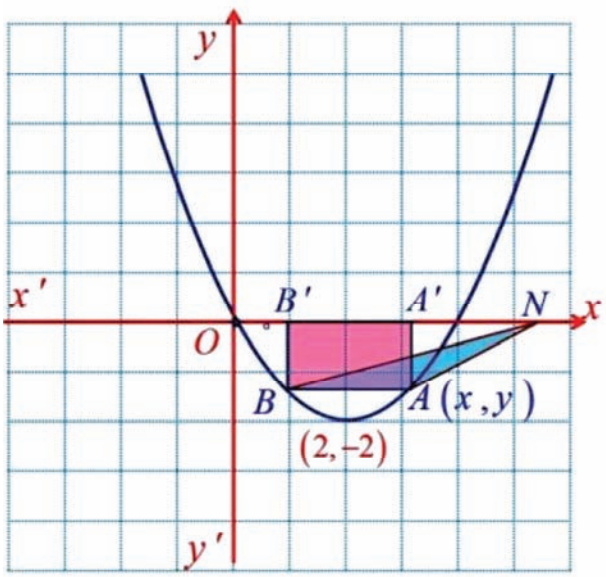
لكثير الحدود $x^2-12x+8$ جذران :

الأول $x_1=2-\frac{2\sqrt{3}}{3}<2$ وهو لا ينتمي إلى مجال الدراسة $]2,4[$،

والثاني $x_2=2+\frac{2\sqrt{3}}{3}$ وهو ينتمي إلى المجال $]2,4[$. (لماذا ؟) يتيح لنا هذا وضع جدول الاطراد الآتي :

x	2		x_2		4
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$		$\nearrow$	$S(x_2)$	$\searrow$	

إذن $S(x_2)=\frac{8\sqrt{3}}{9}$ هي قيمة كبرى شاملة للدالة S على المجال $]2,4[$، تبلغها الدالة عند $x_2=2+\frac{2\sqrt{3}}{3}$.



2) إذا رمزنا بالرمز S_1 إلى مساحة المستطيل $ABB'A'$ استنتجنا مباشرة أنّ S_1 تساوي ضعفي مساحة المثلث ANB، أي $S_1=2S$ لذلك تكون S_1 أكبرَ ما يمكن عندما تكون S أكبر ما يمكن، وعندها

يكون $S_1=\frac{16\sqrt{3}}{3}$ وهي توافق النقطة A التي فاصلتها x تساوي $x_2=2+\frac{2\sqrt{3}}{3}$. وعندها يكون $AB=2x_2-4=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

تدريبات

1 أوجدْ عدداً حقيقياً موجباً تماماً إذا علمْتَ أن ناتج جمع هذا العددِ إلى مقلوبه أصغرُ ما يمكن.

2 مستطيل $ABCD$ يقع رأساه A و B على منحني القطع المكافئ الذي معادلته $y=4-x^2$. ورأساه C و D على الفواصل، وحيث يقع المستطيل داخل القطع، أوجد بعدي هذا المستطيل كي تكون مساحته أكبر ما يمكن.

3 سلكٌ طولُهُ 18 ، نريد أن نصنع منه مثلّثين كلٌّ منهما متساوي الأضلاع، احسبْ طول ضلع كلٍّ من المثلثين ليكون مجموع مساحتيهما أصغرَ ما يمكن.

4 ليكن C الخطَّ البياني للدالة $f(x)=x^5-10x^2$، أوجد أصغرَ ميل لخطها البياني وعيّنِ النقطة الموافقة له . (الجواب $-15,(1,-9)$)

5 شبه منحرف $ABCD$ متساوي الساقين قاعدتاه AB و CD، ومحيطُهُ يساوي $40m$ فيه $C=60^0$. احسب أطوال أضلاعه لتكونَ مساحتُهُ أكبرَ ما يمكن. (الجواب : $10,10,5,15$)

تمارين الوحدة

1 احسب نهاية كلّ دالة f عند a الموافقة في حال وجودها :

1) $f(x)=\frac{x^3+1}{x^2+1}$: $a=-1$ 2) $f(x)=\sqrt[3]{\frac{16x^7-4x^5}{2x^7+1}}$: $a=+\infty$

3) $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos 2x}$: $a=0$ 4) $f(x)=\frac{5-2x^3}{x^2+1}$: $a=-\infty$

2 أوجد نهاية كلّ ممّا يأتي:

1- $f(x)=\sqrt{x^2-4}+2x$ عند $-\infty$

2- $f(x)=\sqrt{9x^2-4x}-3x$ عند $+\infty$

3- $f(x)=\frac{x\cos x-x^2}{3x}$ عند 0

3 أوجد نهاية كلّ دالة f المعرفة بقاعدة ربطها، واستنتج كلّ مستقيم مقارب لخطّها البياني C الموازي لأحد المحورين الإحداثيين :

1)	$f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x)$	عند $+\infty$, 0
2)	$f(x)=\frac{1}{x}-\ln(x)$	عند $+\infty$, 0
3)	$f(x)=\ln\left(\frac{1-x}{3+x}\right)$	عند 1 وعند -3
4)	$f(x)=x+\ln(x+1)-\ln(x)$	عند 0 وعند $+\infty$
5)	$f(x)=\frac{e^x-1}{2x}$	عند 0 وعند $+\infty$ وعند $-\infty$
6)	$f(x)=2x\cdot e^{-x}$	عند $+\infty$
7)	$f(x)=e^{2x}-e^x+1$	عند $+\infty$
8)	$f(x)=\frac{e^x-1}{x-1}$	عند $+\infty$
9)	$f(x)=e^{\frac{1}{x}}$	عند 0 وعند $+\infty$ وعند $-\infty$

4 فيما يأتي ادرس على $\mathbb{R}$ تغيّرات الدالة f المعينة بقاعدة ربطها ، دلّ على كلّ قيمة كبرى وعلى كل قيمة صغرى محلياً في حالة وجودها، وبيّن فيما إذا كانت هذه القيم شاملة :

1)	$f(x)=-x^5+\frac{5}{3}x^3-2$	$D=\mathbb{R}$
2)	$f(x)=\ln\left(x^2-4x\right)$	$D=]-\infty,0[\cup]4,+\infty[$
3)	$f(x)=\ln\left(4-x^2\right)$	$D=]-2,+2[$
4)	$f(x)=x^2-\ln x-\ln 2$	$D=]0,+\infty[$
5)	$f(x)=e^{1-\frac{1}{2}(x-1)^2}$	$D=\mathbb{R}$

5 ليكن C الخطّ البيانيّ للدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=2x-1+e^{1-x}$

- أوجد معادلة كلّ مقارب للخط C يوازي المحورَ $x'x$ أو المحورَ $y'y$.
- ادرس تغيّرات الدالة f ، ودلّ على قيمه الصغرى محلياً .

6 ليكن C الخطّ البياني للدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ وفق $f(x)=e^{-x}(1+\ln(x))$

ولتكن الدالة g المعرفة على $]0,+\infty[$ وفق $g(x)=-1-\ln(x)+\frac{1}{x}$

- ادرس تغيرات الدالة g ونظّم جدولاً بها واستنتج إشارتها .
- ادرس تغيرات الدالة f ونظم جدولاً بها واستنتج ما للخط C من مقاربات موازية للمحور $x'x$ أو للمحور $y'y$ ، دلّ على قيمه الكبرى محلياً .

7 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ وفق $f(x)=\frac{5}{x+2}$, أوجد نهاية f في كل من الحالات الآتية

a. من اليمين عند $x=-2$ ، من اليسار عند $x=-2$.

b. عند $+\infty$ و $-\infty$.

8 باستخدام مبرهنة الإحاطة، أثبت أنّ $\lim\limits_{x\to 0} x.\sin\frac{1}{x}=0$

9 لتكن f دالة معرفة على $[-1,+\infty[$ وفق $f(x)=2\sqrt{x+1}-x$, C خطها البياني

1- ادرس قابلية الاشتقاق للدالة f عند $x=-1$.

2- ادرس تغيّرات الدالة f ونظّم جدولاً بها، ثمّ دلّ على كل قيمة كبرى أو صغرى محلياً.

10 لتكن f الدالة المعرفة على $]0,+\infty[$ وفق $f(x)=\frac{x+\ln x}{x}$، خطها البياني C

1- أوجد النهايات عند أطراف المجالات المفتوحة لمجموعة تعريف الدالة f واستنتج المستقيمات المقاربة للخط C.

2- ادرس تغيّرات الدالة f ونظّم جدولاً بها، ثمّ دلّ على قيمته الكبرى محلياً.

2 التكامل وتطبيقاته

- التكامل غير المحدد
- التكامل بالتجزئة - التكامل بالتعويض
- تكاملات الكسور الجزئية
- التكامل المحدد
- تطبيقات التكامل
- المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية على الأكثر

التكامل غير المحدّد

1.2

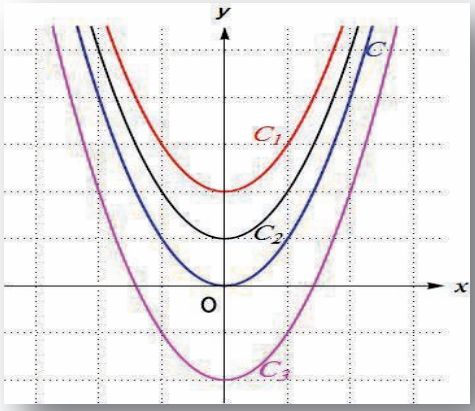
سوف تتعلّم

2-1-1 مفهوم التكامل غير المحدّد .

2-1-2 الخواصّ الأساسيّة للتكامل غير المحدّد .

2-1-3 قواعد التكامل غير المحدد لبعض الدوال الشهيرة .

2-1-4 المنحني التكاملي – إيجاد ثابت التكامل .



مقدمة: تعلّمْ أنّ عملية إيجاد دالة مشتقُّها دالةٌ مُعطاة، هي عملية إيجاد الدالة الأصلية لهذه الدالة المعينة، إذ توجد أكثر من دالة أصلية لها على مجال $I \subseteq \mathbb{R}$، ولكن توجد دالّةٌ أصلية وحيدة تأخذ قيمةً معطاة k عند قيمة x_0 من I للمتغير x كما سنرى.

تعريف: لتكن f دالةً معرفة على مجال $I \subseteq \mathbb{R}$. نقول إنّ F دالة أصلية على المجال I للدالة f إذا وفقط إذا تحقق:

الدالة F اشتقاقية على المجال I

أياً كان $x \in I$ فإنّ $F'(x) = f(x)$

مثال (1)

الدالة الأصلية على $\mathbb{R}$ للدالة $f: f(x) = 3x^2$ هي $F_1: F_1(x) = x^3$ لأن F_1 اشتقاقية على $\mathbb{R}$ وأياً كانت $x \in \mathbb{R}$ فإنّ $F_1'(x) = 3x^2 = f(x)$ ويمكن ملاحظة أنّ كلاً من الدوال F_2 , F_3

$F_2(x) = x^3 + 1$ $\quad F_3(x) = x^3 - 5$ ، وفي الحالة العامة $F(x) = x^3 + c$ حيث c ثابت كيفي، هي دوالّ أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة $f: f(x) = 3x^2$ لأنّ كلّاً من هذه الدوال لها المشتقّ نفسه على $\mathbb{R}$ وهو الدالة $f: f(x) = 3x^2$.

ونعلم أيضاً

إذا كانت F دالةً أصلية على المجال $I \subseteq \mathbb{R}$ للدالة f ، عندئذٍ مجموعة الدوال الأصلية على I للدالة f هي الدوال من الشكل $x \mapsto F(x) + c$ حيث c ثابت كيفي، وهي مجموعة غير منتهية تختلف كلّ دالة أصلية منها عن الأخرى بقيمة الثابت c .

لنتابع الآن النشاطَ الآتي من أجل تثبيت المفاهيم:

فيما يأتي مجموعة من العبارات، لكلّ منها ثلاث إجابات، واحدة منها فقط صحيحة، اقرأ كل عبارة جيداً وبالتشاور مع زملائك في مجموعتك، أحط بدائرةٍ الرمزَ الدالَّ على الإجابة الصحيحة.

في العبارة أو الإجابة المقترحة c ثابت كيفي.

الرقم	العبارة	الرمز	الإجابات المقترحة
1	لتكن الدالة f الاشتقاقية على المجال $I \subseteq \mathbb{R}$ ومن أجل كلّ $x \in I$ كان $f'(x)=0$ عندها $f(x)$ تساوي:	A	c
		B	cx
		C	x
2	إذا كانت كلّ من الدالتين f, g اشتقاقيةً على المجال $I \subseteq \mathbb{R}$ وغير ثابتة، وأياً كان $x \in I$ كان $f'(x)=g'(x)$ عندئذٍ:	A	$f(x)=-g(x)$
		B	$f(x)=g(x)+c$
		C	$f(x)+g(x)=c$
3	الدوال الأصلية على $\mathbb{R}$ للدالة f: $f(x)=x(3x-2)$ هي:	A	$F(x)=3x^3-2x^2+c$
		B	$F(x)=x^3-x+c$
		C	$F(x)=x^3-x^2+c$
4	الدوالُّ الأصلية على $]0,+\infty[$ للدالة f: $f(x)=\frac{2x-3}{x^4}$ هي:	A	$F(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+c$
		B	$F(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}+c$
		C	$F(x)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+c$
5	الدوال الأصلية على المجال $]-1,+\infty[$ للدالة f: $f(x)=3\sqrt{x+1}$ هي:	A	$F(x)=2\sqrt{x^3+1}+c$
		B	$F(x)=2\sqrt{(x+1)^3}+c$
		C	$F(x)=(x+1)\sqrt{x+1}+c$
6	الدوال الأصلية على $\mathbb{R}$ للدالة f: $f(x)=2x\sqrt{x^2+1}$ هي:	A	$F(x)=\frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}+c$
		B	$F(x)=x^2\sqrt{x^2+1}+c$
		C	$F(x)=(x+1)^2\sqrt{x^2+1}+c$
7	الدوال الأصلية على $\mathbb{R}$ للدالة f: $f(x)=x\sin(x)$ هي:	A	$F(x)=-x\cos(x)+c$
		B	$F(x)=-x\cos(x)+\sin(x)+c$
		C	$F(x)=\frac{x^2}{2}\sin(x)+c$

مثال (2)

أوجد مجموعةَ الدوالّ الأصلية للدالة f المعرفة بـ $f(x)=x\sqrt{1+x}$ على المجال $I=[-1,+\infty[$.

الحل: نلاحظ أنّ

$$f(x)=(x+1-1)\sqrt{1+x}=(x+1)\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x}$$

$$=(x+1)^{\frac{3}{2}}-(1+x)^{\frac{1}{2}}$$

إذن $F(x)=\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+c=\frac{2}{5}(x+1)^{2}\sqrt{x+1}-\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}+c$

نشاط

أوجد مجموعة الدوال الأصلية للدالة f: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+x\sqrt{x}}}$ على المجال $I=]0,+\infty[$

الحل

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x(1+\sqrt{x})}}=\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(1+\sqrt{x}\right)^{-\frac{1}{2}}=2\left(1+\sqrt{x}\right)'\cdot\left(1+\sqrt{x}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$F(x)=4\sqrt{1+\sqrt{x}}+c$$

تذكرة

كلّ دالة مستمرّة على مجال $I\subseteq\mathbb{R}$ تقبل دالة أصلية على هذا المجال.

1.1.2 مفهوم التكامل غير المحدّد

تعريف: إذا كانت f دالة مستمرة على مجال $I\subseteq\mathbb{R}$ فإن مجموعة الدوال الأصلية لها على I هي من الشكل $F(x)+c$ وتُسمى التكامل غير المحدد للدالة f و نرمزها: $\int f(x)dx=F(x)+c$

نسمي $\int$ إشارة التكامل وأصلها الحرف S أول حرف من الكلمة Sum (مجموع)

f الدالة المكاملة

x متغير التكامل

F دالة أصلية للدالة f

c ثابت كيفي يُسمى ثابت التكامل

مثال

أوجدْ كلَّ تكامل ممّا يأتي:

1) $\int x^2 dx$ 2) $\int (\cos x - \sin x)dx$

الحل

1) $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c$

2) $\int (\cos x - \sin x)dx = \sin x + \cos x + c$

2.1.2 الخواصّ الأساسيّة للتكامل غير المحدّد

الخواص الآتية بسيطة نثبتها هنا للتذكرة:

(1) في حالة دالة f مستمرة على مجال $I \subseteq \mathbb{R}$ لدينا على I: $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

(2) في حالة دالة ذات مشتقّة مستمرّة على مجال $I \subseteq \mathbb{R}$ لدينا على I : $\int f'(x)dx = f(x) + c$.

(3) في حالة ثابت k ودالتين f و g مستمرتين على مجال $I \subseteq \mathbb{R}$ لدينا على I :

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$$

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

مثال

لحساب التكامل $I = \int (x^2 - x + 7)dx$ بتطبيق الخواص نكتب :

$$\int (x^2 - x + 7)dx = \int x^2 dx - \int x dx + \int 7 dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 7x + c$$

تدريب

أوجد اعتماداً على خواصّ التكامل $\int (3e^x - 4\cos x + 6x)dx$

3.1.2 قواعد التكامل غير المحدد لبعض الدوال الشهيرة

اعتماداً على تعريف التكامل غير المحدد وعلى مشتقات الدوال الشهيرة، يكون التكامل غير المحدد لبعض الدوال الشهيرة كما هو مبين في الجدول الآتي:

الرقم	التكامل $\int f(x)dx$	ملاحظات
1	$\int 0\cdot dx = c$	c ثابت كيفي
2	$\int m\cdot dx = mx + c$	$m \neq 0$ ثابت
3	$\int x^n \cdot dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	$n \neq -1$
4	$\int \cos(ax+b)\cdot dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$	$a \neq 0$ ثابت
5	$\int \sin(ax+b)\cdot dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$	$a \neq 0$ ثابت
6	$\int \sec^2(kx)\cdot dx = \frac{1}{k}\tan(kx) + c$	$k \neq 0$ ثابت
7	$\int \csc^2(kx)\cdot dx = -\frac{1}{k}\cot(kx) + c$	$k \neq 0$ ثابت
8	$\int e^{kx}\cdot dx = \frac{1}{k}e^{kx} + c$	$k \neq 0$ ثابت
9	$\int \frac{1}{x}.dx = \begin{cases} \ln(x)+c & : x > 0 \\ \ln(-x)+c & : x < 0 \end{cases} \quad : x \neq 0$ ويمكن ان نكتب $\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + c : x \neq 0$	$k \neq 0$ ثابت
10	$\int (ax+b)^n \cdot dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$	$a \neq 0, n \neq -1$
11	$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\cdot dx = \ln\lvert g(x)\rvert + c$	$g(x) \neq 0$
12	$\int g'(x)e^{g(x)}dx = e^{g(x)} + c$	

مثال احسبِ التكاملَ الآتي : $I = \int (8x^3 + 6\sin(3x))dx$

الحل

$$\int (8x^3 + 6\sin(3x))dx = 2x^4 - 2\cos(3x) + c$$

ملاحظة: يمكن التأكد من صحة كلّ من العلاقات من 1 إلى 12 وذلك بأن نشتقّ الطرف الأيمن في كلٍّ منها فنحصل على الدالة المكاملة في الطرف الأيسر.

فيما يأتي مجموعة من العبارات، لكل منها ثلاث إجابات، واحدة منها فقط صحيحة، اقرأ كلّ عبارة جيداً ثُم أحط بدائرة الرمزَ الدال على الإجابة التي ترى أنها صحيحة

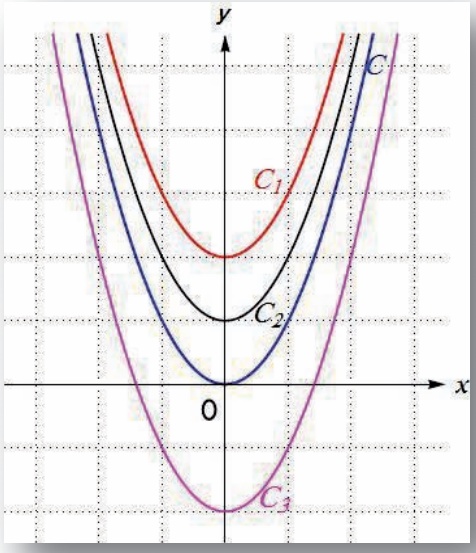
الرقم	العبارة	الرمز	الإجابات المقترحة
1	$\int dx$ يساوي:	A	$x+c$
		B	c
		C	cx
2	$\int x\sqrt{x}\,dx$ يساوي:	A	$\frac{1}{2}\sqrt{x}+c$
		B	$2x^2\sqrt{x}+c$
		C	$\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+c$
3	$F(x)=\sin(x^2)+c$ تساوي:	A	$\int 2x\sin(x)dx$
		B	$\int 2x\cos(x^2)dx$
		C	$\int x\sin(x^2)dx$
4	$F(x)=2\tan\left(\frac{x}{2}\right)+c$ تساوي:	A	$\int \sec^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$
		B	$\int 2\sec^2(x)dx$
		C	$\int 2\sec\left(\frac{x}{2}\right)^2 dx$
5	$\int 3\sin\left(\frac{2}{3}x\right)dx$ يساوي:	A	$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2}{3}x\right)+c$
		B	$-\frac{9}{2}\cos\left(\frac{2}{3}x\right)+c$
		C	$\frac{9}{2}\sin\left(\frac{2}{3}x\right)+c$
6	$\int \csc^2\left(\frac{2}{5}x\right)dx$ يساوي:	A	$-\frac{5}{2}\cot\left(\frac{2}{5}x\right)+c$
		B	$\cot\left(\frac{2}{5}x\right)+c$
		C	$-\frac{2}{5}\cot\left(\frac{2}{5}x\right)+c$

7	$\int e^{2x}dx$ يساوي:	A	$-2e^{2x}+c$
		B	$\frac{1}{2}e^{2x}+c$
		C	$(1+x)e^{x}+c$

4.1.2 المنحني التكاملي – إيجاد ثابت التكامل

في مستوٍ محدث بمعلمٍ متجانس $(0,\vec{i},\vec{j})$ إذا كانت f دالة مستمرة على مجال $I \subseteq \mathbb{R}$ فيكون لها دوالّ أصلية على I ، الخط البياني لكل دالة F من هذه الدوال يُسمّى منحنياً تكاملياً للدالة f .

وإذا كانت F دالة أصلية للدالة f ، نتج أيٌّ من المنحنيات التكاملية للدالة f من الخط البياني للدالة F بإجراء انسحاب متجهه $c\vec{j}$ حيث c ثابتٌ كيفي.



في الشكل المجاور بعض المنحنيات التكاملية على $\mathbb{R}$ للدالة f : $f(x)=2x$ وهي من الشكل $\int 2xdx = x^2+c$.

وإذا كانت $N(x,y)$ نقطة من أحد المنحنيات التكاملية كان $y=x^2+c$.

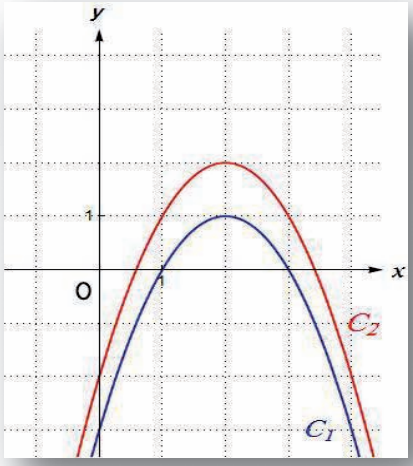
إذا طُلب إيجاد معادلة المنحني التكاملي الذي يحققّ شروطاً معينة وجب تعيين قيمة الثابت c الذي يحقق تلك الشروطَ فإذا طُلب إلينا إيجادُ معادلة المنحني التكاملي المارّ بالنقطة $N(x_0,y_0)$ أي الذي يحقّق $F(x_0)=y_0$ ، كانت هذه المساواةُ كافية لتعيين قيمة الثابت c.

مثال

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ وفق

$$f(x) = -2x + 4$$

1. عيّنِ التكامل غير المحدد للدالة f .
2. أوجد معادلة المنحني التكاملي للدالة f المارّ بالنقطة $N(0,-3)$ وارسمه.
3. أوجد معادلة المنحني التكاملي للدالة f المارّ بالنقطة $M(0,-2)$ وارسمه على الشكل نفسه.



الحل:

1. $\int(-2x+4)dx = -x^2 + 4x + c$
2. معادلة المنحنيات التكاملية

$$y = F(x) = -x^2 + 4x + c$$

3. الشرط $F(0) = -3$ يقتضي $c = -3$ ومعادلة المنحني التكاملي المار بالنقطة $N(0,-3)$ هي

$$y = F_1(x) = -x^2 + 4x - 3$$

وخطه البياني C_1.

4. الشرط $F(0) = -2$ يقتضي $c = -2$ ومعادلة المنحني التكاملي هي

$$y = F_2(x) = -x^2 + 4x - 2$$

وخطه البياني C_2.

نشاط بالاستفادة من دساتير التحويل في المثلثات احسب التكاملات الآتية:

1 $I = \int 2\cos(3x)\sin(2x)dx$

نحوّل من جداء إلى مجموع فنجد:

$$I = \int 2\cdot\frac{1}{2}\left[\sin(3x+2x) - \sin(3x-2x)\right]dx$$

$$= \int(\sin 5x - \sin x)dx = -\frac{1}{5}\cos 5x + \cos x + c$$

2 $I=\int(\cos 2x\cos x)dx$ ثم أوجد معادلة المنحني التكاملي للدالة f: $f(x)=\cos 2x\cos x$

المار بالنقطة $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$

$$I=\int(\cos 2x\cos x)dx=\int\frac{1}{2}(\cos 3x+\cos x)dx=\frac{1}{6}\sin 3x+\frac{1}{2}\sin x+c$$

معادلة المنحنيات التكاملية

$$F(x)=\frac{1}{6}\sin 3x+\frac{1}{2}\sin x+c$$

ويفيد الشرط $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ في تعيين الثابت c فنجد $\frac{1}{6}\sin\frac{3\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}+c=0$ ومنه $c=-\frac{1}{3}$

ومعادلة المنحني التكاملي المطلوب هي $F_1(x)=\frac{1}{6}\sin 3x+\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{3}$.

تـدريـب

❶ لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x)=(x^2-2x)^2-x^4$.

1) أوجد التكامل غير المحدد للدالة f.

2) أوجد معادلة المنحني التكاملي للدالة f المارّ بالنقطة $(0,1)$.

❷ أوجد كلّ تكامل مما يأتي:

1	$\int \frac{1}{\sqrt{x\sqrt{x}}}dx$	2	$\int\left(\sqrt[3]{x^2}+5\sqrt{x}\right)dx$
3	$\int\left(2x+5-\csc^2 x\right)dx$	4	$\int\left(\frac{x^4+4}{2x^2}\right)dx$
5	$\int \sin 4x \cos 3x dx$	6	$\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}dx$
7	$I=\int\left(\frac{x^2}{2}+\frac{2}{x^2}\right)dx$	8	$I=\int x(1+x)^n dx \quad ; n\in\mathbb{N}^*$
9	$I=\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x}}dx$	10	$I=\int \sin^3(x)\sin(2x)dx$

التكامل بالتجزئة-التكامل بالتعويض

2.2

سوف تتعلّم

2-2-1 طريقة تغيير المتحوّل في التكامل غير المحدد.

2-2-2 طريقة التكامل بالتجزئة.

2-2-3 حساب التكاملات بطريقة التكامل بالتجزئة.

1.2.2 طريقة تغيير المتحوّل في التكامل غير المحدّد.

ليكن I و J مجالين من $\mathbb{R}$. ولتكن $g: I \to \mathbb{R}$ دالةً لها مشتقّة مستمرّة على I، نفترض أنّ g تأخذ قيمها في J، أي $g(I) \subset J$. وكذلك لتكن $f: J \to \mathbb{R}$ دالةً مستمرَّةً، تقبل F دالة أصلية لها على J. عندئذٍ

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = F[g(x)]+C$$

كيف نطبّقُ هذه الطريقةَ عملياً في حساب التكامل غير المحدّد، لتوضيح ذلك سندرس المثال الآتي:

مثال (1) احسبِ التكاملَ غيرَ المحدّدِ $I = \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$

1) نبدأ بإعلان متحوّل جديد وليكن u فنقول: لنضع مثلاً $u = \sqrt{1+x}$. ثُمّ نعوّض في التكامل لنجد

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x}} = \int \frac{1}{u} xdx$$

وهنا نرى أنّ x لا تزال موجودةً في عبارة التكامل، علينا إذن حساب x بدلالة u، فنحسب $x=u^2-1$.
وعندها نصل إلى

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x}} = \int \frac{u^2-1}{u}dx$$

2) لا تزال هناك x في "dx" وهذا يعني أنّ متغيّر التكامل لا يزال x، وعلينا التخلّص منه، وهنا نستعمل الصيغة $u=\sqrt{1+x}$، لنستنتجَ منها أنّ:

$$u' = \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2u}$$

وهنا نتعامل مع الرمز $\frac{du}{dx}$، وكأنّه كسر، ونعزل في طرف واحد الحدود التي تحوي x وفي الطرف الثاني الحدود التي تحوي u لنجد $dx=2udu$.

3) ثُمّ نعوّض في عبارة التكامل لنجد

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x}} = \int \frac{u^2-1}{u}dx = \int \frac{u^2-1}{u}2u\,du = \int (2u^2-2)du$$

(إذن هنا أصبح المتغيّر هو u.)

4) الآن أصبحنا أمام تكامل غير محدّد يمكننا حسابه

$$\int (2u^2-2)du = \frac{2}{3}u^3 - 2u + c$$

5) وأخيراً لا بدّ من العودة إلى المتغيّر الأصلي x بأن نعوّض u بقيمتها بدلالة x فنجد

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x}} = \frac{2}{3}\left(\sqrt{1+x}\right)^3 - 2\left(\sqrt{1+x}\right) + c = \frac{2}{3}(x-2)\sqrt{1+x} + c$$

ولكي نقرن هذه الطريقة التي شرحناها بالصيغة الواردة في نص المبرهنة نوضح أنّ

$$u = g(x) = \sqrt{1+x} \quad \text{و} \quad f(u) = 2(u^2-1) \quad \text{و} \quad F(u) = \frac{2}{3}u^3 - 2u + c$$

مثال (1) احسبِ التكاملَ $I = \int \frac{xdx}{1+x^2}$

حلٌّ مقتضب : ضع $u = 1+x^2$ فيكون $g'(x) = 2x$ و من ثمّ

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln(u) + c = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + c$$

مثال (2) احسب التكامل $I = \int \frac{(\ln x)^2}{x}dx$ على المجال $]0,+\infty[$.

حلّ مقتضب : ضع $u = g(x) = \ln(x)$ ومنه $u' = \frac{1}{x}$ إذن

$$I = \int \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \int u^2 du = \frac{1}{3}u^3 + c = \frac{1}{3}(\ln(x))^3 + c$$

نشاط (1)

$$I = \int \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \int u^2 du = \frac{1}{3}u^3 + c = \frac{1}{3}(\ln(x))^3 + c$$

احسبِ التكاملَ $\int \frac{dx}{2x-1}$ على المجال $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$

الحل

نضع $t = g(x) = 1 - 2x$ وهو موجب على المجال $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$ ، ومنه $dt = -2dx$، إذن

$$\int \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln t + c = \frac{1}{2}\ln(-2x+1) + c$$

نشاط (2)

احسبِ التكاملَ $I = \int \sqrt{\sin x}\, \cos x dx$ على المجال $]0, \pi[$.

الحل

نضع $t = g(x) = \sin x$ ومنه $dt = \cos x\ dx$ فيكون:

$$\int \sqrt{\sin x}\, \cos x dx = \int (t)^{\frac{1}{2}} dt = \frac{2}{3}(t)^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{\sin^3 x} + c$$

تدريب

احسبِ التكاملاتِ الآتية

1	$\int e^{5x+1} dx$	2	$\int \frac{\ln^5 x}{x} dx$
3	$\int \frac{dx}{\sin^2 3x} dx$	4	$\int \tan 2x dx$
5	$\int \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$	6	$\int \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) dx$
7	$\int \frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}} dx$	8	إذا كان $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 2}{(2x^3 - 4x)^4}$ فأوجد y بدلالة x علماً أن $y = 1$ عندما $x = 1$

2.2.2 حساب التكاملات بطريقة التكامل بالتجزئة

إذا كانت كلّ من الدالتين u و v اشتقاقية بالنسبة إلى المتغير x ومشتقة كلّ منهما مستمرة على المجال $I \subseteq \mathbb{R}$ ، عندئذٍ يكون الجداء $u \cdot v$ دالة أصلية للدالة $u' \cdot v + u \cdot v'$. ومنه نستنتج أنّ

$$\int v(x)u'(x)dx + \int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) + c$$

أو

$$\int u(x)v'(x)du = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx + c$$

تُسمى هذه العلاقةُ مكاملةً بالتجزئة، وهي تفيد في حساب تكامل $\int u(x)v'(x)dx$ يفترض أن يكون صعباً بواسطة حساب تكامل $\int v(x)u'(x)dx$ يفترض أن يكون حسابه أسهلَ.

يستعمل التكامل بالتجزئة استعمالاً واسعاً في حساب التكامل، ولاسيّما في تكاملات من الشكل:

1	$\int x^m \sin(ax)dx$	2	$\int x^m \cos(ax)dx$
3	$\int x^m e^{ax}dx$	4	$\int x^m \ln x dx$

حيث m عددٌ طبيعيّ غير معدوم، و $a \neq 0$. (نقتصر على $m \in \{1,2\}$)

توجيه: في كلّ من الحالات 1 و 2 و3 نضع $u(x) = x^m$ لأنّ المكاملة بالتجزئة تؤدي إلى خفض درجة v بسبب اشتقاقه، أمّا في الحالة 4 فنضع $u(x) = \ln x$ لأنّ التكامل بالتجزئة يؤدي إلى إزالة اللوغاريتم عن طريق اشتقاقه.

أمـــثـــالة

1 $I = \int x \sin 2x dx$

الحل : نضع

$$u(x) = x, \quad v'(x) = \sin(2x)$$
$$u'(x) = 1, \quad v(x) = \frac{-1}{2}\cos(2x)$$

إذن

$$\int x \cdot \sin 2x dx = -\frac{1}{2}x \cos 2x - \int -\frac{1}{2}\cos 2x \, dx = -\frac{1}{2}x \cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

2 $I = \int x^2 e^x dx$

الحل : نضع

$$u(x) = x^2, \quad v'(x) = e^x$$
$$u'(x) = 2x, \quad v(x) = e^x$$

إذن

$$I = \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2xe^x dx$$

لحساب التكامل الجديد $\int 2xe^x dx$ في الطرف الأيمن نطبّق التكامل بالتجزئة مرة ثانية فنضع

$$u(x) = 2x, \quad v'(x) = e^x$$
$$u'(x) = 2, \quad v(x) = e^x$$

ومنه

$$\int 2xe^x dx = 2xe^x - 2\int e^x dx = 2xe^x - 2e^x$$

وبالعودة إلى عبارة I نجد

$$I = x^2 e^x - \left(2xe^x - 2e^x\right) + c = \left(x^2 - 2x + 2\right)e^x + c$$

لاحظ أنّه تكفي إضافة الثابت الكيفي في آخر مرحلة.

نشاط (1) احسب بطريقة التكامل بالتجزئة : $I=\int x^2\cos x\,dx$

الجواب : $I=(\ell x^2+m)\sin x+nx\cos x+c$ حيث (ℓ,m,n) هي أعداد عليك تعيينها.

نشاط (2) احسبِ التكامل الآتي بالتجزئة : $I=\int x\ln x\,dx$

الحل

نضع

$$u(x)=\cdots\cdots,\quad v'(x)=\cdots\cdots$$
$$u'(x)=\cdots\cdots,\quad v(x)=\cdots\cdots$$

ومنه

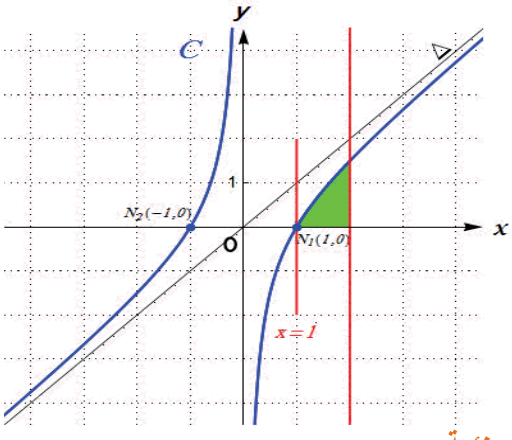
$$\int x\ln x\,dx=\ldots\ldots\ldots-\int\ldots\ldots\ldots\ldots=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}x^2+c$$

تدريب احسب بطريقة التكامل بالتجزئة :

1	$\int(x^2+1)\cos x\,dx$	2	$\int 2x\cos^2 x\,dx$
3	$\int e^{\sqrt{x}}dx$ غيّر المتحول ثم كامل بالتجزئة	4	$\int\frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx$
5	$\int\ln(x)dx$	6	$\int x^r\cdot\ln x\,dx$ في حالة $r\in\mathbb{Q}\setminus\{-1\}$ ، وكذلك ادرس حالة $r=-1$

تكاملات الكسور الجزئية

3.2



سوف تتعلّم

2-3-1 تفريق كسرٍ بسيط إلى مجموع كسور جزئية.

2-3-2 تكامل دالة كسرّية اعتماداً على الكسور الجزئية.

1.3.2 تفريق كسر بسيط(فعلي) إلى مجموع كسور جزئية.

مقدمة: تعلم أنه إذا كان لدينا كسران عاديان أو أكثر مثل $\frac{1}{x+1}$ و $\frac{2}{2x-1}$ لكتابة مجموعهما على شكل كسر عادي نوحّد المقامين ثم نجمع البسطين كالآتي:

$$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{2x-1}=\frac{2x-1+2x+2}{(x+1)(2x-1)}=\frac{4x+1}{2x^2+x-1}$$

لكن في بعض التطبيقات يكون المطلوب أن نعكس العمل السابق، أي أن نكتب كسراً وليكن (مثلاً) ..

$f(x)=\frac{4x+1}{2x^2+x-1}$.....(1) بصيغة مجموع كسرين أبسط منه هما $\frac{1}{x+1}$ و $\frac{2}{2x-1}$، يُسميان كسرين جزئيين لهذا الكسر، يُسمّى هذا العملُ تفريق الكسر (1) الى مجموع كسرين جزئيين

إذا كانت لدينا الدالة الكسرية f: $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$، لإيجاد التكامل غير المحدد للدالة f، حيث لا نستطيع أن نكاملَها بتطبيق قواعد التكامل التي مرت سابقاً، نفرّق الدالـــة المكاملـــة f إلى مجموع دوالّ كسرية أبسط منها بحيث يمكن أن نكامل كلّ منها بالطرائق المألوفة.

مبرهنة: كلّ كثيرة حدود $p(x)$ يمكن أن تُحلّلَ إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى من الشكل $ax+b$ مختلفة أو مكررة وعوامل مـــن الدرجة الثانية لا يمكن تحليلها (مميزها سالب) من الشكل (ax^2+bx+c) مختلفة أو مكررة.

عند تحليل كثير حدود إلى عوامل يمكن أن نواجه إحدى الحالات الآتية:

1. **جميع العوامل من الدرجة الأولى وغيرُ مكررة (مختلفة)**

مثال $x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x+2)(x-3)$

مثال : حلّل $x^3-x=x(\ldots\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots\ldots)$

2. **جميع العوامل من الدرجة الأولى ولكنْ واحد منها على الأقل مكرر**

مثال $x^3-3x-2=(x+1)^2(x-2)$

مثال : حلل $x^3-3x+2=(\ldots\ldots\ldots)^2(\ldots\ldots\ldots)$

3. **عوامل من الدرجة الأولى وعامل واحد أو أكثر من الدرجة الثانية (مميزه سالب) وغير مكرّر**

مثال $x^3-x^2-x-2=(x-2)(x^2+x+1)$

مثال : حلل $x^3+1=(x\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$

4. **عامل واحد على الأقل من الدرجة الثانية (مميزه سالب) ومكرر**

مثال: $x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1=(x-1)(x^2+1)^2$

مثال: حلّل $x^5+2x^3+x=x(\ldots\ldots)^2$

تعريف الدالة الكسرية البسيطة : هي دالة كسرية حدودية، درجةُ بسطها أصغرُ تماماً من درجة مقامها ومكتوبة بأبسط شكل (أي لا يوجد عامل مشترك بين البسط والمقام)

مثال $f(x)=\dfrac{x+1}{(x-1)(x^2+1)}$

2.3.2 تكامل دالة كسر بسيطة f : $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ اعتماداً على الكسور الجزئية.

الحالة (1): يمكن تحليلُ المقام $q(x)$ إلى عوامل من الدرجة الأولى غير مكررة (جذور المقام بسيطة وغير مكررة) من الشكل

$$q(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots\ldots\ldots(x-a_n)$$

نقبل في مثل هذه الحالة أنّه يمكن تفريق الدالة f : $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ كما يأتي:

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\cdots+\frac{A_n}{x-a_n}$$

حيث A_1 و A_2 و ... و A_n هي أعداد حقيقيّة، سنوضّح طريقة تعيينها فيما يأتي من أمثلة.

مـــثـــال نموذج

ليكن $f(x)=\dfrac{-x+7}{x^2+x-2}$

1) اكتب $f(x)$ بشكل مجموع كسرين جزئيين

2) احسب $\int f(x)dx$ على المجال $D=]1,+\infty[$

الحل: 1) $\dfrac{-x+7}{x^2+x-2}=\dfrac{-x+7}{(x+2)(x-1)}$

ومنه يوجد عددان A و B يحقّقان : $(*)$ $\quad \dfrac{-x+7}{(x+2)(x-1)}=\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{x-1}$

لتعيين A نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بالمقدار $x+2$ فيكون : $\dfrac{-x+7}{x-1}=A+\dfrac{B(x+2)}{x-1}$

ثُمّ نجعل x تسعى إلى -2 فنجد $A=\dfrac{7+2}{-2-1}=-3$.

وكذلك لتعيين B نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بالمقدار $x-1$ فيكون : $\dfrac{-x+7}{x+2}=\dfrac{A(x-1)}{x+2}+B$

ونجعل x تسعى إلى 1 فنجد $B=\dfrac{7-1}{2+1}=2$.

ويمكن أن نتحقق أن : $\dfrac{-x+7}{(x+2)(x-1)}=\dfrac{-3}{x+2}+\dfrac{2}{x-1}$

2) $\int f(x)dx=\int\dfrac{-3}{x+2}dx+\int\dfrac{2}{x-1}dx$ ولأنّ $x-1>0$ و $x+2>0$ في المجال $D=]1,+\infty[$ فإن

$$\int f(x)dx=-3\ln(x+2)+2\ln(x-1)+c=\ln\frac{(x-1)^2}{(x+2)^3}+c$$

بوجه عام: في الكسر البسيط $\frac{p(x)}{q(x)}$ إذا كانت عوامل المقام $q(x)$ من الدرجة الأولى وغير مكررة

$$q(x)=(x-a_1)(x-a_2)\dots\dots\dots(x-a_n)$$

أمكن تفريق الكسر بالشكل $(*)$ $\quad \dfrac{p(x)}{q(x)}=\dfrac{A_1}{x-a_1}+\dfrac{A_2}{x-a_2}+\cdots+\dfrac{A_n}{x-a_n}$

وعندئذٍ لحساب A_1 نضرب طرفي المساواة $(*)$ بالمقدار $(x-a_1)$ ثم نأخذ النهايات في الناتج عندما تسعى x إلى a فنحصل على A_1. ونطبق الأسلوب نفسه لحساب بقية الثوابت

مـــثـــال نموذج

فرّقِ الكسر $f(x)=\dfrac{5x+7}{x^3+2x^2-x-2}$ إلى مجموع كسور جزئية ثم أوجد $\int f(x)dx$ على المجال $]-1,+1[$

الحلّ:

1) نحلّل المقام بطريقة التجميع في زمر:

$$x^3+2x^2-x-2=x^2(x+2)-(x+2)$$
$$=(x-1)(x+1)(x+2)$$

إذن توجد أعداد A و B و C بحيث

$$\frac{5x+7}{(x-1)(x+1)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2} \qquad (*)$$

لتعيين A نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بالمقدار $x-1$ ونجعل x تسعى إلى 1 فنجد $A=2$

لتعيين B نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بالمقدار $x+1$ ونجعل x تسعى إلى -1 فنجد $B=-1$

لتعيين C نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بالمقدار $x+2$ ونجعل x تسعى إلى -2 فنجد $C=-1$

ومنه

$$\frac{5x+7}{(x-1)(x+1)(x+2)}=\frac{2}{x-1}+\frac{-1}{x+1}+\frac{-1}{x+2}$$

2) $$\int f(x)dx=\int\frac{2}{x-1}dx+\int\frac{-1}{x+1}dx+\int\frac{-1}{x+2}dx$$

في المجال $]-1,+1[$ نجد $x-1<0\ ,\ x+1>0\ ,\ x+2>0$

$$\int f(x)dx=2\ln(-x+1)-\ln(x+1)-\ln(x+2)+c==\ln\frac{(-x+1)^2}{(x+1)(x+2)}+c$$

تـدريـب احسب $\int\frac{x+3}{x^2-1}dx$

الحالة (2): عوامل المقام من الدرجة الأولى واحدةٌ منها مكرّرةٌ مرتين، أي:

$$q(x)=(x-b)^2(x-a_1)\dots\dots\dots(x-a_n)$$

نقبل في مثل هذه الحالة أنّه يمكن تفريق الدالة البسيطة f : $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ كما يأتي :

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\dots+\frac{A_n}{x-a_n}$$

حيث B_1 و B_2 و A_1 و A_2 و ... و A_n هي أعداد حقيقية، يجري تعيين الأمثال و A_1 و A_2 و ... و A_n، بالأسلوب السابق نفسه، أمّا B_1 و B_2 فيجري تعيينهما كما هو مُوضّح في المثال الآتي:

مـــثـــال نموذج ليكن $f(x)=\frac{3x^2+18x+15}{(x-1)(x+2)^2}$

1) فرّق $f(x)$ إلى مجموع كسور جزئية

2) احسب $\int f(x)dx$ على المجال $]-\infty,-2[$

الحلّ: 1) توجد ثوابت A و B و C بحيث

$$\frac{3x^2+18x+15}{(x-1)(x+2)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2} \qquad (*)$$

لتعيين A نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بالمقدار $x-1$ ونجعل x تسعى إلى 1 فنجد $A=4$

لتعيين C نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بالمقدار $(x+2)^2$ ونجعل x تسعى إلى -2 فنجد $C=3$

لتعيين B نعوّض (مثلاً) $x=0$ ، ولدينا $A=4$ و $C=3$ فنجد $B=-1$

ومنه

$$\frac{3x^2+18x+15}{(x-1)(x+2)^2}=\frac{4}{x-1}+\frac{-1}{x+2}+\frac{3}{(x+2)^2}$$

2) نستنتج إذن أنّ

$$\int f(x)dx=4\int\frac{dx}{x-1}-\int\frac{dx}{x+2}+3\int\frac{dx}{(x+2)^2}$$

ولكن في المجال $]-\infty,-2[$ يكون $x+2<0$, $x-1<0$ إذن

$$\int f(x)dx=4\ln(1-x)-\ln(-x-2)-\frac{3}{x+2}+c$$

$$=\ln\frac{(1-x)^4}{-x-2}-\frac{3}{x+2}+c$$

تـدريـب احسب $\int\frac{x^2+1}{x^3+x^2}dx$

الحالة (3): المقامُ يضمُّ عاملاً غيرَ مكرّر من الدرجة الثانية :

$$q(x)=(x^2+tx+s)(x-a_1)\cdots\cdots(x-a_n)$$

حيث $t^2-4s<0$. نقبل في مثل هذه الحالة أنّه يمكن تفريق الدالة البسيطة f : $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ كما يأتي:

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{Bx+C}{x^2+tx+s}+\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\cdots+\frac{A_n}{x-a_n}$$

حيث B_1 و B_2 و A_1 و A_2 و ... و A_n هي أعداد حقيقيّة، يجري تعيين الأمثال A_1 و A_2 و ... و A_n ، بالأسلوب السابق نفسه، أمّا تعيين B_1 و B_2 فيجري تعيينهما كما هو موضح في المثال الآتي:

مـــثـــال نموذج ليكن $f(x)=\frac{2}{x^3+x}$

1) فرّق $f(x)$ إلى مجموع كسور جزئية

2) احسب $\int f(x)dx$ في المجال $]-\infty,0[$

الحلّ: 1) لمّا كان $x^3+x=x(x^2+1)$ استنتجنا أنّه توجد ثوابت A و B و C تُحقّق

$$\frac{2}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1} \qquad (*)$$

لتعيين A نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بالمقدار x ونجعل x تسعى إلى 0 فنجد $A=2$.

لتعيين B نضرب طرفي العلاقة $(*)$بالمقدار x ونجعل x تسعى إلى $+\infty$ فنجد $B+A=0$ أي $B=-2$.

لتعيين C نعوّض(مثلاً) $x=1$، ولدينا $A=2$ و $B=-2$ فنجد $C=0$، ومنه

$$\frac{2}{x(x^2+1)}=\frac{2}{x}-\frac{2x}{x^2+1}$$

2) $$\int f(x)dx=\int\frac{16}{x}dx-\int\frac{16x}{x^2+1}dx$$

وفي المجال $]-\infty,0[$ يكون $x<0$ إذن

$$\int f(x)dx=\int\frac{2}{x}dx-\int\frac{2x}{x^2+1}dx$$

$$=2\ln(-x)-\ln(x^2+1)+c=\ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)+c$$

ملاحظة (1): في الكسر $\frac{p(x)}{q(x)}$ إذا كان أحد عوامل المقام من الدرجة الثانية (مميزه سالب) مكرراً أوغير مكرر عندئذ يمكن أن ينتج من تفريق هذا الكسر كسرٌ تكامله خارج موضوع المنهاج.

تكامل دالة كسرية ((درجة بسطها أكبر أو يساوي درجة مقامها))اعتماداً على الكسور الجزئية:

درسنا في التقنيات السابقة مكاملة بعض الـــدوال الكسرية البسيطة $\frac{p}{q}$ ، عندما تكون درجةُ بسطها أصغرَ تماماً من درجة مقامها . إذا طُلِبَ مكاملةُ كسر صحيح $\frac{p(x)}{q(x)}$، درجةُ بسطه أكبرُ من درجة مقامه أو تساويها ، عندئذٍ نقسّم البسط على المقام (بطريقة القسمة المطولة أو التركيبيّة) فنحصل على

$$\frac{p(x)}{q(x)}=H(x)+\frac{r(x)}{q(x)}$$

حيثُ خـــارجُ القسمة H دالـــةٌ حدوديّة و $r(x)$ هو باقي القسمة وتكون $\frac{r}{q}$ دالـــة كسرية بسيطة (فعلية)، وعندئذٍ نردُّ التكامل غير المحدّد للدالـــة الكسرية $\frac{p}{q}$ إلى مجموع تكاملين غير محددين الأول $\int H(x)dx$ وهو مألوف (تكامل دالة حدودية)

والثاني $\int \frac{r(x)}{q(x)}dx$ تكامل كسر من النوع الذي درسناه.

مثال أوجد التكامل: $f(x)=\frac{x^3+2}{x^2-1}$ على كل مجال ممّا يأتي:

$$D_1=]-\infty,-1[\ ,\ D_2=]-1,+1[\ ,\ D_3=]+1,+\infty[$$

الحلّ: نقسم البسط على المقام لأنّ درجة البسط أكبر من درجة المقام فيكون:

$$\frac{x^3+2}{x^2-1}=x+\frac{x+2}{x^2-1}=x+\frac{x+2}{(x-1)(x+1)}$$

$$\frac{x^3+2}{x^2-1}=x+\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x+1)} \qquad (*)$$

لتعيين A نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بالمقدار $x-1$ ونجعل x تسعى إلى 1 فنجد $A=\frac{3}{2}$

لتعيين B نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بالمقدار $x+1$ ونجعل x تسعى إلى -1 فنجد $B=-\frac{1}{2}$

إذن

$$\frac{x^3+2}{x^2-1}=x+\frac{3}{2}\frac{1}{(x-1)}-\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)}$$

ومنه

$$\int\frac{x^3+2}{x^2-1}dx=\int xdx+\frac{3}{2}\int\frac{1}{(x-1)}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x+1)}dx$$

على المجال $D_1=]-\infty,-1[$ يكون $x+1<0$ و $x-1<0$ إذن

$$\int\frac{x^3+2}{x^2-1}dx=\int xdx+\frac{3}{2}\int\frac{1}{(x-1)}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x+1)}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}\ln(1-x)-\frac{1}{2}\ln(-x-1)+c$$

على المجال $D_2=]-1,+1[$ يكون $x+1<0$ و $x-1>0$ إذن

$$\int\frac{x^3+2}{x^2-1}dx=\int xdx+\frac{3}{2}\int\frac{1}{(x-1)}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x+1)}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}\ln(x-1)-\frac{1}{2}\ln(-x-1)+c$$

على المجال $D_3=]+1,+\infty[$ يكون $x+1>0$ و $x-1>0$ إذن

$$\int \frac{x^3+2}{x^2-1}dx = \int x\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x-1)}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+1)}dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(x+1) + c$$

تمارين

1 حلّل كلَّ كثيرة حدود إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى أو درجة ثانية (مميزها سالب)

$$p_1(x) = x^4 - 1\ ,\ p_2(x) = x^6 - 7x^3 - 8,\ p_3(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$$

2 فرّق كلاً ممّا يأتي إلى مجموع كسور جزئية على مجموعة تعريف كلٍّ منها

$$g(x) = \frac{x^2+1}{x^3+x^2}\ ,\ p(x) = \frac{2x^2-x+4}{x^3+8}$$

3 احسب كلّ تكامل ممّا يأتي :

1) $\int \frac{2}{x-1}dx \quad ; x \in]1,+\infty[$

2) $\int \frac{3x+6}{x^2+5x+6}dx \quad ; x \in]-\infty,-3[$

3) $\int \frac{x+7}{x^2+2x-8}dx \quad ; x \in]-4,+2[$

4) $\int \frac{8}{x^3(x-1)}dx \quad ; x \in]1,+\infty[$

5) $\int \frac{x^2+x-1}{x^2(x+1)}dx \quad ; x \in]0,+\infty[$

6) $\int \frac{x^2+x+2}{(x^2+1)(x-1)}dx \quad ; x \in]-\infty,1[$

التكامل المحدّد

4.2

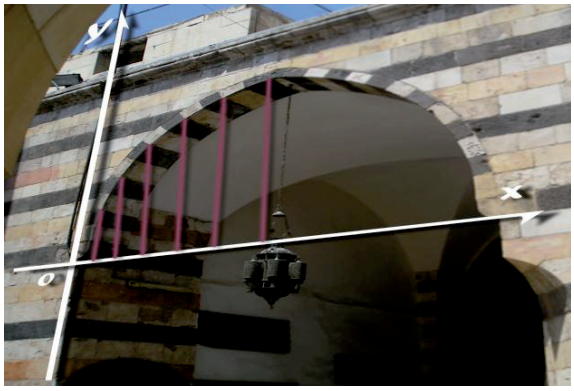
سوف تتعلم

2-4-1 تقدير قيمة التكامل المحدّد باستعمال المجاميع المنتهية.

2-4-2 التكامل المحدّد.

2-4-3 التكامل المحدّد بالتعويض.

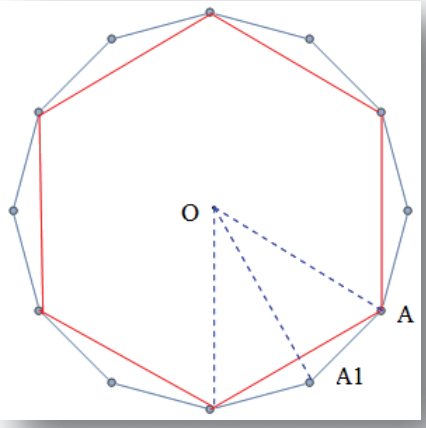
2-4-4 التكامل المحدّد بالتجزئة.



مقدّمة:

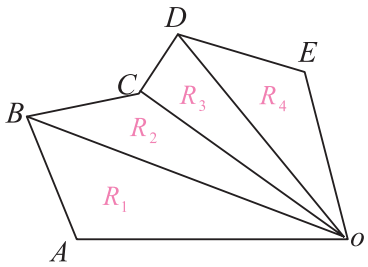
نشأ التكامل المحدّد وتطور نتيجة الحاجة إلى إيجاد طريقة عامة يمكن استعمالها في حساب مساحة سطح أو حجم مجسم. نشأت البدايات الأولى لحساب المساحات في مصر القديمة ، إذ تشير مخطوطات ورق البردي إلى أنّ قدامى المصريين قد تمكنوا حوالي (1650) ق.م من حساب مساحة سطح الدائرة بشكل دقيق. ثمّ أتى بعد ذلك الإغريقي الشهير أرخميدس (212-287) ق.م واستخدم طرائق في حساب المساحة، توصل باتباعها إلى وضع الأفكار الأولى في حساب التكامل المحدد، حيث تمكن من حساب مساحة السطح المحصور تحت القطع المكافئ.

ظهرتِ الركائزُ الأساسيّةُ لحساب التكامل في القرن السابعَ عشرَ الميلادي، وتبلورت من خلال أعمال علماء منهم العالم البريطاني الشهير بارو (Barrow) الذي تمكّن من الربط بين مسألة إيجاد المماس لمنحني دالة في نقطة منه، ومسألة حساب المساحة تحت منحني دالة، وأيضاً في سبعينيّات القرن السابعَ عشرَ تمكّن العالمان الشهيران نيوتن وليبنتز من وضع القوالب الرياضية لحساب التفاضل وربطه بالحساب التكامليّ.



1.4.2 تقدير قيمة التكامل المحدد باستخدام المجاميع المنتهية

مساحة شبه المنحرف المنحني:



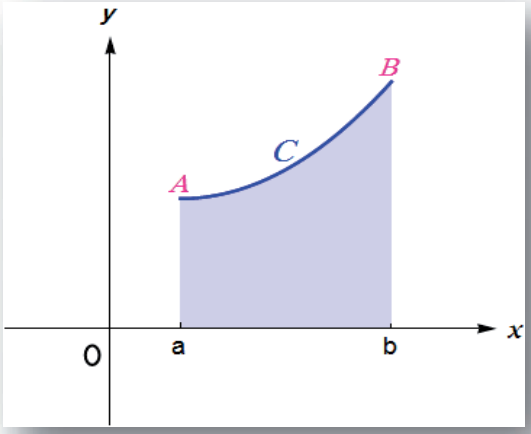
إذا كان لدينا شكلٌ مستوٍ محيطه عبارة عن خطّ مضلعي، عندئذٍ لحساب مساحته يمكن تجزئة هذا الشكل إلى مثلثات (لا تشترك في نقاط داخلية) وتكون مساحةُ الشكل تساوي مجموع مساحات هذه المثلثات ونرمز إليها بـ: $S(R)=S(R_1)+S(R_2)+S(R_3)+S(R_4)$

والسؤال الآن كيف نحسب مساحة شكل إذا كان محيطُه أو جزء منه منحنياً وليس مضلّعاً ؟

في هذه الحالة نقرّب المنطقة المعنية إلى شكل مضلّع على نحو يجعل الخطأ الناتج في حساب المساحة من هذا التقريب يسعى إلى الصفر عند إجراء عملية نهاية مناسبة.

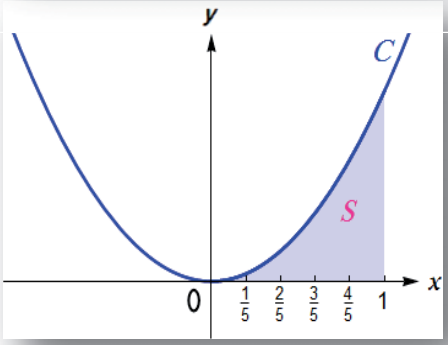
إنّ مسألة حساب المساحة تعطينا تأويلاً هندسياً وتعريفاً للتكامل المحدّد كما سنرى.

مفهوم جديد : ليكن (C) الخطّ البياني للدالة f المستمرّة على المجال $[a,b]$ حيثُ $f(x)\geq 0$ مساحة السطح المحصور بـ (C) والمحور $x'x$ والمستقيمين اللذين معادلتهما $x=a\ ,\ x=b$ تُسمّى مساحةُ شبه المنحرف المنحني $aABb$ (كما في الشكل).



ولتقدير مساحةٍ من هذا القبيل نورد المثال الآتي:

مثال ليكن (C) الخطّ البياني للدالة f حيث $f(x)=x^2$ والمطلوب: تقدير S مساحة السطح المحصور بين (C) والمحور $x'x$ والمستقيم $x=1$.



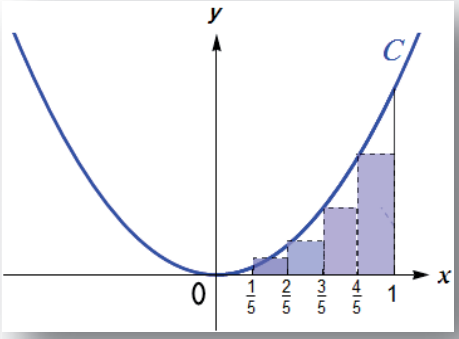
الحلّ:

نقسم المجال $[0,1]$ إلى مجالات جزئية متساوية (خمسة أجزاء مثلاً)

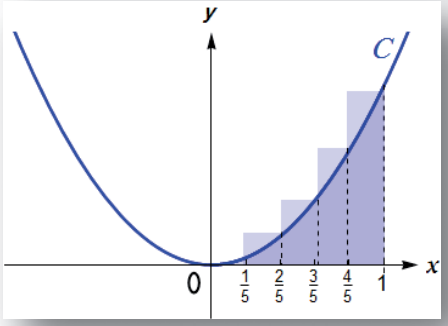
$$\left[0,\frac{1}{5}\right],\left[\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right],\left[\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right],\left[\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right],\left[\frac{4}{5},1\right]$$

ثم نشكّل مستطيلاتٍ داخليةً عرضُ كلٍّ منها $\frac{1}{5}$ وارتفاعُ كلٍّ منها صورة الحدّ الأدنى للمجال وفق الدالة f.

ونرمز بـ S_r لمجموع مساحات المستطيلات الداخلية (تحت المنحني)



$$S_r=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{24}{100}$$

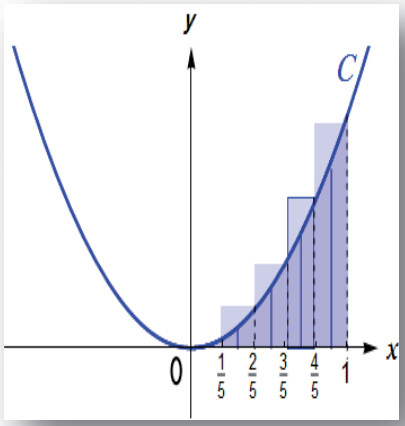


نشكّل كذلك مستطيلاتٍ (جزءُ كلٍّ منها يقع فوق C) عرضُ كلٍّ منها $\frac{1}{5}$ وارتفاعُ كلٍّ منها يساوي صورةَ الحدّ الأعلى للمجال الموافق وفق الدالة f . ونرمز بـ S_ℓ لمجموع مساحات هذه المستطيلات.

$S_\ell=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^2+\frac{1}{5}(1)^2=\frac{44}{100}$ فيكون حدساً: $S_r<S<S_\ell$ أي

$$\frac{24}{100}<S<\frac{44}{100}$$

ولنرمز بـ S_m لمجموع مساحات هذه المستطيلات. التي قاعدةُ (عرض) كلٍّ منها $\frac{1}{5}$ وارتفاعُهُ هو قاعدة وسطى في شبه المنحرف المنحني الموافق لمجاله الجزئي وتكون:



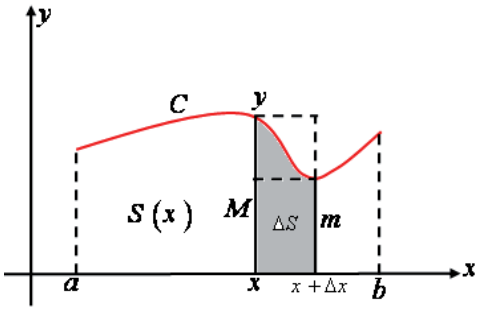
$$S_m=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{10}\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{3}{10}\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{5}{10}\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{7}{10}\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{9}{10}\right)^2=\frac{33}{100}$$

ونلاحظ أنَّ $\frac{24}{100}<\frac{33}{100}<\frac{44}{100}$

أي أنّ $S_r<S_m<S_\ell$ وتكونُ قيمةً تقريبيّة مقبولة لـ S.

ملاحظة: في المثال السابق يمكن أن نحصلَ على قيمة تقريبيّة للمساحة أكثر دقّة, وذلك بأن نقسم المجال $[0,1]$ إلى عدد كبير من المجالات الجزئيّة

2.4.2 المفهوم الهندسي للدالة الأصلية F للدالة f المستمرة على المجال $[a,b]$



نعرّف الدالة S بحيث تساوي قيمة $S(x)$ مساحة السطح المحصور بين منحني الدالة والجزء من المحور ox والمستقيمين الموازيين للمحور oy الأول معادلته $x=a$ والثاني مُنشأ من النقطة $(x,0)$.

1) لتكن $h=\Delta x>0$ ولنفترض أن $M(h)$ و $m(h)$ هما أكبر قيمة وأصغرها للدالة f في المجال $[x,x+h]$ على الترتيب، عندئذٍ تحقق مساحة المنطقة المظللة $\Delta S(x)$ المتراجحة :

$$m(h)\cdot h\le \Delta S(x)\le M(h)\cdot h$$

أو

$$m(h)\le \frac{S(x+h)-S(x)}{h}\le M(h)$$

لكن من الواضح أنّ استمرار الدالة f يقتضي أنّ $\lim\limits_{h\to 0} m(h)=\lim\limits_{h\to 0} M(h)=f(x)$

أي

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S(x)}{\Delta x}=f(x)$$

إذن الدالة $x\mapsto S(x)$ اشتقاقيّة عند x ومشتقها يساوي $f(x)$. فالدالة $x\mapsto S(x)$ هي دالة أصليّة للدالة $x\mapsto f(x)$ على المجال I.

2) لتكن F أية دالة أصلية للدالة f فيكون $S(x)=F(x)+c$. ولكن عند $x=a$ لدينا $S(a)=0$ إذن $0=S(a)=F(a)+c$ ومنه $c=-F(a)$. وبالتعويض نجد $S(x)=F(x)-F(a)$، وذلك أيّاً كانت x من المجال $[a,b]$.

وبوجه خاص إنّ المساحة المحصورة بين المحور الإحداثي الأفقي ومنحني الدالة f والمستقيمين $x=a$ و $x=b$ تساوي $S(b)$ (أو اختصارا S)، إذن

$$S=\left[\int f(x)dx\right]_a^b=F(b)-F(a)$$

تطبيق احسبْ مساحةَ السطح المحدّد بالخط البياني للدالة f حيثُ $f(x)=x^2+1$ و المحور $x'x$

و المستقيمان $x=1\,,\,x=2$

الحل: الخط البياني (C) هو القطع المكافئ الذي ذروته $(0,0)$ محوره المحرقي $y'y$ يقع فوق المحور $x'x$ على المجال $[1,2]$ (كما في الشكل).

$$\int f(x)dx=\frac{1}{3}x^3+x+c$$

نأخذ الدالة الأصلية $F(x)=\frac{1}{3}x^3+x$ باستعمال العلاقة

$$S=\left[\int f(x)dx\right]_a^b=F(b)-F(a)$$

نجد

$$S=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_1^2=\left(\frac{8}{3}+2\right)-\left(\frac{1}{3}+1\right)=\frac{10}{3}$$

تدريب احسبْ مساحةَ السطح المحدّد بالخطِّ البياني للدالة f حيثُ $f(x)=1-x^2$ و المحورُ $x'x$.

تعريف التكامل المحدّد :

لتكن f دالةً مستمرَّةً على المجال $[a,b]$ ولتكن $F(x)$ دالة أصلية لـ $f(x)$ على $[a,b]$

عندئذٍ نعرّف $\int_a^b f(x)dx$ بالعلاقة : $\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$

مثال

1. $$I_1=\int_0^1 x^3dx=\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{4}$$

2. $$I_2=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}4\sin x\,dx=[-4\cos x]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}=4+2\sqrt{2}$$

خواصّ التكامل المحدّد

لتكن f دالةً مستمرَّةً على المجال $I \subseteq \mathbb{R}$ وليكن k عدداً حقيقياً، عندئذٍ أياً كانت الأعداد a,b,c من المجال I فإنّ :

1) $\int_a^a f(x)dx = 0$

2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

3) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ (أي يمكنُ وضعُ الثابت k خارج رمز التكامل)

4) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$ (أي أنّ التكامل من a إلى b للدالة f مستقلّ عن رمز المتغيّر)

5) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

6) إذا كان f_1, f_2 دالتين مستمرّتين على المجال $I \subseteq \mathbb{R}$ عندئذٍ:

$$\int_a^b (f_1(x)+f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$$

مثال أوجد كلاً ممّا يأتي:

1) $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$

الحل:

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

2) $I_2 = \int_{-1}^{1} (\sin x + x^{10})dx$

الحل:

$$I_2 = \int_{-1}^{1} (\sin x + x^{10})dx = \left[-\cos x + \frac{x^{11}}{11}\right]_{-1}^{+1}$$

$$= \left[-\cos 1 + \frac{1}{11}\right] - \left[-\cos(-1) - \frac{1}{11}\right]$$

$$= -\cos 1 + \frac{1}{11} + \cos 1 + \frac{1}{11} = \frac{2}{11}$$

تـدريـب أوجد كلاً ممايأتي:

$$I_1=\int_1^4\sqrt{x}\,dx \qquad I_2=\int_1^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$I_3=\int_0^9\frac{x-1}{1+\sqrt{x}}dx \qquad I_4=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 4x\,dx \qquad I_5=\int_1^4\frac{dx}{\sqrt{5-x}}$$

3.4.2 التكامل المحدّد بالتعويض

كما درسنا في التكامل غير المحدّد، كذلك نجد في التكامل المحدّد أنه يمكن تطبيقُ طريقة التعويض (تغيّر المتحول) في حساب التكامل المحدد؛ وذلك اعتماداً على المبرهنة الآتية (التي تُقبل من دون ذكر برهان):

مبرهنة : لتكن $g:I\to\mathbb{R}$ دالةً ذات مشتقّ مستمرّ على مجال I. ولنفترض أنّ g تأخذ قيمها في مجال J أي $g(I)\subset J$. ثُم لتكن $f:J\to\mathbb{R}$ دالةً مستمرّة على J. عندئذ أياً كان العددان a و b من I كان

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx=\int_{g(a)}^{g(b)}f(u)du$$

مـثـال احسب التكامل : $L=\int_1^2 t\cos\left(t^2\right)dt$

الحل:

نلاحظ أنّ

$$L=\int_1^2 t\cos\left(t^2\right)dt=\frac{1}{2}\int_1^2\cos\left(t^2\right)(t^2)'dt=\frac{1}{2}\int_1^2\cos\left(g(t)\right)g'(t)dt$$

حيث عرّفنا $g(t)=t^2$ على المجال $[1,2]$. إذن

$$L=\frac{1}{2}\int_{g(1)}^{g(2)}\cos(u)du=\frac{1}{2}\int_1^4\cos(u)du$$

$$=\frac{1}{2}[\sin(u)]_1^4=\frac{1}{2}(\sin(4)-\sin(1))$$

تـدريـب

احسبِ التكاملين الآتيين $L_1=\int_0^2 t\sin\left(t^2\right)dt$ $\quad L_2=\int_0^3\frac{x}{\sqrt{1+x}}dx$

إذا كان لكل من الدالتين u و v مشتقٌّ مستمرٌّ على المجال $[a,b]$ فعندها

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$$

وهي تنتج من تعريف التكامل المحدّد وعلاقة المكاملة بالتجزئة التي مرّت معنا سابقاً.

مثال 1 احسبِ العددَ: $I = \int_1^e \ln x dx$

الحل: نكامل بالتجزئة :

$$u(x) = \ln(x), \quad v'(x) = 1$$
$$u'(x) = \frac{1}{x}, \quad v(x) = x$$

ومنه

$$I = \left[x \ln x\right]_1^e - \int_1^e x \frac{1}{x} dx = \left[x \ln x\right]_1^e - \left[x\right]_1^e = 1$$

مثال 2 احسبِ العددَ $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$

الحل: نكامل بالتجزئة:

$$u(x) = x, \quad v'(x) = \sin(x)$$
$$u'(x) = 1, \quad v(x) = -\cos(x)$$

ومنه

$$I = \underbrace{\left[-x \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos x dx = \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

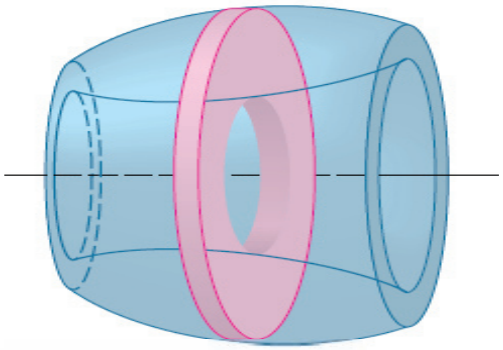
تدريب

أوجدْ كلّ عددٍ ممّا يأتي بطريقة التجزئة:

1. $I_1 = \int_0^1 x e^x dx$
2. $I_2 = \int_0^{\pi} 2x \cos x dx$
3. $I_3 = \int_1^e x \cdot \ln x dx$
4. $I = \int_1^2 \sqrt[3]{1-x}\, dx$
5. $I = \int_1^2 \frac{x+1}{x\sqrt{x}} dx$
6. $I = \int_1^4 \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$
7. $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\, dx$
8. $I = \int_1^{e^3} \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}} dx$

تطبيقات التكامل

5.2

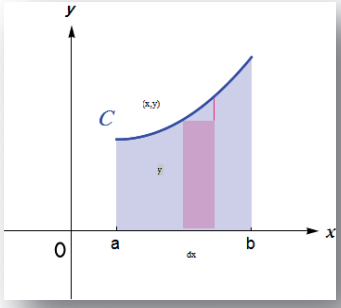


سوف تتعلم

2-5-1 حساب مساحة سطح مستوٍ.

2-5-2 حساب حجم مجسم دوراني.

2-5-3 حساب طول منحنٍ أملس .



مقدمة: إنّ عملية التكامل هي العملية المعاكسة للتفاضل ولكن تاريخياً وجِدَ التكامل قبل أن يوجد التفاضل وذلك نظراً لارتباطه بتطبيقات حياتية في حساب المساحات والحجوم وغير ذلك ولقد تطور التكامل المحدد على يد العالِمين الشهيرين نيوتن وليبنتز وغيرهما، وطُبق بشكل فعّال في حساب مساحة سطح وحجم مجسم وطول منحن أملس وفي حساب عمل قوة متغيرة وغيرها.

1.5.2 حساب مساحة سطح مستو

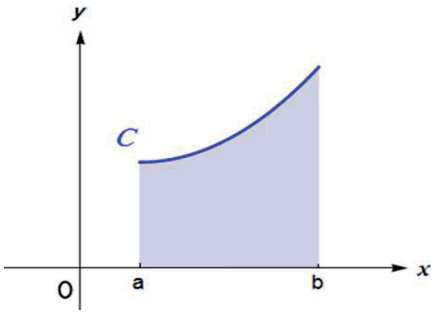
إنّ حساب مساحة سطح مستو محدود، يعني موازنته مع واحدة المساحة، التي هي مساحة مربع طول ضلعه واحدة الأطوال.

ونقبل أن :

- مساحة أي سطح محدود في المستوي هو عدد حقيقي موجب.
- مساحة اجتماع سطحين منفصلين تساوي مجموع مساحتيهما.
- مساحتي سطحين متناظرين بالنسبة إلى نقطة أو إلى مستقيم متساويتان.
- مساحتي سطحين ينتج أحدهما عن الآخر بتطبيق انسحاب أو دوران في المستوي متساويتان.

ولحساب مساحة سطح محدود بطريقة التكامل المحدد نميّز الحالات الآتية:

الحالة الأولى: السطح يقع فوق $x'x$، وجدنا عند دراسة التكامل المحدد أنه إذا كان C الخطّ البياني للدالة f المستمرة على المجال $[a,b]$ وكان $f(x)\geq 0$ على هذا المجال، فإن مساحة السطح المحدد بالخط C والمحور $x'x$ والمستقيمين $x=a$ و $x=b$ تحسَب بالصيغة



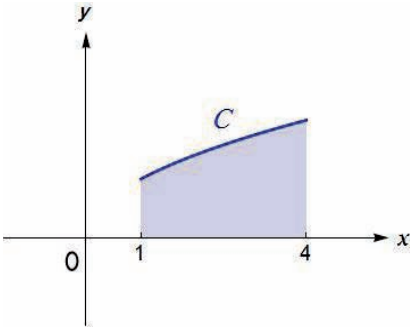
$$S=\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$$

حيث F هي أي دالة أصلية للدالة f.

مثال

لتكنِ الدالةُ f المعرفة على $[0,+\infty[$ وفق $f(x)=\sqrt{x}$، التي خطها البياني C موضّح في الشكل. احسب مساحة السطح المحدد بالخط C والمحور $x'x$ و المستقيمين $x=4$ و $x=1$.

الحل:



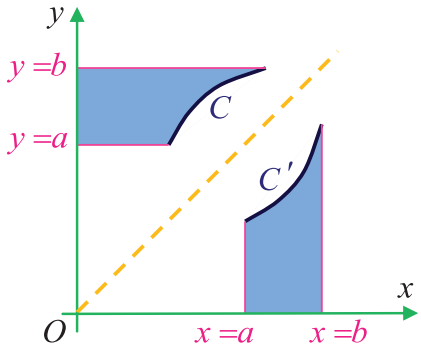
نلاحظ أن الخطّ البياني للدالة يقع فوق محور الفواصل $x'x$ إذن

$$S=\int_1^4 f(x)dx=\int_1^4\sqrt{x}\,dx$$

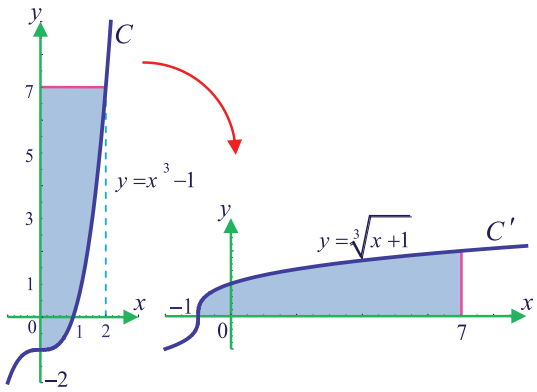
$$=\int_1^4 x^{\frac{1}{2}}dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4=\frac{2}{3}(8-1)=\frac{14}{3}$$

ملاحظة : إذا كُتِبَتْ معادلة الخط C وفق العلاقة $x=g(y)$.

عندئذٍ لحساب مساحة السطح المحدد بالخط C والمحور $y'y$، والمستقيمين $y=a$ و $y=b$ حيث $a<b$، والواقِع إلى يمين $y'y$ كما في الشكل، يمكننا حسابُ المساحة التي يحصرها نظيره C' بالنسبة إلى منصف الربع الأول (ذي المعادلة $y=g(x)$). والمحور $x'x$، والمستقيمين $x=a$ و $x=b$، ويمكن تجزئة السطح المطلوب وحسابه بطرائقَ أخرى.



مثال لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x^3-1$ التي خطّها البياني C موضّح بالرسم. احسب مساحة السطح المحدّد بالخط C والمحور $y'y$ والمستقيم $y=7$.

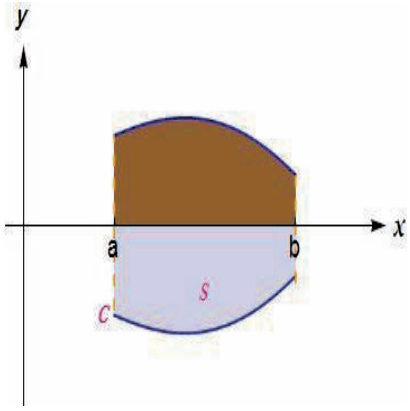


الحل:

نلاحظ أنّ $y=f(x)=x^3-1$ تكافئ $x=g(y)=\sqrt[3]{1+y}$. فاعتماداً على الملاحظة السابقة، المساحة المطلوبة تساوي مساحة السطح الذي يحصره الخطّ البياني C' للدالة $x\mapsto g(x)$ والمحور $x'x$ والمستقيم $x=7$. ومنه

$$S=\int_{-1}^{7}\sqrt[3]{1+x}\,dx=\int_{-1}^{7}(1+x)^{\frac{1}{3}}dx=\left[\frac{3}{4}(1+x)^{\frac{4}{3}}\right]_{-1}^{7}=12-\frac{3}{4}=\frac{45}{4}$$

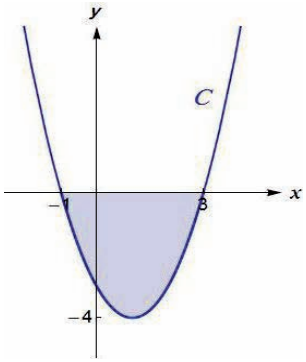
الحالة الثانية: إذا كانت الدلة $y=f(x)$ مستمرة على المجال $[a,b]$ وكان $f(x)\le 0$ على $[a,b]$ عندئذٍ، يقع الخط البياني C تحت محور الفواصل $x'x$.



لحساب S، مساحة السطح المحدد بالخط C والمحور $x'x$ والمستقيمين $x=a$ و $x=b$، نحسب مساحة نظيره بالنسبة إلى محور الفواصل، وهو إذن السطح المحصور بالخط البياني C_1، للدالة $x\mapsto -f(x)$ والمحور $x'x$ والمستقيمين $x=a$ و $x=b$، أي

$$S=\int_a^b(-f(x))dx=-\int_a^b f(x)dx$$

ليكن C الخطّ البياني للدالة $f(x)=x^2-2x-3$ المرسوم جانباً، احسب مساحة السطح المحدود المعيّن بالخط C والمحور $x'x$.



مثال

الحل: نلاحظ أنّ C يتقاطع مع محور الفواصل عند $x=3$ و $x=-1$ والخط البياني يقع تحت محور الفواصل على المجال $[-1,3]$. إذن

$$S=\int_{-1}^{3}-f(x)dx=\int_{-1}^{3}\left(-x^2+2x+3\right)dx$$

وأخيراً

$$S=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right]_{-1}^{3}=9-\left(\frac{1}{3}+1-3\right)=\frac{32}{3}$$

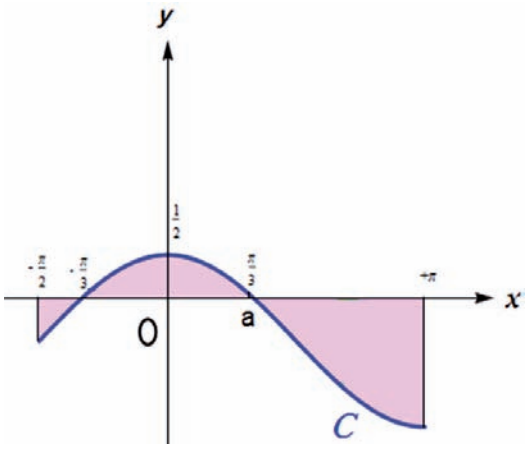
الحالة الثالثة: إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرّة على $[a,b]$ وخطها البياني C يقطع المحور $x'x$. فعندها تُعطى مساحة السطح المحدد بالخط C والمحور $x'x$ والمستقيمين $x=a$ و $x=b$، بالصيغة

$$\boxed{S=\int_a^b |f(x)|dx}$$

ولحساب هذا التكامل نجزّئ المجال $[a,b]$ تبعاً لإشارة الدالة f إلى مجالات جزئية تكون إشارة $f(x)$ ثابتة على كلّ واحد منها، ثُمّ نحسب تكامل f على كلّ منها ونجمع القيم المطلقة لهذه التكاملات. المثال الآتي يوضح هذه الطريقة.

مثال

لتكن الدالة f المعرفة على $\left[-\frac{\pi}{2},\pi\right]$ وفق $f(x)=-\frac{1}{2}+\cos x$ التي خطها البياني C موضّح في الشكل المرسوم جانباً. احسب مساحة السطح المحدّد بالخط C والمحور $x'x$ والمستقيمين $x=-\frac{\pi}{2}$ و $x=\pi$.



الحل:

ندرس تقاطع C مع $x'x$ (معادلته $y=0$)، فنجد بحلّ المعادلة $f(x)=0$، أنّ حلولها التي تنتمي إلى المجال $\left[-\frac{\pi}{2},\pi\right]$ هي $x=\frac{\pi}{3}$ و $x=-\frac{\pi}{3}$. إذن الدالة f تحافظ على إشارة ثابتة على كلّ من المجالات :

$\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right]$ و $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$ و $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$، وتكـــون f سالبة على المجالين الأول والثالث وموجبة على المجال الثاني، إذن

$$S=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}}-f(x)dx+\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}f(x)dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}-f(x)dx$$

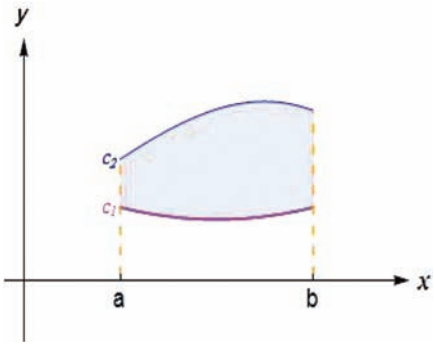
$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{2}-\cos x\right)dx+\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(-\frac{1}{2}+\cos x\right)dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\left(\frac{1}{2}-\cos x\right)dx$$

ومنه

$$S=\left[\frac{1}{2}x-\sin x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}}+\left[-\frac{1}{2}x+\sin x\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}+\left[\frac{1}{2}x-\sin x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$$

$$=-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{4}-1-\frac{\pi}{3}+2+\frac{\pi}{1}-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{12}+2+\sqrt{3}$$

الحالة الرابعة: مساحة السطح المحدّد المحصور بين خطين بيانيّين لدالتين:

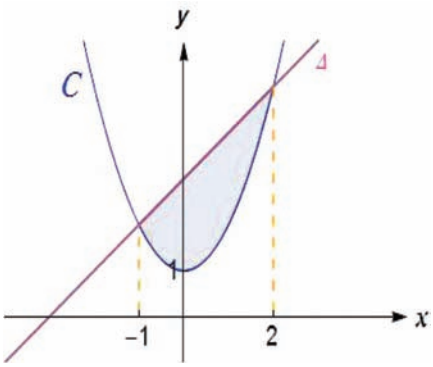


إذا كان C_1 الخط البياني للدالة f_1 المستمرة على $[a,b]$ وكان C_2 الخط البياني للدالة f_2 المستمرة على $[a,b]$ وكان $f_2(x)\le f_1(x)$ أيّاً كان $x\in[a,b]$. عندئذٍ تُعطَى مساحة السطح المحصور بين C_1 و C_2 والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$ بالصيغة الآتية

$$S=\int_a^b\left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx$$

مثال

لتكن الدالة $f(x)=x^2+1$ التي خطّها البياني C موضّح في الرسم جانباً. احسب مساحة السطح المحدود المحصور بين C والمستقيم Δ الذي معادلته $y=x+3$.



الحل: فواصل نقاط التقاطع C والمستقيم Δ هي حلول المعادلة: $x^2+1=x+3$ أو $x^2-x-2=0$ التي تقبل الحلين $x_2=2$ و $x_1=-1$. في حالة x من المجال $[-1,2]$ لدينا

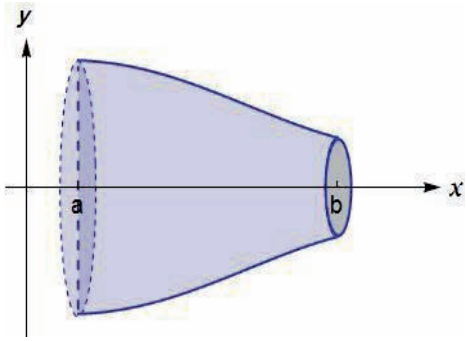
$$y_\Delta-y_C=x+3-1-x^2=2+x-x^2=(1+x)(2-x)\ge 0$$

إذن

$$S=\int_{-1}^{2}(y_{\Delta}-y_{c})dx=\int_{-1}^{2}(-x^{2}+x+2)dx$$

$$=\left[-\frac{x^{3}}{3}+\frac{x^{2}}{2}+2x\right]_{-1}^{2}=\left(-\frac{8}{3}+2+4\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)=\frac{9}{2}$$

2.5.2 حساب حجم مجسّم دورانيّ

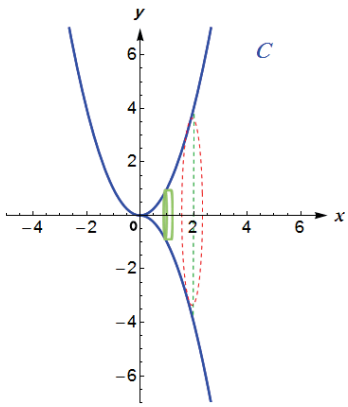


طريقة القرص : ليكن C الخطّ البياني للدالة f المستمرة الموجبة على المجال $[a,b]$، يولّد دوران المنطقة المحددة بالخط C، والمحور $x'x$ والمستقيمين $x=a$ و $x=b$ حول محور الفواصل $x'x$ دورة كاملة مجسماً نسميه مجسماً دورانياً.

يُعطى حجمُ هذا المجسم الدوراني بالصيغة

$$V=\int_{a}^{b}\pi(f(x))^{2}dx$$

مثال: ليكن C الخطّ البياني للدالة f المعرفة على $D=\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x^{2}$.
احسب حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحددة بالخط C والمحور $x'x$ والمستقيمين $x=0$ و $x=2$.



الحل:

$$V=\int_{0}^{2}\pi(f(x))^{2}dx=\int_{0}^{2}\pi(x^{2})^{2}dx$$

$$=\pi\int_{0}^{2}x^{4}dx=\left[\frac{x^{5}}{5}\right]_{0}^{2}=\frac{32\pi}{5}$$

تدريب

[1] ليكن Δ الخطّ البياني للدالة f المعرفة على $D=[-2,2]$ وفق $f(x)=x\sqrt{4-x^{2}}$.

1) ادرس تغيّرات f، ونظّم جدولاً بها، وعيّن كلّ قيمة كبرى أو صغرى محلياً للدالة f وارسم C.

2) احسب مساحة السطح المحدد بـ C والمحور $x'x$.

3) احسب حجم المجسّم الناتج عن دوران السطح المحدد بالخط C والمحور $x'x$، حول $x'x$ دورة كاملة.

[2] ليكن القطعان المكافئان $p_1 : y^2 = x$, $p_2 : y = x^2$

1) احسب S مساحة السطح المحصور بين هذين القطعين .

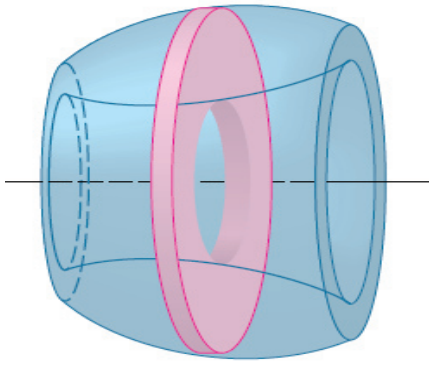
2) احسب V حجم المجسم الناتج عن دوران السطح السابق حول $x'x$ دورة كاملة .

5.2

طريقة الحلقة:

ليكن C_1 الخط البياني للدالة f_1 المستمرة على $[a,b]$، وليكن C_2 الخط البياني للدالة f_2 المستمرة على $[a,b]$. ولنفترض أنّ

$f_1(x) \geq f_2(x) \geq 0$ أياً كان $x \in [a,b]$.

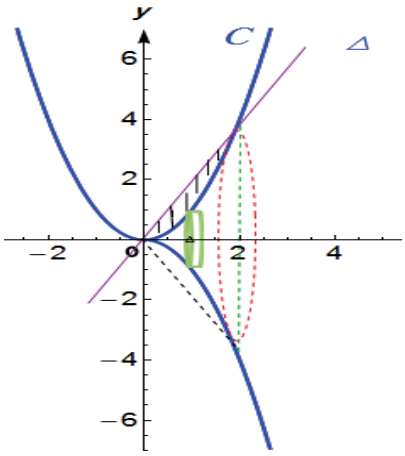


كما في الشكل المجاور، عندئذٍ حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحددة بالخطين C_1 و C_2 والمستقيمين $x = a$ و $x = b$ يساوي حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحددة بالخط C_1 والمستقيمين $x = a$ و $x = b$ مطروحاً منه حجمُ المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحددة بالخط C_2 والمستقيمين $x = a$ و $x = b$ حول $x'x$، فهو يُعطَى إذن بالصيغة :

$$V = \pi \int_a^b \left((f_1(x))^2 - (f_2(x))^2 \right) dx$$

مثال 1

ليكن C الخط البياني للدالة $f(x) = x^2$ و Δ_1 المستقيم $y = 2x$. احسب حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحدودة المعينة بالخط البياني C، حول المحور $x'x$ دورة كاملة.



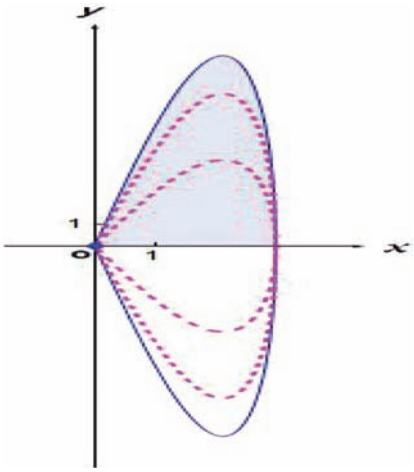
الحل: فواصل نقاط تقاطع المنحنيين C و Δ_1، هي $x = 0$ و $x = 2$. ومن ثمّ

$$V = \pi \int_0^2 \left((2x)^2 - (x^2)^2 \right) dx = \pi \int_0^2 \left(4x^2 - x^4 \right) dx$$

$$= \pi \left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5} \right) = \frac{64}{15} \pi$$

مثال 2

ليكن C الخط البياني للدالة $f(x)=2x\sqrt{9-x^2}$ على المجال $[0,3]$. احسب حجم المجسّم الناتج عن دوران المنطقة المحدودة المعينة بالمستقيمين $x=0$ و $x=3$، وبالخط C، حول المحور $x'x$ دورة كاملة.



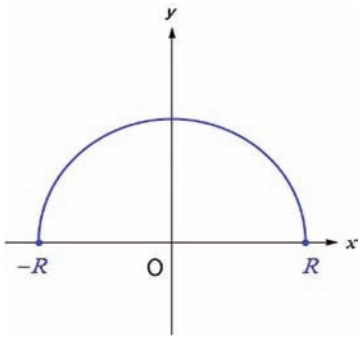
الحل:

$$V=\pi\int_0^3[f(x)]^2dx=4\pi\int_0^3 x^2(9-x^2)dx=4\pi\left[3x^3-\frac{1}{5}x^5\right]_0^3$$

$$=4\pi\left[81-\frac{1}{5}\cdot 243\right]-0=4\pi\left(\frac{405-243}{5}\right)=\frac{648}{5}\pi$$

مثال 3

برهن أن حجم كرة نصفُ قطرها R يساوي $\frac{4}{3}\pi R^3$.



حجم الكرة يساوي الحجم الناتج عن دوران نصف دائرة لها القطر نفسه حول أحد أقطارها دورة كاملة.

إنّ الخط البياني لنصف الدائرة : هو الخطّ البياني للدالة

$$f:[-R,R]\to\mathbb{R}:f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$$

ونحسب حجم الكرة V كما يأتي

$$V=\pi\int_{-R}^{+R}(f(x))^2dx=\pi\int_{-R}^{+R}(R^2-x^2)dx=\pi\left[R^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{+R}$$

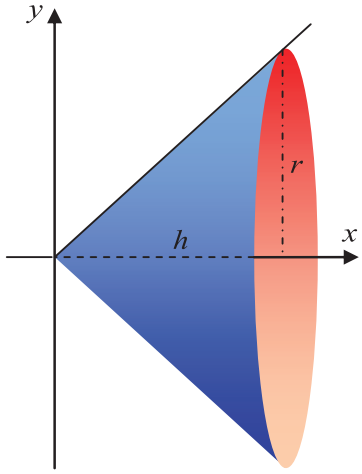
$$=\pi\left[R^3-\frac{R^3}{3}\right]-\pi\left[-R^3+\frac{R^3}{3}\right]=\frac{4}{3}\pi R^3$$

مثال 4

برهن أنّ حجم المخروط الدوراني الذي نصفُ قطر قاعدته r وارتفاعه h يساوي $\frac{1}{3}\pi r^2h$.

الحل :

يتولد المخروط من دوران قطعة مستقيمة محمولة على مستقيم مارّ من مبدأ الإحدثيات حول محور الفواصل $x'x$. معادلة المستقيم المارّ من مبدأ الإحداثيات هي $y = f(x) = \frac{r}{h}x$.



إذن حجم المخروط الدوراني يساوي

$$V = \pi\int_0^h (f(x))^2 dx = \pi\int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \pi\frac{r^2}{h^2}\int_0^h x^2 dx$$

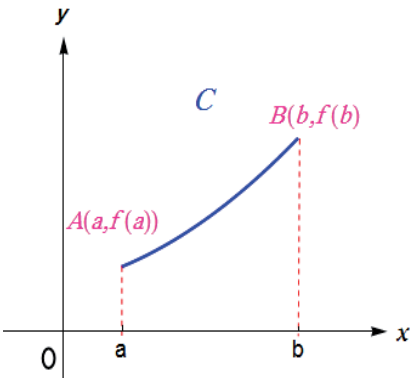
$$= \pi\frac{r^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \pi\frac{r^2}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

تدريب

1. ليكن C الخطّ البياني للدالة f المعرفة على $D = [0,\infty[$ وفق $f(x) = 2\sqrt{x}$ وليكن $\Delta : 6y = x$ احسب حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحددة بالخطين C و Δ حول $x'x$ دورة كاملة.
حجم القبة الكروية (الجواب: $\frac{32\pi}{3}$)

2. برهن أن حجم جذع المخروط الذي ارتفاعه h ونصفا قطري قاعدتيه هما R , r يساوي
$$V = \frac{\pi}{3}h\left(R^2 + r^2 + r.R\right)$$

3.5.2 حساب طول منحنٍ أملس



تعريف(1): ليكن C منحني الدالة f المستمرة على $[a,b]$ نقول إنّ C أملس على $[a,b]$ إذا كان للدالة f مشتقّ مستمرّ على $[a,b]$.

تعريف(2): ليكن C منحنيَ الدالة f المستمرة على $[a,b]$، ولنفترض أنّ المنحني C أملس عندئذٍ يعطى طول القوس AB من C بالصيغة : $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$

مثال

ليكن C منحني الدالة f المعرفة على $[0,+\infty[$ وفق $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$، احسب طول القوس منها المحدد بالنقطتين A و B اللتين فاصلتاهما $x=5$ و $x=13$ بالترتيب.

الحل:

نلاحظ أنّ $y'=f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$، إذن

$$L=\int_5^{13}\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\left[\frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_5^{13}=\frac{988}{27}$$

تدريب

1 أوجد طول قوس المنحني C الذي معادلته $y=x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$ من $x=1$ إلى $x=16$.

(الجواب: $L=24$)

2 ليكن C منحني الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ وفق $f(x)=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2x}$ ولتكن A,B نقطتين من C حيث $x_A=1, x_B=4$ احسب طول القوس AB. (الجواب: $L=\frac{87}{8}$)

3 احسب S مساحة السطح المحصور بين الخطين البيانيين للدالتين f_1 و f_2 حيث $f_1(x)=\ln(x)$ و $f_2(x)=\ln^2(x)$. (الجواب $S=3-e$)

4 احسب L طول قوس منحني الدالة f حيث $f(x)=\ln(x^2-1)$ الموافق للمجال $[2,5]$.

(الجواب $L=3+\ln 2$)

5 لتكن لدينا الدالتان f_1 و f_2 المعرفتان على $\mathbb{R}$ وفق $f_1(x)=e^x$ و $f_2(x)=e^{-x}$.

1) احسب S مساحة السطح المحصور بالخطين البيانيين لهاتين الدالتين والمستقيم الذي معادلته $x=1$.

2) احسب V حجم المجسم الناتج عن دوران السطح السابق حول $x'x$ دورة كاملة

(الجواب $S=e+\frac{1}{e}-2$, $V=\pi(e^2-e^{-2})$)

المعادلات التفاضلية الخطية

من المرتبة الثانية على الأكثر

6.2

سوف تتعلم

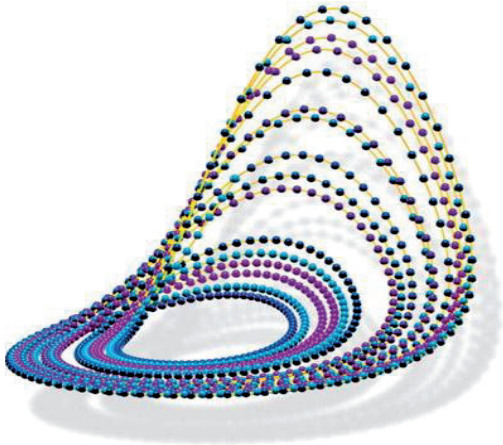
2-6-1 تعريف المعادلة التفاضلية الخطية، وتعرُّف الشكل العام للمعادلة التفاضليّة.

2-6-2 مرتبة المعادلة التفاضليّة.

2-6-3 حل معادلة تفاضليّة.

2-6-4 تشكيل معادلة تفاضليّة.

2-6-5 نماذج من معادلات تفاضليّة بسيطة وتطبيقات حياتيّة.



مقدّمة:

تكتسبُ المعادلاتُ التفاضليّة أهميّةً كبرى في علوم الرياضيات والفيزياء والكيمياء، وبواسطتها أمكن فهم كثير من الظواهر المعقّدة في حياتنا اليومية، أبرزها الظاهرة الكهرومغناطيسية؛ إذ إنّ أغلب الظواهر الطبيعية يُعبَّرُ عنها بعلاقات تحوي الدوالّ و مشتقّاتها. وتُعدُّ معادلاتُ النواس البسيط والنابض المهتز والماء المتموج و دارات الشحن والتفريغ والتجاوب الكهربائية إحدى أبرز الأمثلة على المعادلات التفاضلية.

لذلك ما من شخص يعمل في حقل العلوم التطبيقية إلا ويجد نفسه أمام معادلة تفاضلية أو أكثر، وعليه حلُّها لأنّ حلّ كلّ معادلة هو وصف أوضح من المعادلة نفسها للحادثة التي تمثّلها.

1.6.2 تعريف المعادلة التفاضلية

تعريف: المعادلة التفاضلية هي كلّ معادلة تحوي مشتقاً واحداً على الأقل للدالة المجهولة f .

مثال كلٌّ من المعادلات الآتية معادلة تفاضلية :

1) $y'+y=0$

2) $2y''+3y'^2-y=\sin x$

3) $y'''-2y'x=e^x$

4) $y'-y''^2=\ln x$

حيث رمزنا إلى $y, y', y'', \ldots\ldots\ldots, y^n$ بـ $f, f', f'', \ldots\ldots\ldots, f^n$

2.6.2 المعادلة التفاضلية الخطيّة

تكون المعادلة التفاضلية خطيّةً إذا كان بالإمكان إرجاعُها إلى الشكل:

$$y^{(n)}+c_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots\cdots+c_1y'+c_0y=g(x)$$

ونقول إنّ هذه المعادلةَ من المرتبة n (مرتبة أعلى مشتقّ موجود فيها)

وستقتصر دراستنا على المعادلات التفاضليّة الخطيّة من المرتبة الثانية على الأكثر من الشكل $y''+by'+cy=g(x)$ حيث b و c ثابتان حقيقيان (لا يتبعان x).

مثال عندما يهتزّ نابضٌ مرنٌ مهملُ الكتلة شاقولياً، ثابت صلابته k يحمل ثقلاً مقداره (m)g

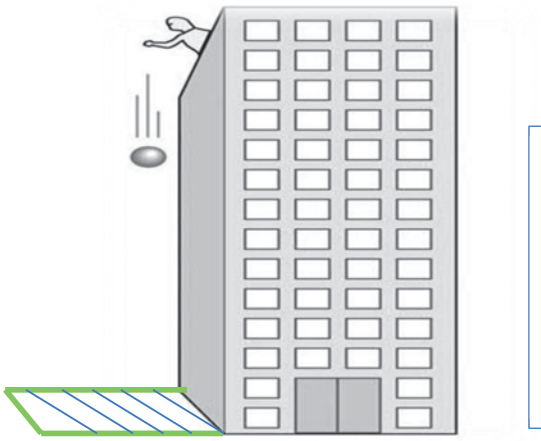
تكون المعادلة التفاضلية لحركته: $mv'=-ky$ ومنه $y''+\frac{k}{m}y=0$ وهي معادلة تفاضليّة خطيّة من المرتبة الثانية.

مثال

السقوط الحرّ :عندما يسقط جسمٌ كتلتُهُ m سقوطاً حراً من مكان مرتفع على سطح الأرض تكون المعادلة التفاضلية لحركته:

$my''=mg$ ومنه $y''=g$

حيث g تسارع الجاذبية الأرضية وهي معادلة تفاضلية خطيّة من المرتبة الثانية.



3.6.2 حلّ معادلة تفاضلية

حلّ المعادلة التفاضلية: لتكنِ المعادلة التفاضلية:

$$y^{(n)}+c_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots\cdots+c_1y'+c_0y=g(x)$$

نسمي حلاً لهذه المعادلة كلّ دالة $x\mapsto y=\varphi(x)$ اشتقاقية n مرة متتالية في المجال $I\subseteq\mathbb{R}$ وتحقق ومشتقاتها المعادلة التفاضلية المفروضة.

مثال تحقق أن الدالة f : $y=f(x)=\cos(x)$ هي حل على $\mathbb{R}$ للمعادلة التفاضلية

$$y''+y'+y=-\sin x$$

الحل: نشتق الدالة y فنحصل على $y'=-\sin x$ نشتق مرة ثانية فنحصل على $y''=-\cos x$ نعوض في المعادلة التفاضلية المعطاة فنجد : $y''+y'+y=-\cos x-\sin x+\cos x=-\sin x$

فالمعادلة التفاضلية محققة أي أنّ الدالة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية.

مثال تحقق أن الدالة f : $y=f(x)=2\cdot e^x$ هي حل على $\mathbb{R}$ للمعادلة التفاضلية

$$y''-2y'+y=0$$

الحل: نشتق الدالة y مرتين متتاليتين نجد : $y'=2e^x$ ، $y''=2e^x$. نعوّض في المعادلة التفاضلية المفروضة فنجد : $y''-2y'+y=2e^x-4e^x+2e^x=0$

إذن الدالة $y=2e^x$ تحقق المعادلة التفاضلية، أي أنها حلّ للمعادلة التفاضلية المفروضة.

الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية : هو الصيغة العامة للدوال التي تمثّل مجموعةَ جميع حلول المعادلة التفاضلية المدروسة.

الحلّ الخاص للمعادلة التفاضلية : هو أحد حلول المعادلة التفاضليّة المدروسة.

ملاحظة: إنّ حلّ معادلة تفاضلية هو إيجادُ حلّها العام.

نشاط لتكنِ المعادلة التفاضليّة $y''+y'-6y=0$

1. تحقق أنّ كلّ دالة من الدوال $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-3x}$ حيث $(c_1\,,c_2$ ثابتان كيفيان) حلٌّ للمعادلة التفاضلية المفروضة.
2. استنتج أنّ كلاً من الدالتين $y=2e^{-3x}$, $y=e^{2x}$ حلٌّ للمعادلة التفاضلية المفروضة.

الحل

1) نشتقّ الدالة مرتين متتاليتين فنجد : $y'=2c_1e^{2x}-3c_2e^{-3x}$, $y''=4c_1e^{2x}+9c_2e^{-3x}$

نعوّض في المعادلة التفاضلية فنجد :

$$y''+y'-6y=4c_1e^{2x}+9c_2e^{-3x}+2c_1e^{2x}-3c_2e^{-3x}-6c_1e^{2x}-6c_2e^{-3x}=0$$

2) إنّ الحلّ $y=e^{2x}$ ينتج من الحل العام $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-3x}$ من أجل قيم للثوابت هي:

$$c_1=.....\quad,\quad c_2=.....$$

إنّ الحلّ $y=2e^{-3x}$ ينتج من الحل العام $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-3x}$ من أجل قيم للثوابت هي:

$$c_1=.....\quad,\quad c_2=.....$$

4.6.2 تشكيل معادلة تفاضليّة

تشكيل معادلة تفاضلية: هو إيجاد المعادلة التفاضلية ويتم وفق ما يأتي:

تشكيل معادلة تفاضلية من معادلة جبرية تحتوي على ثابت كيفي أو أكثر:

نشتقّ المعادلة عدداً من المرات يساوي عددَ الثوابت الكيفية ، ثم نحذف هذه الثوابتَ من المعادلة الجبرية ومشتقاتها فنحصل بذلك على المعادلة المطلوبة .

مثال أوجد معادلة تفاضلية تقبل الدوال $y=c_1e^{x}$ حلولاً لها حيث c_1 ثابت كيفي.

الحل: نشتقّ المعادلة المفروضة فنجد $y'=c_1e^{x}$ لاحظ $y-y'=0$ هي معادلة تفاضلية تقبل هذه الدوال حلولاً لها.

مثال أوجد معادلةً تفاضليّة تقبل الدوال: $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$ حلولاً لها حيث c_1,c_2 ثوابت كيفية.

الحل: نشتقّ مرتين فنجد $y'=-2c_1\sin 2x+2c_2\cos 2x$

$$y''=-4c_1\cos 2x-4c_2\sin 2x$$

أو $y''=-4(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)$. إذن $y''=-4y'$ ومنه $y''+4y'=0$

وهي المعادلة التفاضلية المطلوبة.

تدريب

أوجد معادلةً تفاضليّةً يمكن تشكيلها من كلٍّ من المعادلات الجبرية الآتية:

1. $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}$
2. $y=\cos(6x+c_1)$
3. $y=c_1+c_2x^{2}$

5.6.2 نماذجُ من معادلات تفاضلية بسيطة وتطبيقات حياتية

أولاً : المعادلة التفاضلية $y'=f(x)$ ، حيث f دالةٌ مستمرّة على المجال $I\subseteq\mathbb{R}$

نعلم أنّ الدوالَّ التي تحقّق هذه المعادلة هي الدوال الأصلية للدالة f ، على المجال I .

مثال حلَّ في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية: $y'=f(x)=2x-3$

الحل: $f(x)=2x-3$ مستمرّة على $\mathbb{R}$ ، فالحل العام لهذه المعادلة التفاضلية ، هو مجموعة الدوال الأصلية على $\mathbb{R}$ ، للدالة f : $f(x)=2x-3$ ، و بالتالي نجد الحلّ العام للمعادلة المفروضة هو:

$$y=F(x)=x^2-3x+c$$

ثانياً : المعادلة التفاضلية $y''=f(x)$ حيث f دالة مستمرة على المجال $I\subseteq\mathbb{R}$

بما أنّ f دالة مستمرة على المجال I ، فيوجد لها دالة أصلية على I ، ولتكن F ، والدالة F اشتقاقية على المجال I فهي مستمرة على I فيوجد لها دالة أصلية على I ، ولتكن G ، وهكذا يكون لدينا

$$y''=f(x)$$
$$y'=F(x)+c_1$$
$$y=G(x)+c_1x+c_2$$

مثال حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $y''=-4x^2+6x-1$

الحل: لدينا $y''=f(x)=-4x^2+6x-1$

ومنه: $y'=-\frac{4}{3}x^3+3x^2-x+c_1$

وبالتالي الحل العام للمعادلة التفاضلية المفروضة هو: $y=-\frac{1}{3}x^4+x^3-\frac{1}{2}x^2+c_1x+c_2$.

ثالثاً : المعادلة التفاضلية $y''=-\omega^2 y$ ، حيث ω عدد حقيقي غير معدوم

نقبل أن الحل العام لهذه المعادلة هو : $y=c_1\sin\omega x+c_2\cos\omega x$ حيث c_1,c_2 ثابتان اختياريّان.

مثال حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $y''+4y=0$

الحل: نكتب المعادلة بالشكل $y''=-4y$ فهي من الشكل $y''=-\omega^2 y$ مع $\omega=2$ إذن

الحل العام للمعادلة هو : $y=c_1\sin 2x+c_2\cos 2x$

مثال حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $4y''+\pi^2 y=0$

ثم أوجد حلها الخاص $y=\varphi(x)$ الذي يحقق $\varphi(2)=1, \varphi'(-2)=2\pi$.

الحل: نكتب المعادلة بالشكل: $y''=-\frac{\pi^2}{4}y$

لدينا $\omega^2=\frac{\pi^2}{4}$ ولنأخذ $\omega=\frac{\pi}{2}$ فيكون الحل العام:

$$y=c_1\sin\frac{\pi}{2}x+c_2\cos\frac{\pi}{2}x$$

ولإيجاد الحل الخاص نجد $\varphi'(x)=c_1\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x-c_2\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x$

$$\varphi'(-2)=2\pi \Rightarrow -c_1\frac{\pi}{2}=2\pi \Rightarrow c_1=-4$$

$$\varphi(2)=1 \Rightarrow -c_2=1 \Rightarrow c_2=-1$$

فالحل الخاص المطلوب هو: $y=-4\sin\frac{\pi}{2}x-\cos\frac{\pi}{2}x$

ملاحظة: يمكن أخذ $\omega=-\frac{\pi}{2}$ فنحصل على الحل المطلوب نفسه

تدريب

حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلات الآتية :

1. $y''+4y=0$
2. $y''+y=0$
3. $16y''+9y=0$

رابعاً: المعادلة التفاضلية $a\in\mathbb{R}$: $y'+ay=0$ نقبل أن الحل العام للمعادلة التفاضلية هو $y=c\cdot e^{-ax}$ حيث c ثابتٌ كيفي.

مثال1 الحل العام للمعادلة $y'+2y=0$ هو $y=ce^{-2x}$

مثال2 المعادلة $y'=3y$ نكتبها بالشكل $y'-3y=0$ ويكون حلها العام $y=ce^{3x}$

تدريب

أوجد الحل العام للمعادلة $3y' - y = 0$ ثم أوجد الحل الخاص لها الذي يأخذ القيمة 4 عند $x = \ln 8$.

حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلات التفاضلية الآتية:

1. $y' - \sqrt{2}y = 0$
2. $-2y' + 5y = 0$
3. $y' - 2y = 0$

خامساً: المعادلة التفاضلية $y' + ay = k : a, k \in \mathbb{R}$

نميّز حالتين

1) $a = 0$ فالمعادلة تكافئ $y' = k$ وحلها $y = kx + c$.

2) $a \neq 0$ فالمعادلة تكافئ $y' = -ay + k$ وحلها العام $y = ce^{-ax} + \frac{k}{a}$.

تدريب

حل المعادلة التفاضلية

$$y' - \sqrt{2}y = 3$$

$$y = ce^{-\sqrt{2}x} + \frac{3}{\sqrt{2}}$$

مسألة 1

خزان حجمه $V\ \text{m}^3$ مليء بالماء المالح الحاوي على $W\ (\text{kg})$ من الملح المذاب نسكب فيه ماءً عذباً بمعدل $a\ (\text{m}^3/\text{s})$، ونفتح فيه فتحة تسمح بخروج الماء المالح بمعدل $a\ (\text{m}^3/\text{s})$ أوجد كتلة الملح الموجود في الخزان بدلالة الزمن t ؟

الحل:

نفترض أن كتلة الملح الموجود في الخزان في اللحظة t هو x فيكون التركيز (مقدار الملح في واحدة الحجم) هي $\frac{x}{V}\ \text{kg}/\text{m}^3$.

في خلال زمن قصير قدره Δt يخرج ماء مالح حجمه $a \cdot \Delta t$ يحوي هذا الماء الخارج على كمية من الملح هي جداء التركيز في حجم الماء الخارج أي $\frac{a \cdot x \cdot \Delta t}{V}\ \text{kg}$،

وتكون كمية الملح الموجودة في الخزان قد نقصت بمقدار Δx إذن نظراً إلى مبدأ انحفاظ الكتلة يجب أن يكون $\frac{a \cdot x \cdot \Delta t}{V} = -\Delta x$ أو

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = -\frac{a \cdot x}{V}.$$

وبجعل Δt تسعى إلى 0 نستنتج المعادلة التفاضلية لهذه الظاهرة $x' + \frac{a}{V}x = 0$.

التي حلها العام $x = ce^{-\frac{a}{V}t}$. ولكن تبعاً لشرط البدء لدينا $x = W$ عندما $t = 0$، وبالتعويض نجد أن مقدار الملح الموجود المتبقي في الخزان في اللحظة t يُعطَى بالعلاقة $x(t) = We^{\frac{-at}{V}}$ kg ولمعرفة مقدار ما يتبقى منه بعد دقيقة مثلاً نجد: $x = We^{\frac{-60a}{V}}$ kg.

مسألة 2 يسقط جسم كتلته m بدءاً من السكون عن ارتفاعٍ عالٍ بتأثير الجاذبية الأرضية g و مقاومة الهواء التي تتناسب قيمتها العددية مع سرعة الجسم وتساوي $K \cdot v$، نفترض أن كلاً من الجاذبية الأرضية والكتلة يبقيان ثابتان.

أوجد العبارة الزمنية لسرعة هذا الجسم.

الحل: نطبق قانون نيوتن الثاني للحركة (محصلة القوى المؤثرة في جسم تساوي المعدل الزمني لتغير كمية الحركة): $F = mv'$ (1)

حيث F هي محصلة القوى المؤثرة في الجسم و v هي سرعة الجسم، كلاهما في اللحظة t.

توجد قوتـان تؤثران في الجسم هما قوة الجاذبية المعطاة بثقل الجسم $W = m.g$ وقوة مقاومة الهواء التي تعطى بالعلاقة $R = -K \cdot v$ حيث $K \geq 0$ هو ثابت التناسب. والإشارة السالبة تعبر عن تعاكس اتجاه القوة مع اتجاه السرعة حيث تؤثر هذه القوة R إلى الأعلى في الاتجاه السالب، وبالتالي تكون محصلة القوى هي : $F = m \cdot g - K \cdot v$

بتعويض هذه النتيجة في (1) نحصل على : $mv' = m.g - Kv$، ومنه معادلة الحركة للجسم :

$$(2) \quad v' + \frac{k}{m}v = g$$

و هذه المعادلة من الشكل: $y' + ay = k$، وحلها العام كما هو معلوم: $v = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$

لتعيين الثابت C، نعوض الشروط المعطاة في المسألة: $v = 0$ عندما $t = 0$ فيكون: $0 = C + \frac{mg}{k}$

أي أنّ $C = -\frac{mg}{k}$. فعبارة السرعة تكتب بالشكل: $v = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$

مسألة 3 تنمو خميرة في مستنبتة بمعدل يتناسب مع الكمية الموجودة، فإذا كانت الكمية تتضاعف كلّ ساعة، فأوجد الزمن اللازم كي تصبح كمية الخميرة ثلاثة أضعاف الكمية التي كانت في البداية.

الحل:

لتكن $y(t)$ كمية الخميرة الموجودة في اللحظة t (مقدرة بالساعات)، فيكون $y'(t)=k\cdot y(t)$ حيث k هو ثابت التناسب. أي $y'(t)-k\cdot y(t)=0$ وهي معادلة تفاضلية خطية حلها: $y(t)=Ce^{kt}$. نعين قيمة C من المسألة: عندما $t=0$ فإنّ $y_0=Ce^{k(0)}=C$ فيكون: $y(t)=y_0e^{kt}$.

الآن من شروط المسألة، عندما $t=1$ فإنّ $y=2y_0$، ومنه $y(1)=2y_0=y_0e^{k(1)}$, فتكون $e^k=2$ وثابت التناسب $k=\ln 2$. إذن تُعطى كميةُ الخميرة الموجودة في كلّ لحظة t بالعلاقة

$$y(t)=y_0e^{(\ln 2)t}=y_0 2^t.$$

يصبح $y(t)=3y_0$ في اللحظة t التي تحقق $3y_0=y_0e^{(\ln 2)t}$ ومنه $t=\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$ ساعة. أي حوالي ساعة واحدة وخمس وثلاثين دقيقة.

تمارين

1 لدينا المعادلة التفاضلية: $y'-3y=6$

1) أوجد في $\mathbb{R}$ الحل العام للمعادلة السابقة.

2) أوجد حلها الخاص $y=\varphi(x)$ الذي يأخذ قيمة 4 عند $x=2$.

3) ادرس تغيرات الدالة φ: $y=\varphi(x)$ وارسم خطها البياني C.

4) احسب مساحة السطح المحصور بين C المحور $x'x$ والمستقيم $x=\ln 2$.

5) احسب حجم المجسم المتولد عن دوران السطح السابق حول $x'x$ دورة كاملة.

2 لدينا المعادلة التفاضلية: $y'=f'(x)=4x^3-9+2\sin x+7e^x$ أوجد حلّها العام ثم عيّن حلها الخاص الذي يحقق $f(0)=\dfrac{15}{4}$.

3 لتكن المعادلة التفاضلية: $f''(x)=15\sqrt{x}+5x^3+6$ أوجد حلّها العام ثم عيّن حلها الخاص الذي يحقق $f(4)=404$, $f(1)=\dfrac{5}{4}$.

3 الدوالّ العددية ورسم خطوطها البيانية

- المستقيمات المقاربة
- الدوال الكسرية
- التمثيل البياني لنماذج من دوال مركبة
- تمرينات عامة

المستقيمات المقاربة

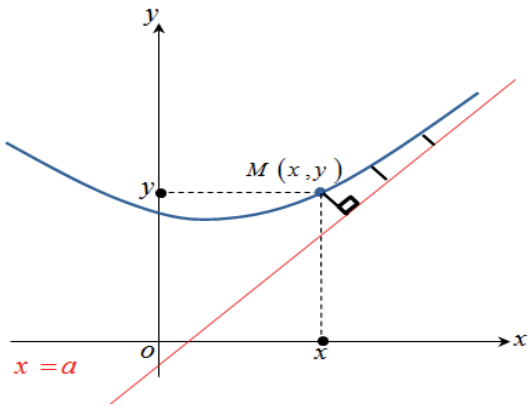
1.3

سوف تتعلّم

1-1-3 المستقيم المقارب الموازي لأحد المحورين الإحداثيين.

2-1-3 المستقيم المقارب المائل.

3-1-3 الوضع النسبي للخط البياني لدالة مع مستقيم مقارب لها.

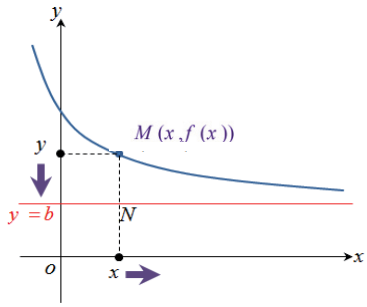


1.1.3 المستقيم المقارب الموازي لأحد المحورين الإحداثيين.

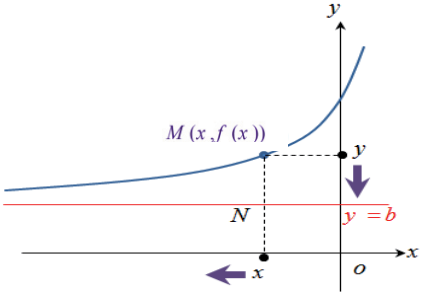
1) **المستقيم المقارب الموازي للمحور $x'x$:**

تعريف: ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على $D \subseteq \mathbb{R}$ حيث D يحوي مجالاً من الشكل $]a,+\infty[$ أو من الشكل $]-\infty,a[$ ، وليكن Δ مستقيماً موازياً للمحور $x'x$ معادلته $y=b$. إذا كانت نهاية $(f(x)-b)$ تساوي الصفر، عندما تسعى x إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$ ، قلنا إنّ $\Delta : y=b$ مستقيم مقارب للخط C موازٍ لـ $x'x$.

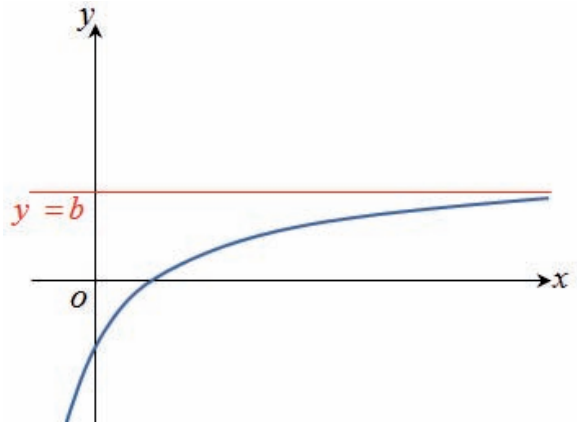
هندسياً: نلاحظ في الأشكال الآتية أن $MN \to 0$ عندما $x \to +\infty$ (أو $x \to -\infty$).



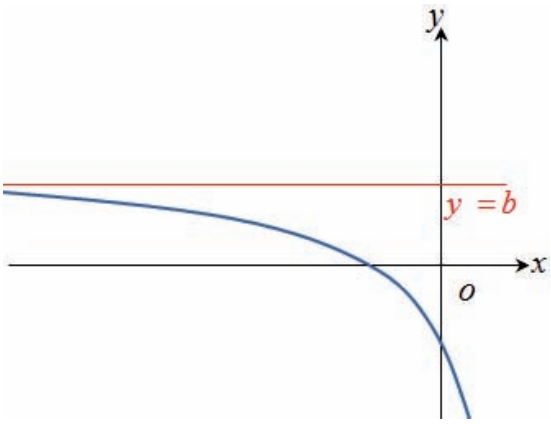
$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x)-b]=0$ و هي تكافئ : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=b$



$\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x)-b]=0$ و هي تكافئ : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)=b$



$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - b] = 0$ و هي تكافئ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$

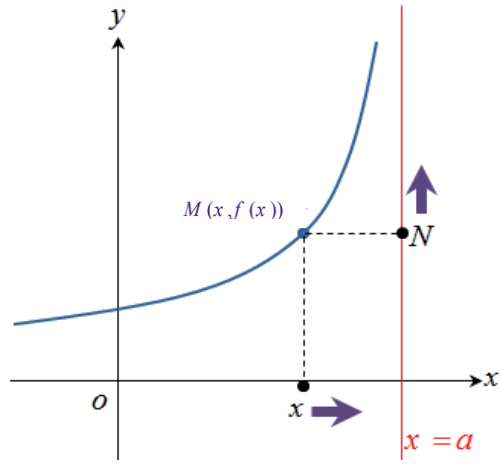


$\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - b] = 0$ و هي تكافئ : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$

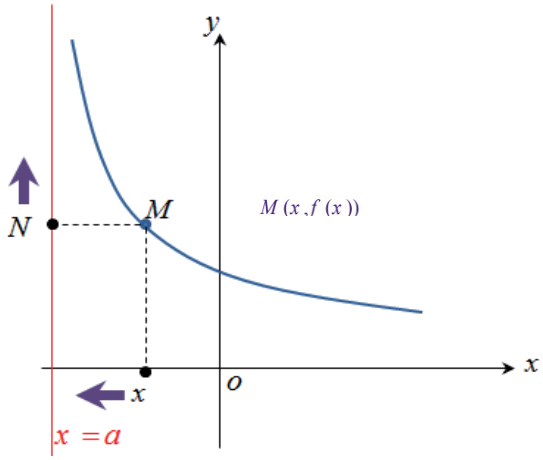
2) المستقيم المقارب الموازي للمحور $y'y$:

تعريف: ليكن Δ مستقيماً موازياً للمحور $y'y$ معادلته $x = a$ وليكن C الخط البياني للدالة f, إذا كانت نهاية الدالة f تساوي $+\infty$ أو $-\infty$ عندما تسعى x إلى a من اليمين أو من اليسار . نقول عندئذٍ إن $x = a$ مستقيم مقارب للخط C موازي لـ $y'y$.

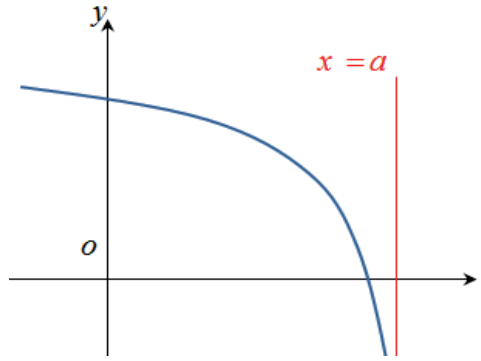
هندسياً: نلاحظ في الأشكال الآتية أن $MN \to 0$ عندما $x \xrightarrow{>} a$ (أو $x \xrightarrow{<} a$).



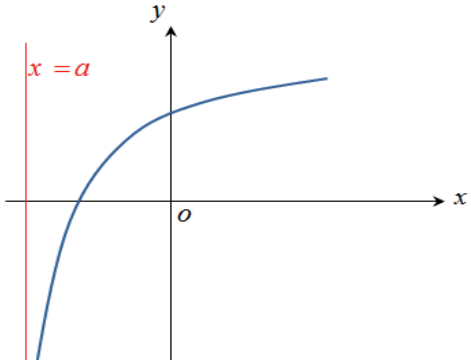
$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} a} f(x) = +\infty$ والخط البياني على يسار المقارب



$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} a} f(x) = +\infty$ والخط البياني على يمين المقارب



$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} a} f(x) = -\infty$ والخط البياني يقع على يسار المقارب



$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} a} f(x) = -\infty$ والخط البياني يقع على يمين المقارب

مثال (1)

ليكن C الخط البياني للدالة f : $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$.

1. أوجد مجموعة تعريف f ومجالاتِ استمرارها، ثم أوجد المقارب الموازي للمحور $x'x$ والمقارب الموازي للمحور $y'y$ للخط C.
2. ادرس الوضع النسبي للخط C مع كلٍّ من مقاربيه.

الحل:

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\} =]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[$

الدالة f مستمرة على كلّ من المجالين $]-\infty, 3[,]3, +\infty[$ ولنبحث عن النهايات عند أطراف مجالات الاستمرار

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ فالمستقيم الذي معادلته $y = 2$ مستقيم مقارب للخط C عندما تكون x في جوار $+\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$ فالمستقيم الذي معادلته $y = 2$ مستقيم مقارب للخط C عندما تكون x في جوار $-\infty$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 3} f(x) = -\infty$ ، نستنتج أنّ المستقيم الذي معادلته $x = 3$ مستقيم مقارب للخط C الذي يقع إلى يسار المقارب عندما تسعى x إلى 3 من اليسار.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 3} f(x) = +\infty$ نستنتج أنّ المستقيم الذي معادلته $x = 3$ مستقيم مقارب للخط C الذي يقع إلى يمين المقارب عندما تسعى x إلى 3 من اليمين.

تذكر: لتعين الوضع النسبي للخط البياني C للدالة f بالنسبة إلى مقاربه Δ الموازي للمحور $x'x$ ندرس إشارة الفرق $f(x) - y_\Delta$ ونميز حالتين :

1) $f(x) - y_\Delta < 0$ فإنّ c تقع تحت Δ 2) $f(x) - y_\Delta > 0$ فإنّ c تقع فوق Δ

.2

$$f(x)-y_{\Delta}=\frac{2x+1}{x-3}-2=\frac{7}{x-3}$$

في المجال: $]-\infty,3[$: $f(x)-y_{\Delta}<0$ الخط C يقع تحت Δ .

في المجال: $]3,+\infty[$: $f(x)-y_{\Delta}>0$ الخط C يقع فوق Δ .

مثال (2)

ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على D وفق $f(x)=\frac{2x^3-2}{x^3+x^2-2x}$ أوجد المقارب الموازي للمحور $x'x$ والمقاربات الموازية للمحور $y'y$ للخط C

الحل:

$$D_f=]-\infty,-2[\cup]-2,0[\cup]0,1[\cup]1,+\infty[$$

f مستمر على المجالات $]-\infty,-2[,]-2,0[,]0,1[,]1,+\infty[$

- $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$ فالمستقيم الذي معادلته $y=2$ مستقيم مقارب للخط C عندما تكون x في جوار $+\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x)=2$ فالمستقيم الذي معادلته $y=2$ مستقيم مقارب للخط C عندما تكون x في جوار $-\infty$

وعلى D لدينا

$$f(x)=\frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x(x+2)(x-1)}=\frac{2(x^2+x+1)}{x(x+2)}$$

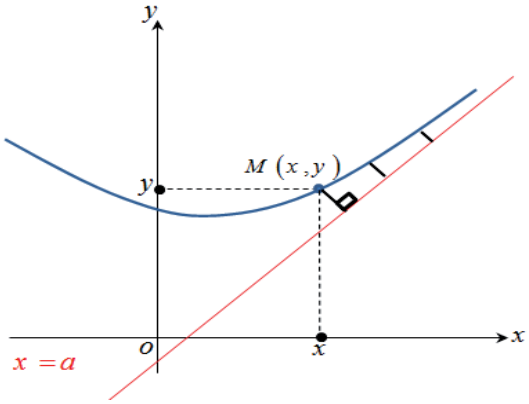
- إذن $\lim_{x\to1} f(x)=2$. وهذا يعني أنّ النقطة $(1,2)$ نقطة مُقاربة للخطّ C. والمستقيم الذي معادلته $x=1$ ليس مستقيماً مُقارباً للخط C.
- $\lim_{x\overset{<}{\to}0} f(x)=-\infty$ نستنتج أنّ المستقيم الذي معادلته $x=0$ مستقيم مقارب للخط C الذي يقع إلى يسار المقارب عندما تسعى x إلى 0 من اليسار.
- $\lim_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=+\infty$ نستنتج أنّ المستقيم الذي معادلته $x=0$ مستقيم مقارب للخط C الذي يقع إلى يمين المقارب عندما تسعى x إلى 0 من اليمين.
- $\lim_{x\overset{<}{\to}-2} f(x)=+\infty$ إذن المستقيم الذي معادلته $x=-2$ مستقيم مقارب للخط C الذي يقع إلى يسار المقارب عندما تسعى x إلى -2 من اليسار.
- $\lim_{x\overset{>}{\to}-2} f(x)=-\infty$ إذن المستقيم الذي معادلته $x=-2$ مستقيم مقارب للخط C الذي يقع إلى يمين المقارب عندما تسعى x إلى -2 من اليمين.

تـدريـب

ليكن C الخطّ البياني للدالة f حيث $f(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+x}}$ عيّن المستقيمات المقاربة للخط C الموازية للمحور $x'x$ وللمحور $y'y$ في حال وجودها.

2.1.3 المستقيم المقارب المائل.

تعريف: ليكن C الخط البياني للدالة f المعرّفة على $D\subseteq\mathbb{R}$ حيث D يحوي مجالاً من النمط $]a,+\infty[$ أو $]-\infty,a[$، وليكن Δ مستقيماً معادلته $\Delta: y=g(x)=mx+p\ :\ (m\in\mathbb{R}^*, p\in\mathbb{R})$ إذا كان للفرق $f(x)-g(x)$ نهاية تساوي للصفر، عندما تسعى x إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$ قلنا إن المستقيم Δ مقارب للخط C.



مثال (1)

ليكن C الخطّ البياني للدالة f حيث $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x+2}$.

برهن أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=x-4$ مستقيم مقارب للخط C عند كل من $+\infty$ و $-\infty$. ثُمّ ادرس الوضع النسبي للخط C بالنسبة إلى المستقيم Δ.

الحل: يمكن أن نكتب f بالشكل: $f(x)=(x-4)+\dfrac{5}{x+2}$ (تحقّق من ذلك)

إذن $f(x)-y_\Delta=\dfrac{5}{x+2}$ و منه :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-y_\Delta\right)=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-y_\Delta\right)=0$$

مما سبق نستنتج المستقيم Δ الذي معادلته $y=x-4$ مستقيم مقارب للخط C.

لدراسة الوضع النسبي : ندرس إشارة الفرق : $f(x)-y_\Delta=\dfrac{5}{x+2}$

في المجال : $]-\infty,-2[$ يكون $f(x)-y_\Delta<0$ والخط C يقع تحت Δ.

في المجال : $]-2,+\infty[$ يكون $f(x)-y_\Delta>0$ والخط C يقع فوق Δ.

ويمكن، (ولكن ليس ضرورياً ما لم يُطلب ذلك،) أن نلخص هذه النتيجة في جدول :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)-y_{\Delta}$	$-$		$+$
الوضع النسبي	C تحت Δ		C فوق Δ

مثال (2)

ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=-x+\sqrt{x^2+8}$.

1) أوجد نهاية الدالة f عند $-\infty$ وكذلك عند $+\infty$ واستنتج كلّ مقارب للخط C يوازي المحور $x'x$.

2) تحقق من أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=-2x$ مستقيم مقارب للخط C عند $-\infty$

الحل: f مستمر على $]-\infty,+\infty[$.

1) في جوار $-\infty$ لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

أمّا في جوار $+\infty$ فنحن أمام حالة عدم تعيين من النمط $+\infty-\infty$ ، لإزالة عدم التعيين نكتب :

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{x^2+8}-x\right)\left(\sqrt{x^2+8}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+8}+x\right)}=\frac{8}{\sqrt{x^2+8}+x}$$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

إذن محور الفواصل $x'x$ الذي معادلته $y=0$ مستقيم مقارب للخط C عندما تكون x في جوار $+\infty$.

نلاحظ أنّ

$$f(x)-y_{\Delta}=-x+\sqrt{x^2+8}-(-2x)=x+\sqrt{x^2+8}$$

ومنه

$$f(x)-y_{\Delta}=\frac{\left(\sqrt{x^2+8}+x\right)\left(\sqrt{x^2+8}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2+8}-x\right)}=\frac{8}{\sqrt{x^2+8}-x}$$

إذن

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-y_{\Delta}\right)=0$$

فالمستقيم Δ الذي معادلته $y=-2x$ مستقيم مقارب للخط C عند $-\infty$.

تـدريـب

ليكن C الخط البياني للدالة f : $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$

1) أثبت أن $f(x)$ تُكتب بالشكل $f(x)=x-1+\dfrac{1}{x-1}$

2) أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x-1$ مقارب مائل للخط C ثم أوجد المقارب الموازي للمحور $y'y$. وادرس الوضع النسبي للخط C بالنسبة إلى كل مقارب وجدته

تمارين

1 ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ وفق: $f(x)=x+\dfrac{2}{\sqrt{x}}-4$

أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x-4$ مستقيم مقارب للخط C. ثم ادرس الوضع النسبي للخط C بالنسبة إلى المقارب Δ.

2 ليكن C_1 الخط البياني للدالة f_1 المعرفة على $\mathbb{R}/\{-1\}$ وفق $f_1(x)=2x-1+\dfrac{2}{x+1}$

ليكن C_2 الخط البياني للدالة f_2 المعرفة على $\mathbb{R}/\{1\}$ وفق $f_2(x)=2x-1+\dfrac{2}{x-1}$

أثبت أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x-1$ مقارب لكلّ من الخطين C_1,C_2 عند كلّ من $+\infty$ و $-\infty$. ثمّ ادرس الوضع النسبيّ للخط C_1 بالنسبة إلى المقارب Δ.

3 ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

- أثبت أنّ المستقيم Δ_1 الذي معادلته $y=x+1$ مستقيم مقارب للخط C عند $+\infty$.
- هل المستقيم Δ_2 الذي معادلته $y=x$ مستقيم مقارب للخط C عند $-\infty$ ؟ علل ؟
- استنتج معادلة المقارب المائل في جوار $-\infty$.

4 ليكن C الخط البياني للدالة f : $f(x)=x+\frac{\sqrt{x}}{x-1}$ والمطلوب :

1) أوجد كل مقارب للخط C يوازي المحور $x'x$ أو المحور $y'y$ ثم ادرس وضع C بالنسبة إلى كل مقارب وجدته.

2) أثبت أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=x$ مستقيم مقارب للخط C ثم ادرس وضع C بالنسبة إلى Δ.

5 ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ وفق: $f(x)=x+1-\frac{\ln x}{x}$

1) أثبت أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=x+1$ مقارب للخط C وادرس وضع الخط C بالنسبة إلى Δ.

2) أوجد دالةً أصليةً F للدالة f يُحقّق $F(1)=2$.

3) أوجد مساحة السطح المحصور بين C والمقارب Δ والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$.

الدوال الكسرية

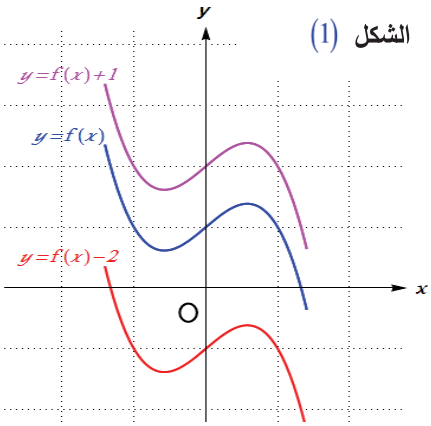
2.3

سندرس في هذه الوحدة تطبيقاتٍ للمواضيع التي تعلمناها سابقاً ونستفيد منها في التمثيل البياني لدوال كسرية ولدوال أخرى كلٌّ منها ناتج عن تركيب دالتين أو أكثر.

يجري ذلك اعتماداً على دراسة تغيرات دالة عددية، وعلى مفاهيمَ أخرى يمكن أن ترد في نص المسألة وتساعد على رسم الخطوط البيانية لهذه الدوال منها (على سبيل المثال لا الحصر) تحديد المستقيمات المقاربة (إن وجدت)، ودراسة التقاطع مع المحاور الإحداثية) والخواص التناظريــة (مثل كونها فردية أو زوجية أو غير ذلك).

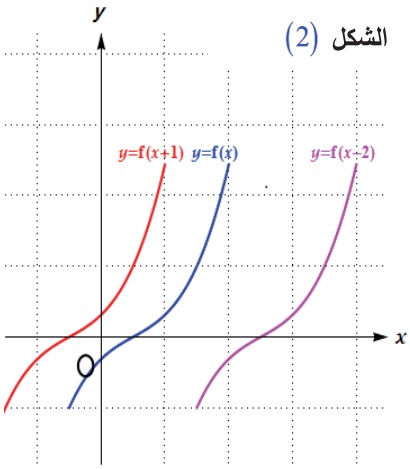
كما يمكن أن نستنتج مباشرة الخط البياني لدالة من الخط البياني لدالة أخرى جرى رسمها، وذلك اعتماداً على تحويلات نقطية معروفة أو مفاهيم رياضية مألوفة منها ما يأتي:

1) نستنتج الخط البياني للدالة f_1 $f_1(x)=f(x)+b$ من الخط البياني للدالة f وذلك بإجــراء انسحــاب متجهه $\vec{v}(0,b)$ كما في الشكل (1) المجاور.



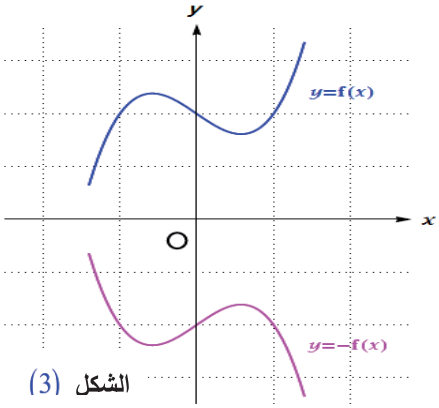
الشكل (1)

2) نستنتج الخط البياني للدالة f_2: $f_2(x)=f(x+a)$ من الخط البياني للدالة f بإجــراء انســحاب متجهه $\vec{u}(-a,0)$ كما في الشكل (2).



الشكل (2)

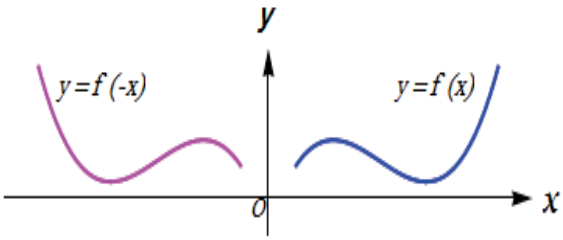
3) نستنتج الخط البيـاني للدالــة f_3 : $f_3(x)=-f(x)$ من الخط البياني للدالة f بأخذ نظيره بالنسبة إلى محور الفواصل كما في الشكل (3).



الشكل (3)

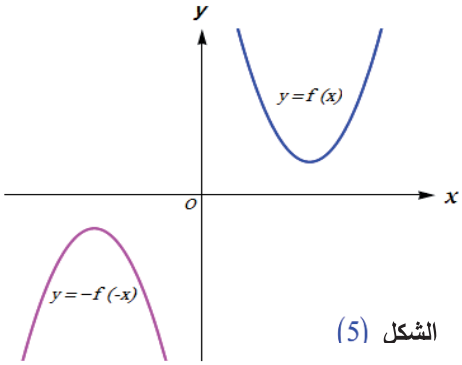
4) نستنتج الخط البياني للدالة f_4 :

$f_4(x)=f(-x)$ من الخط البياني للدالة f بأخذ نظيره بالنسبة إلى محور التراتيب كما في الشكل (4)



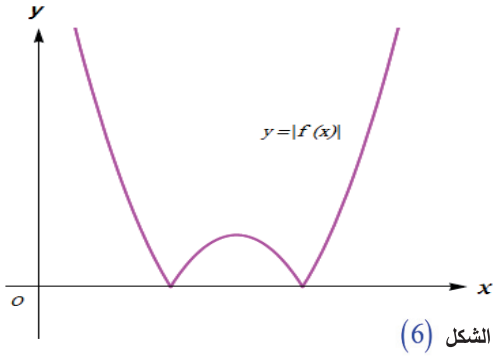
الشكل (4)

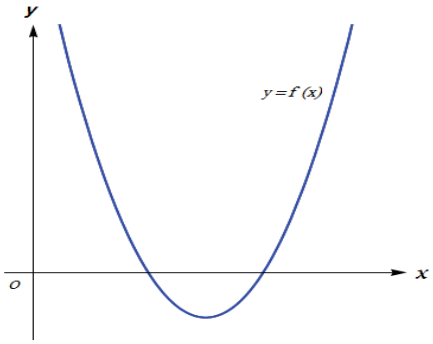
5) نستنتج الخط البياني للدالة f_5 : $f_5(x)=-f(-x)$ من الخط البيـــاني للدالـــة f بأخذ نظيره بالنسبة إلى مبدأ الإحداثيات $O(0,0)$ كما في الشكل (5)



الشكل (5)

6) نستنتج الخط البياني للدالة f_6 : $f_6(x)=|f(x)|$ من الخط البيـــاني للدالـــة f وذلك بـــأن تبقى النقاط ذات التراتيب الموجبة كما هي، والنقاط ذات التراتيب السالبة نأخذ بدلاً عنها نظائرها بالنسبة إلى محور الفواصل كما في الشكل (6)





الشكل (6)

المسألة الأولى ليكن C الخطّ البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ وفق $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$

والمطلوب:

1. أثبت أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=x$ مقارب للخط C عند $-\infty$ وكذلك عند $+\infty$. وادرس وضع الخط C بالنسبة إلى هذا المقارب.
2. عين المقارب الموازي لـ yy' للخط C في حال وجوده. وادرس وضع الخط C بالنسبة إليه.
3. أثبت أنّ الدالة f فردية واستنتج الصفة التناظرية للخط C.
4. ادرس تغيرات الدالة f ونظم جدولاً بها.
5. ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C.
6. احسب مساحة السطح المحصور بين الخط C والمحور $x'x$ والمستقيم الذي معادلته $x=2$.

الحل:

f مستمر على كلّ من المجالين $]-\infty,0[$ ، $]0,+\infty[$

نلاحظ أنّ $f(x)$ يكتب بالشكل $f(x)=\frac{x^2}{x}-\frac{1}{x}=x-\frac{1}{x}$، إذن $f(x)-y_\Delta=-\frac{1}{x}$.

① $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$ فالمستقيم Δ الذي معادلته $y=x$ مقارب للخط C عند $+\infty$، وكذلك

② $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$ فالمستقيم Δ الذي معادلته $y=x$ مقارب للخط C عند $-\infty$.

لدراسة الوضع النسبي للخط C بالنسبة إلى هذا المقارب ندرس إشارة $f(x)-y_\Delta=-\frac{1}{x}$، فنلاحظ أنّ:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-\frac{1}{x}$	$+$	‖	$-$
الوضع النسبي	C فوق المقارب Δ	‖	C تحت المقارب Δ

أو يمكن أن نكتب:

① في المجال $]-\infty,0[$ نجد $f(x)-y>0$ والخط C يقع فوق المقارب Δ.

② في المجال $]0,+\infty[$ نجد $f(x)-y<0$ والخط C يقع تحت المقارب Δ.

2) f مستمر على كل من المجالين $]0,+\infty[$ و $]-\infty,0[$ ، لذلك نبحث عن المقاربات الموازية للمحور yy' عند 0.

- لما كان $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x)=+\infty$ استنتجنا أن المستقيم الذي معادلته $x=0$ مستقيم مقارب للخط C الذي يقع إلى يسار المقارب عندما تسعى x إلى 0 من اليسار.
- لما كان $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)=+\infty$ استنتجنا أن المستقيم الذي معادلته $x=0$ مستقيم مقارب للخط C الذي يقع إلى يمين المقارب عندما تسعى x إلى 0 من اليمين.

3) لإثبات أنّ الدالة f فردية نلاحظ أولاً أن الشرط ($x \in \mathbb{R}^*$ يقتضي $-x \in \mathbb{R}^*$) محقق وضوحاً.

لنبرهن أنه أياً كانت $x \in \mathbb{R}^*$ كان $f(-x)=-f(x)$ ، في الحقيقة لدينا

$$f(-x)=\frac{(-x)^2-1}{-x}=-\left(\frac{x^2-1}{x}\right)=-f(x)$$

من تحقق الشرطين نستنتج أن f دالة فردية. وبالتالي نستنتج أن الخط C متناظر بالنسبة إلى مبدأ الإحداثيات $(0,0)$.

4) f معرفة على $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ وهي مستمرة واشتقاقية على كلّ من المجالين $]0,+\infty[$ و $]-\infty,0[$.
ولدينا :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

لدراسة اطراد f نحسب المشتق لتعيين إشارته فنجد :

$$f'(x)=\frac{x^2+1}{x^2}=1+\frac{1}{x^2}$$

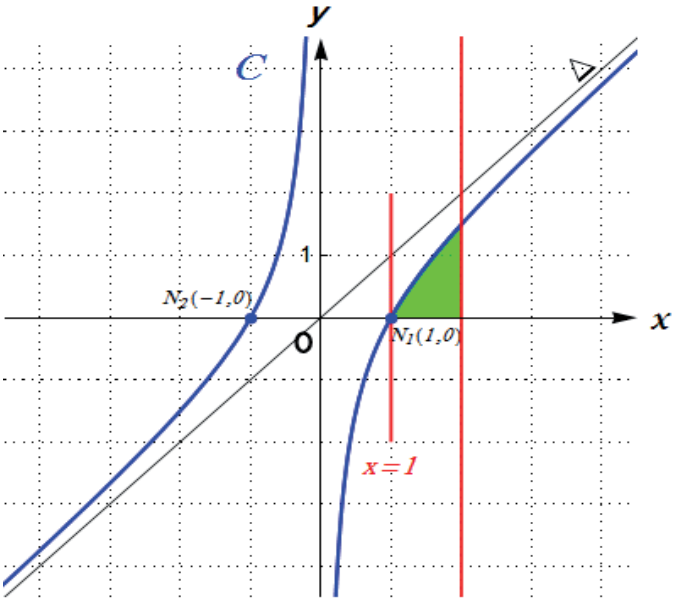
نلاحظ أن $f'(x)>0$ وذلك أياً كانت $x \in \mathbb{R}^*$، إذن

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

5) الرسم: نقاط مساعدة لرسم التقاطع مع xx' يوافق $f(x)=0$ ومنه نجد $x=1$ و $x=-1$

ونقطتا التقاطع مع $x'x$ هما

$N_1(1,0)$, $N_2(-1,0)$.



6) لتكن S مساحة السطح المطلوب. نلاحظ من الرسم أنّه يقع فوق محور الفواصل إذن.

$$S=\int_1^2 f(x)\,dx=\int_1^2\left(x-\frac{1}{x}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}-\ln(x)\right]_1^2$$
$$=\left[\frac{4}{2}-\ln(2)\right]-\left[\frac{1}{2}+0\right]$$

ومنه $S=\frac{3}{2}-\ln(2)$.

المسألة الثانية

ليكن C الخطّ البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ وفق $f(x)=\frac{3x+3}{2x+4}$.

1. ادرس تغيرات الدالة f ونظم جدولاً بها، واستنتج ما للخط C من مقاربات موازية للمحور xx' أو yy' ثم ادرس وضع C بالنسبة إلى كل مقارب وجدته.
2. استنتج من جدول التغيرات أن للمعادلة $f(x)=\lambda$ حلاً وحيداً أياً كانت $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$.
3. ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C، واستنتج رسم الخط البياني C_1 للدالة f_1 :
$$f_1(x)=\frac{-3x-3}{2x+4}$$
4. احسب مساحة السطح المحصور بين C والمحورين الإحداثيين.

الحل:

1. f مستمرة على كل من المجالين $]-2,+\infty[$ و $]-\infty,-2[$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\frac{3}{2}$ فالمستقيم الذي معادلته $y=\frac{3}{2}$ مستقيم مقارب للخط C عندما تكون x في جوار $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{3}{2}$ فالمستقيم الذي معادلته $y=\frac{3}{2}$ مستقيم مقارب للخط C عندما تكون x في جوار $+\infty$.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -2} f(x) = +\infty$ نستنتج أن المستقيم الذي معادلته $x = -2$ مستقيم مقارب للخط C الذي يقع إلى يسار المقارب عندما تسعى x إلى -2 من اليسار.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -2} f(x) = -\infty$ إذن المستقيم الذي معادلته $x = -2$ مستقيم مقارب للخط C الذي يقع إلى يمين المقارب عندما تسعى x إلى -2 من اليمين.

لدراسة اطّراد f نلاحظ أنّ f اشتقاقية على كل من المجالين $]-2,+\infty[$ و $]-\infty,-2[$ وأنّ

$$f'(x) = \frac{3(2x+4) - 2(3x+3)}{(2x+4)^2} = \frac{6}{(2x+4)^2} > 0$$

فالدالة متزايدة تماماً على كل من المجالين $]-2,+\infty[$ و $]-\infty,-2[$، ومنه الجدول الآتي:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$

من جدول التغيرات نجد أن :

- $f(x) > \frac{3}{2}$ على $]-\infty,-2[$ إذن C يقع فوق Δ على هذا المجال.
- $f(x) < \frac{3}{2}$ على $]-2,+\infty[$ إذن C يقع تحت Δ على هذا المجال.

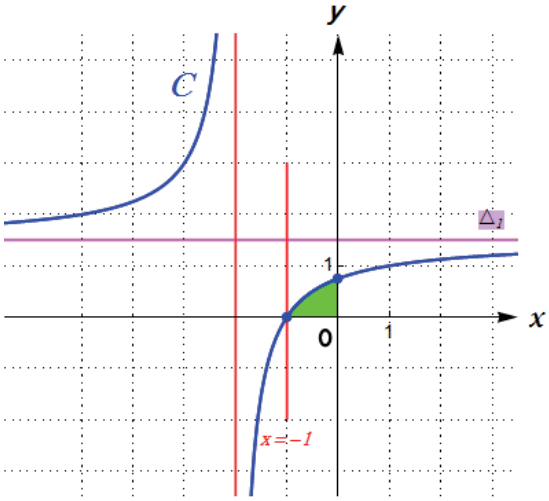
2. نلاحظ من جدول التغيرات أنّ الدالة f تعرّف تقابلاً من $]-\infty,-2[$ إلى $\left]\frac{3}{2},+\infty\right[$، وكذلك تعرّف تقابلاً آخرَ من $]-2,+\infty[$ إلى $\left]-\infty,\frac{3}{2}\right[$.

فإذا كانت $\lambda > \frac{3}{2}$، كان للمعادلة $f(x) = \lambda$ حلّ وحيد وهو ينتمي إلى $]-\infty,-2[$.

وإذا كانت $\lambda < \frac{3}{2}$، كان للمعادلة $f(x) = \lambda$ حلّ وحيد وهو ينتمي إلى $]-2,+\infty[$.

أمّا في حالة $\lambda = \frac{3}{2}$ فليس للمعادلة $f(x) = \lambda$ حلّ في هذه الحالة.

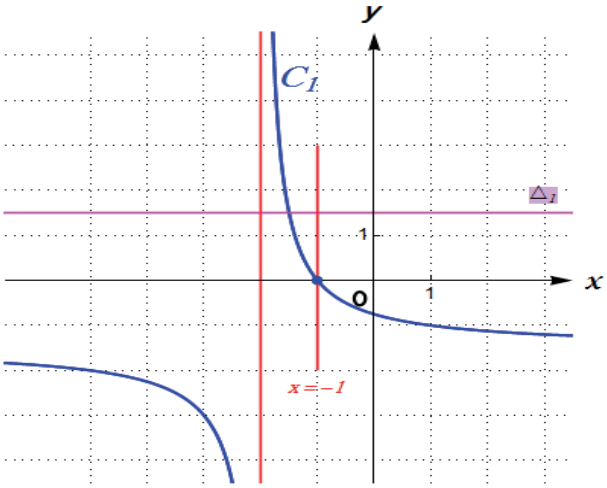
3. الرسم: نقاط مساعدة للرسم



التقاطع مع xx' يوافق $f(x)=0$، ومنه نجد $x=-1$ إذاً نقطة التقاطع مع xx' هي $N_1(-1,0)$.

التقاطع مع yy' يوافق $x=0$ ومنه $f(0)=\frac{3}{4}$.

و نلاحظ أن C_1 ينتج عن C باستبدال $-y$ بـ y أي $f_1(x)=-f(x)$ إذن C_1 نظير C بالنسبة إلى المحور $x'x$.



ملاحظة: تُسمّى الدالة f: $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ حيث $c\neq 0$ و $ad-bc\neq 0$ دالة كسرية تناظرية وخطها البياني C متناظر بالنسبة إلى نقطة تقاطع مقاربيه.

4. حساب مساحة السطح المحصور بين C والمحوريين الإحداثيين. نلاحظ أنّ هذا السطح يقع فوق محور الفواصل، كما نلاحظ أنّه يمكن أن نكتب f بصيغة مُناسبة أكثر لإجراء التكامل كما يأتي:

$$f(x)=\frac{3x+3}{2x+4}=\frac{3}{2}\cdot\frac{x+1}{x+2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{x+2-1}{x+2}=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{x+2}\right)$$

$$S=\int_{-1}^{0}f(x)\,dx=\frac{3}{2}\int_{-1}^{0}\left(1-\frac{1}{x+2}\right)dx$$

$$=\frac{3}{2}\Big[x-\ln(x+2)\Big]_{-1}^{0}$$

$$=\frac{3}{2}\left(-\ln(2)-(-1)\right)=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\ln(2)$$

المسألة الثالثة

ليكن C الخطّ البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق $f(x)=\dfrac{2x}{(x-1)^2}$ والمطلوب :

1. ادرس تغيرات الدالة f ونظّم جدولاً بها، واستنتج ما للخط C من مقاربات موازية للمحور xx' أو yy' ثم ادرس وضع C بالنسبة لكل مقارب وجدته، وعيّنِ القيمة الصغرى محلياً في حال وجودها.
2. اكتب معادلة المماس d للخط C في نقطةٍ فاصلتُها $x=0$، ابحث عن النقط المشتركة بين الخط C وهذا المماس.
3. ارسم كل مقارب وجدته وارسم d ثم ارسم C، واستنتج رسم الخط البياني C_1 للدالة f_1 المعرفة على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ وفق $f_1(x)=\dfrac{-2x}{(x+1)^2}$.
4. استنتج من الرسم البياني للدالة f عدد حلول المعادلة $f(x)=\lambda$ في حالة $\lambda\in\mathbb{R}$. أوجد هذه الحلول في حالة $\lambda=4$.
5. احسب مساحة السطح المحصور بين C والمحور xx' والمستقيم $x=-1$.
6. استنتج بيانياً حلول المتراجحة $x\le 2(x-1)^2$.

الحل:

1. f معرفة على $]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$ ، f مستمرة واشتقاقية على كل من المجالين $]1,+\infty[$ و $]-\infty,1[$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ فالمستقيم الذي معادلته $y=0$ مستقيم مقارب للخط C عندما تكون x في جوار $-\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ فالمستقيم الذي معادلته $y=0$ مستقيم مقارب للخط C عندما تكون x في جوار $+\infty$.
- $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=+\infty$ نستنتج أن المستقيم الذي معادلته $x=1$ مستقيم مقارب للخط C الذي يقع إلى يسار المقارب عندما تسعى x إلى 1 من اليسار.
- $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=+\infty$ إذن المستقيم الذي معادلته $x=1$ مستقيم مقارب للخط C الذي يقع إلى يمين المقارب عندما تسعى x إلى 1 من اليمين.

لدراسة اطّراد f نلاحظ أنّ f اشتقاقية على كلٍّ من المجالين $]1,+\infty[$ و $]-\infty,1[$ ، وأنّ

$$f'(x)=\frac{2(x-1)^2-2(x-1)(2x)}{(x-1)^4}=\frac{2(x-1)(x-1-2x)}{(x-1)^4}=\frac{2(x-1)(-x-1)}{(x-1)^4}$$

إذن إشارة $f'(x)$ هي من إشارة $-(x-1)(x+1)$، (لاحظ أننا لم نختصر على المقدار $(x-1)$ في عبارة المشتق كي نُبقي إشارة المقام موجبة على مجموعة التعريف). وهذا يتيح لنا أن نضع جدول التغيرات الآتي :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	‖	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(-1)=-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

نلاحظ من الجدول أنّ $f(-1)=-\frac{1}{2}$ هي قيمة صغرى محلياً. (بل إنها قيمة صغرى شاملة، لماذا ؟)

وكذلك سجّلنا في الجدول النقطة $(0,f(0)=0)$ لأنها نقطة تقاطع الخط البياني C مع محور الفواصل.

لدراسة وضع C بالنسبة إلى المقارب Δ الذي معادلته $y=0$ ندرس تبعاً لقيم x، إشارة المقدار

$$f(x)-y_{\Delta}=f(x)$$

فنجد من جدول التغيرات، ما يأتي:

- $f(x)<0$ على $]-\infty,0[$ إذن C تحت Δ
- $f(x)>0$ على $]0,1[$ إذن C فوق Δ
- $f(x)>0$ على $]1,+\infty[$ إذن C فوق Δ

2. لإيجاد معادلة المماس في النقطة من C التي فاصلتها $x=0$، نلاحظ أنّ نقطة التماس هي $O(0,0)$، وأنّ ميل المماس في هذه النقطة هو $m=f'(0)=2$. إذن معادلة المماس d هي $y=2x$.

لإيجاد نقطة تقاطع الخط C مع d، نبحث عن الحل المشترك لجملة المعادلتين :

$$\begin{cases} y=\dfrac{2x}{(x-1)^2} \\ y=2x \end{cases}$$

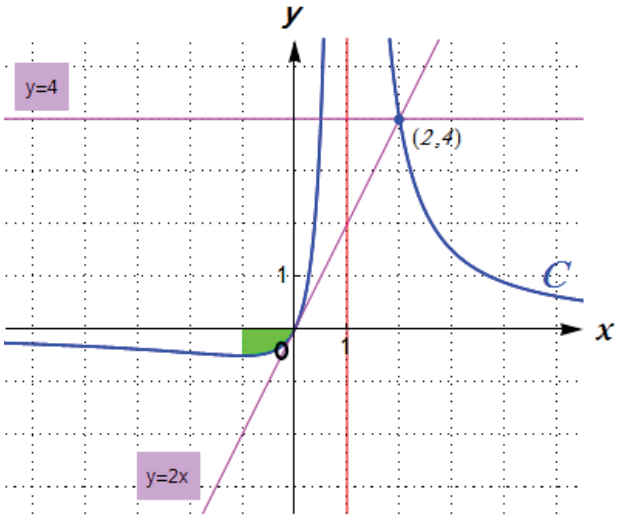
بتعويض قيمة y من الثانية في الأولى و الإصلاح نجد أنّ $x^2(x-2)=0$.

الحل $x=0$ يوافق $y=0$ أي نقطة التماس $(0,0)$ وهذا الحل كان متوقّعاً.

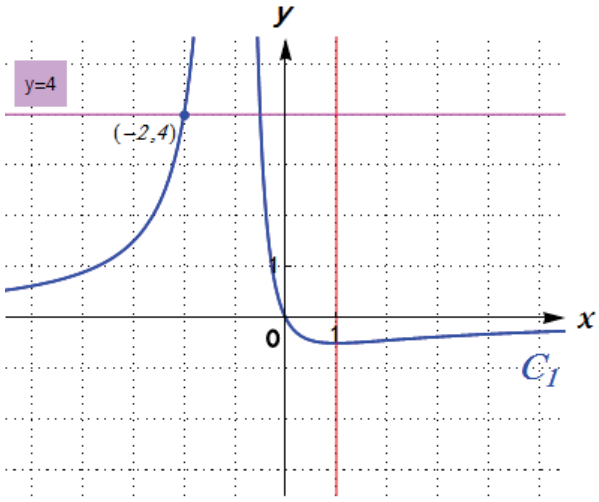
أما الحل $x=2$ فيوافق $y=4$، ويعطي نقطة التقاطع $A(2,4)$. (لاحظ أنّ المماسّ لخط بياني لدالة قد يشترك مع خطها البياني في نقطة أخرى غير نقطة التماس).

3. الرسم :

نجد في الشكل المجاور الخطّ البياني C.



ونلاحظ أن C_1 ينتج عن C باستبدال $-x$ بـ x أي أنّ C_1 هو نظير C بالنسبة إلى $y'y$. وقد رسمناه في الشكل الآتي:



4. إنّ تعيين عدد حلول المعادلة $f(x)=\lambda$ هو دراسة تقاطع الخط البياني C مع المستقيم λ، وهنا نلاحظ من الرسم الحالات الآتية:

① حالة $\lambda<-\frac{1}{2}$. ليس للمعادلة $f(x)=\lambda$ في هذه الحالة حلولٌ.

② حالة $\lambda=-\frac{1}{2}$. للمعادلة $f(x)=\lambda$ حلٌّ وحيد (هو $x=-1$).

③ حالة $-\frac{1}{2}<\lambda<0$. للمعادلة $f(x)=\lambda$ حلان مختلفان وينتميان إلى $]-\infty,0[$.

④ حالة $\lambda=0$. للمعادلة $f(x)=\lambda$ حلٌّ وحيد (هو $x=0$).

⑤ حالة $0<\lambda$. للمعادلة $f(x)=\lambda$ حلان مختلفان أحدهما ينتمي إلى $]0,1[$ والآخر ينتمي إلى $]1,+\infty[$.

في حالة $\lambda=4$، تُكافئ المعادلةُ $f(x)=4$ المعادلةَ $\frac{2x}{(x-1)^2}=4$

أو $2x^2-5x+2=0$، وأخيراً $(2x-1)(x-2)=0$. فإمّا $x=2$ وإمّا $x=\frac{1}{2}$. وهذا يتفق مع المناقشة السابقة.

5. نلاحظ أنّ الخط البياني للدالة f يقع تحت محور الفواصل على المجال $[-1,0]$ إذن

$$S=\int_{-1}^{0}-f(x)dx=\int_{-1}^{0}\frac{-2x}{(x-1)^2}dx$$

لحساب هذا التكامل يمكن أن نتبع عدّة طرائق :

الطريقة الأولى : بالمكاملة بالتجزئة :

$$u(x)=2x,\quad v'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$u'(x)=2,\quad v(x)=\frac{1}{x-1}$$

فنجد

$$S=\int_{-1}^{0}\frac{-2x}{(x-1)^2}dx=\underbrace{\left[\frac{2x}{x-1}\right]_{-1}^{0}}_{-1}-\int_{-1}^{0}\frac{2}{x-1}dx$$

$$=-1+2\int_{-1}^{0}\frac{1}{1-x}dx=-1+2\Big[-\ln(1-x)\Big]_{-1}^{0}=2\ln(2)-1$$

الطريقة الثانية : بتغيير المتحول، فنضع $t=1-x$، ومن ثَمّ $x=1-t$، ونتذكّر أنّ $dt=-dx$، وأنّه عندما $x=-1$ يكون $t=2$، وعندما $x=0$ يكون $t=1$، فنكتب

$$S=\int_{-1}^{0}\frac{-2x}{(x-1)^2}dx=\int_{2}^{1}\frac{2(1-t)}{t^2}dt=2\int_{1}^{2}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$=2\left[\ln(t)+\frac{1}{t}\right]_{1}^{2}=2\left(\ln(2)+\frac{1}{2}-1\right)=2\ln(2)-1$$

6. نلاحظ أنّ المتراجحة المطلوبة $x\le 2(x-1)^2$، تُكافئ $f(x)\le 4$، (لاحظ أننا قسمنا على المقدار الموجب تماماً $(x-1)^2$ ولنا الحق في ذلك لأنّ $x=1$ ليس حلاً لهذه المتراجحة). ولقد عيّنا سابقاً حلول المعادلة $f(x)=4$ فوجدنا أنها $x\in\left\{\frac{1}{2},2\right\}$، ونجد من الرسم البياني أنّ $f(x)\le 4$ إذا وفقط إذا كان $x\in\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup\left[2,+\infty\right[$.

المسألة الرابعة

ليكن C الخطّ البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{x^2+x+1}$ والمطلوب :

1. ادرس تغيرات الدالة f ونظّم جدولاً بها، واستنتج مقارب C الموازي للمحور xx' , ثم ادرس وضع C بالنسبة إلى هذا المقارب، وعين القيم الكبرى أو الصغرى محلياً في حال وجودها.

2. ارسم كلّ مقارب وجدته، ثم ارسم C.

3. استنتج بيانياً، وتبعاً لقيم λ ما للمعادلة الآتية من حلول: $(\lambda-2)x^2+(\lambda+1)x+\lambda+1=0$.

4. برهن أنّ الدالة h المعرّفة بالصيغة $h(x)=f(|x|)$ دالة زوجية، واستنتج رسم الخط C_1 للدالة h من الخط C .

5. نتأمّل نقطة $M(x,y)$ تتحرك على C، أوجد $\dfrac{dy}{dt}$ في اللحظة التي يكون فيها $x=1$ و $\dfrac{dx}{dt}=2\text{cm/s}$

الحل:

1. f اشتقاقية على $]-\infty,+\infty[$، علل ؟

ولما كان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ استنتجنا أنّ المستقيم الذي معادلته $y=2$ مستقيم مقارب للخط C يوازي xx' في جوار كلّ من $-\infty$ و $+\infty$.

لدراسة اطّراد f، نحسب المشتق :

$$f'(x)=\frac{(4x-1)(x^2+x+1)-(2x+1)(2x^2-x-1)}{(x^2+x+1)^2}$$

ونجد بالإصلاح أنّ $f'(x)=\dfrac{3x^2+6x}{(x^2+x+1)^2}$

إذن إشارة f' من إشارة $(x+2)x$. وهذا ما يسمح لنا بوضع الجدول الآتي :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2

نلاحظ أن $f(0)=-1$ هي قيمة صغرى محلياً، بل هي قيمة صغرى شاملة.

وأنّ $f(-2)=3$ هي قيمة كبرى محلياً، بل هي قيمة كبرى شاملة. ويمكن تلخيص ذلك بالقول إنّ $-1\le f(x)\le 3$ أياً كانت قيمة x من $\mathbb{R}$.

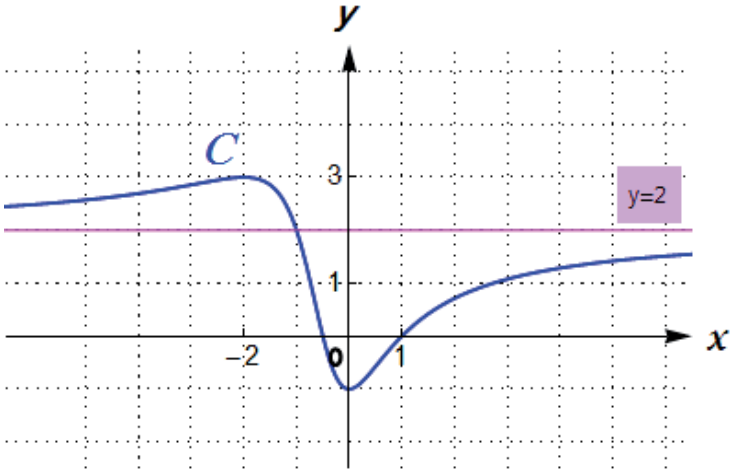
لدراسة وضع الخط C بالنسبة إلى المقارب Δ الذي معادله $y=2$ ندرس إشارة المقدار $f(x)-y_\Delta$

$$f(x)-y_\Delta=\frac{2x^2-x-1}{x^2+x+1}-2=\frac{-3(x+1)}{x^2+x+1}$$

فنلاحظ أنّ إشارة المقدار $f(x)-y_\Delta$ هي من إشارة $-x-1$، وأنّه ينعدم عند $x=-1$. إذن

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)-y_\Delta$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	C فوق المقارب Δ		C تحت المقارب Δ

2. الرسم: لاحظ أنّ نقطتي التقاطع مع $x'x$ هما : $\left(-\frac{1}{2},0\right)$, $(1,0)$ ونقطة التقاطع مع المقارب $y=2$ هي $(-1,2)$.



3. لاحظ أنّ المعادلة المعطاة $(\lambda-2)x^2+(\lambda+1)x+\lambda+1=0$ تُكافئ $\lambda(x^2+x+1)=2x^2-x-1$، ولأنّ المقدار x^2+x+1 لا ينعدم أياً كانت قيمة x من $\mathbb{R}$ استنتجنا أنّ المعادلة المعطاة تُكافئ $f(x)=\lambda$. أي علينا دراسة تقاطع المنحني C مع المستقيم الذي معادلته $y=\lambda$. ومنه المناقشة الآتية :

a. $\lambda\in]-\infty,-1[\cup]3,+\infty[$ ليس للمعادلة $f(x)=\lambda$ حلول.

b. $\lambda\in\{-1,2,3\}$ للمعادلة $f(x)=\lambda$ حلّ وحيد.

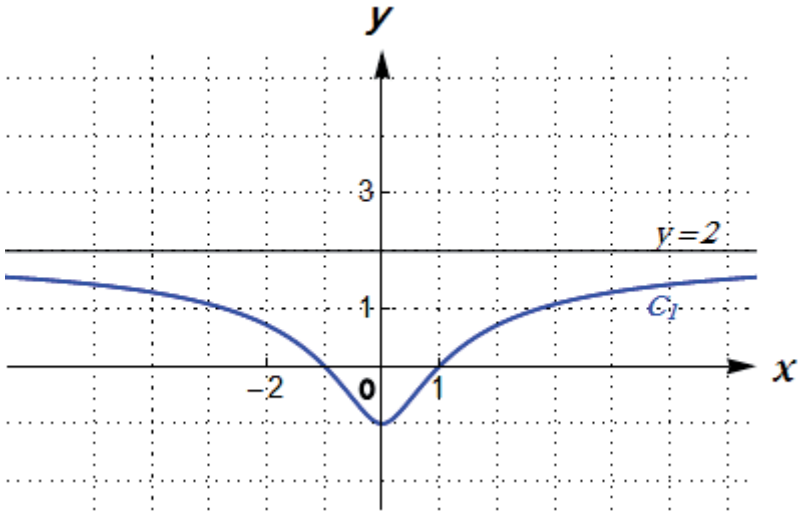
c. $\lambda\in]-1,2[\cup]2,3[$ للمعادلة $f(x)=\lambda$ حلان.

4. من الواضح أنّه $x\in\mathbb{R}$ كان $-x\in\mathbb{R}$، ومن جهة أخرى مهما كانت x من $\mathbb{R}$ فلدينا

$$h(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=h(x)$$

إذن الدالة h دالة زوجية.

لأنّ $h(x)=f(x)$ في حالة $x \geq 0$ استنتجنا أنّ C_1 ينطبق على C على $[0,+\infty[$، ونتمّم C_1 على $]-\infty,0]$ بالتناظر بالنسبة إلى $y'y$ لأنّه الخط البياني للدالة الزوجية h. فنجد الرسم المبيّن في الشكل الآتي:



5. نتأمّل نقطةً $M(x,y)$ تتحرك على C، إذن نفترض هنا أنّ فاصلة النقطة M وترتيبها هما دالتان للزمن t : $x=x(t)$ و $y=y(t)$. ولأنّ M تتحرك على C نستنتج أنّ $(y(t),x(t))$ تقع على C أي $y(t)=f(x(t))$. حيث f هي الدالة التي خطها البياني C. وعليه بالاستفادة من قاعدة السلسلة يكون

$$\frac{dy}{dt}(t)=f'(x(t))\cdot\frac{dx}{dt}(t)$$

وعليه في اللحظة t_0 التي يكون فيها $x(t_0)=1$ و $\frac{dx}{dt}(t_0)=2\text{cm/s}$ يكون لدينا

$$\frac{dy}{dt}(t_0)=f'(x(t_0))\cdot\frac{dx}{dt}(t_0)=f'(1)\times 2=2\,\text{cm/s}$$

تمارين

1 ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$ وفق $f(x)=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)(x+2)}$

والمطلوب :

1. ادرس تغيرات الدالة f ونظّم جدولاً بها، واستنتج كل مقارب للخط C يوازي المحور yy' أو يوازي xx'، وادرس الوضع النسبي للخط C مع كل مقارب وجدته.

2. إذا علمت أن f تكتب بالشكل $f(x)=a+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{x+2}$ فاحسب a و b و c.

3. اكتب معادلة المماس للخط C في نقطة منه فاصلتها $x=0$.

4. ارسم كلّ مقارب وجدته ثم ارسم C.

5. بافتراض $M(x,y)$ نقطة متحركة على C ، أوجد $\dfrac{dy}{dt}$ في اللحظة التي يكون فيها $x=3$ و

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{10}\text{cm/s}$$

6. احسب مساحة السطح المحصور بين C والمحور xx' والمستقيمات

$x=-4$, $x=-6$, $y=1$.

2 ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$ وفق $f(x)=\dfrac{x}{x^2+x-2}$

1. ادرس تغيرات الدالة f ونظّم جدولاً بها، واستنتج كل مقارب للخط C يوازي المحور yy' أو يوازي xx'، وادرس الوضع النسبي للخط C مع كل مقارب وجدته.

2. ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C.

3. بين أنّ f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$ يكتب بالشكل $f(x)=\dfrac{1}{3x-3}+\dfrac{2}{3x+6}$

4. احسب بدلالة λ من المجال $]0,1[$ المقدار $S(\lambda)$ الذي يمثل مساحة السطح المحصور بين C والمحور xx' والمستقيمين $x=0$ و $x=\lambda$. ثم أوجد معدل تغير المساحة S عند $\lambda=\dfrac{1}{2}$

و $\dfrac{d\lambda}{dt}=\dfrac{1}{100}\text{cm/s}$

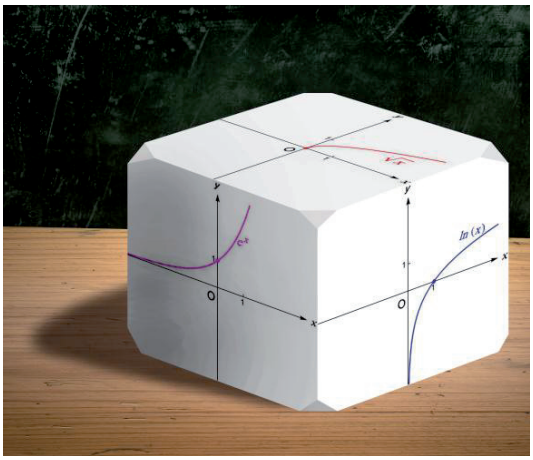
5. احسب مساحة السطح السابق عندما $\lambda=\dfrac{1}{2}$.

3 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ وفق $f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x+1}$ والمطلوب :

1. أثبت أنّ f تكتب بالشكل $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$, حيث a, b, c أعدادٌ حقيقية، يُطلَب تعيينُها.
2. أوجد كلّ مقارب للخط C يوازي المحور yy'، ثمّ ادرس وضع الخط C مع كل مقارب وجدته.
3. أثبت أنّ المستقيم $\Delta: y=ax+b$ مقارب للخط C، ثمّ ادرس وضع الخط C بالنسبة إلى المقارب Δ.
4. ادرس تغيّرات الدالة f ونظّم جدولاً بها، وبيّن ما للدالة f من قيم كبرى أو صغرى محلياً، ثمّ أوجد $f(\mathbb{R}\setminus\{-1\})$.
5. ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C.
6. احسب مساحة السطح المحصور بين C و $\Delta: y=x-2$ والمستقيمين $x=3$ و $x=2$.

التمثيل البياني لنماذج من دوال مركبة

3.3



سوف تتعلّم

التمثيل البياني لنماذج من دوالّ المركبة

مقدمة:

درسنا فيما سبق نماذج لدوال كسرية مختلفة، وتمّت دراسة تغيراتها ورسم خطها البياني، وفي هذا الدرس ندرس التمثيل البياني لدوال أخرى تحوي عبارات أنماط أخرى من الدوال.

مسألة (1)

ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ وفق : $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{2}{\sqrt{x}}$

1. ادرس تغيرات الدالة f ونظّم جدولاً بها، ثمّ دلّ على القيمة الصغرى محلياً، واستنتج معادلة المقارب الموازي لـ yy'، وادرس الوضع النسبي للخط C مع المقارب الذي وجدته.
2. ارسم المقارب، وارسم C.
3. احسب حجم المجسم الناتج عن دوران السطح المحصور بين الخط C والمحور xx' والمستقيمين $x=1, x=2$ دورة كاملة .
4. أعطِ قيمة تقريبية للمقدار $f(9.1)$.

الحـــل:

1. الدالة معرفة ومستمرة وقابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$.

- في جوار $+\infty$ لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
- وفي جوار $-\infty$ لدينا $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=+\infty$. نستنتج أنّ المستقيم yy' مستقيم قارب للخط C، والخط C يقع إلى يمين المقارب.
- لدراسة اطراد الدالة f نحسب المشتق فنجد :

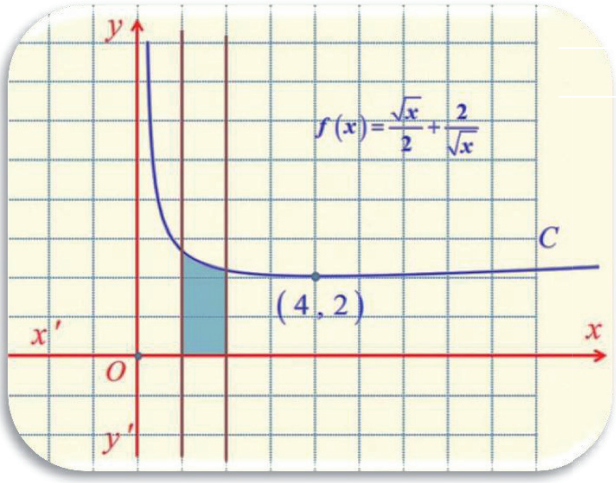
$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}-2\cdot\frac{1}{2x\sqrt{x}}=\frac{x-4}{4x\sqrt{x}}$$

إذن إشارة $f'(x)$ من إشارة $x-4$ لأن المقام موجب، ومنه جدول التغيرات الآتي:

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

ونلاحظ أن $f(4)=2$ هي قيمة صغرى شاملة للدالة f.

2. الرسم:



3. يُحسب حجم المجسم الدوراني المطلوب من الصيغة :

$$V=\pi\int_1^2 (f(x))^2\,dx=\pi\int_1^2\left(\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$$

ومنه

$$V=\pi\int_1^2\left(\frac{x}{4}+\frac{4}{x}+2\right)dx=\pi\left[\frac{x^2}{8}+4\ln(x)+2x\right]_1^2=\pi\left(\frac{19}{8}+4\ln 2\right)$$

4. نعتمد في الحل على العلاقة :

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$$

حيث نختار $x_0=9$، و $\Delta x=0.1$ فيكون

$$f(9)=\frac{13}{6} \quad \text{و} \quad f'(x_0)\Delta x=\frac{5}{108}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{216}$$

ومنه

$$f(9.1)\approx\frac{13}{6}+\frac{1}{216}=\frac{469}{216}$$

أو $f(9.1)\approx 2.1713$.

مسألة (2)

ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

1. أثبت أن هذه الدالة فرديةٌ واستنتجِ الصفة التناظرية لـ C.

2. أوجد كلّ خطّ مقارب يوازي xx' واستنتج وضع الخط C بالنسبة إلى كلّ مقارب وجدته.

3. ادرس تغيرات الدالة f ونظّم جدولاً .

4. اكتب معادلة المماس Δ للخط في المبدأ.

5. ارسم كل مقارب وجدته، وارسم المماس، ثمّ ارسم الخط C.

6. احسب مساحة السطح المحصور بين الخط C والمحور xx' والمستقيمين $x=-1$ و $x=1$.

الحـــل:

1. نلاحظ أنه أياً كانت $x\in\mathbb{R}$ كان $-x\in\mathbb{R}$ فالشرط الأول محقق وضوحاً.

الشرط الثاني: $f(-x)=\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+1}}=-f(x)$ محقق أيضاً.

إذن الدالة فردية وخطها البياني متناظر بالنسبة إلى مبدأ الإحداثيات.

2. الدالة مستمرة على $\mathbb{R}$ ونلاحظ أن عبارة $f(x)$ تُكتَب بالشكل $f(x)=\dfrac{x}{|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}$ ومنه :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ (علل ذلك) و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+1$ (علل ذلك) نستنتج أنّ

المستقيم Δ_1 الذي معادلته $y=-1$ مستقيم مقارب للخط C في جوار $-\infty$ والخط البياني يقع فوق المقارب لأن $f(x)-y_{\Delta_1}=f(x)+1>0$ أياً كانت $x\in\mathbb{R}$.

وكذلك المستقيم Δ_2 الذي معادلته $y=1$ مستقيم مقارب للخط C في جوار $+\infty$ والخط البياني يقع تحت المقارب لأنّ $f(x)-y_{\Delta_2}=f(x)-1<0$ أياً كانت $x\in\mathbb{R}$.

3. f اشتقاقية على $\mathbb{R}$، ونلاحظ أنّ

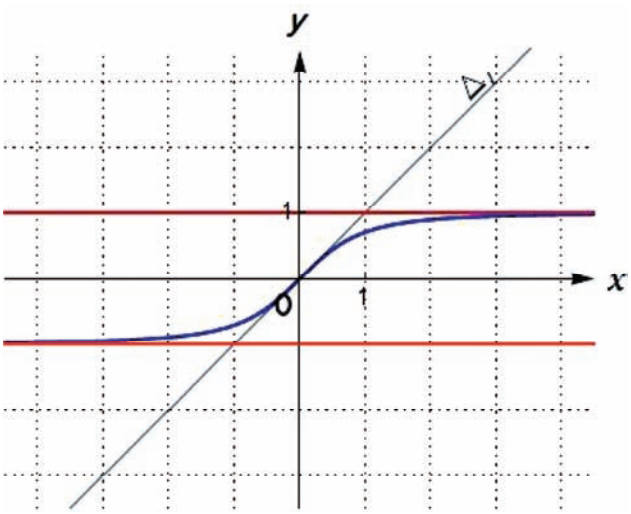
$$f'(x)=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}>0$$

فهي متزايدة تماماً، ولها جدول التغيرات المجاور :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+1$

4. نلاحظ أن $(0,0)\in C$، وميل المماس عند $x=0$ يساوي $m=f'(0)=1$. إذن معادلة المماس Δ هي $y=x$.

5. الرسم مبيّن في الشكل المجاور.



6. لما كانت الدالة f فرديّة وخطها البياني متناظر بالنسبة إلى مبدأ الإحداثيات كان $S=2S_1$ حيث

$$S_1=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$=\left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1=\sqrt{2}-1$$

فالمساحة المطلوبة $S=2S_1=2\sqrt{2}-2$

مسألة (3)

لتكن الدالة f : $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ المعرفة على $\mathbb{R}$.

1. أثبت أنّ الخط البياني للدالة f متناظر بالنسبة إلى مبدأ الإحداثيات $(0,0)$.

2. أوجد معادلة كلّ مقارب للخط C يوازي $x'x$ وعيّن وضع الخط C بالنسبة إلى كل مقارب وجدته.

3. ادرس تغيرات الدالة f ونظّم جدولاً بها.

4. ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C.

5. استنتج رسم C_1 الخط البياني للدالة f_1 : $f_1(x)=\dfrac{|e^x-1|}{e^x+1}$.

6. احسب مساحة السطح المحصور بين C والمحور $x'x$ والمستقيمين $x=0$ و $x=\ln 2$.

الحـــل:

1. المجموعة $\mathbb{R}$ متناظرة بالنسبة إلى 0، فالشرط الأول محقق وضوحاً. ومن ناحية أخرى، أياً كان العدد الحقيقي x كان :

$$f(-x)=\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\frac{\frac{1}{e^x}-1}{\frac{1}{e^x}+1}=\frac{1-e^x}{1+e^x}=-\frac{e^x-1}{e^x+1}=-f(x)$$

فالدالة f فردية وخطها البياني متناظر بالنسبة إلى مبدأ الإحداثيات.

2. الدالة مستمرة على $\mathbb{R}$.

في جوار $-\infty$

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ إذن المستقيم Δ_1 الذي معادلته $y=-1$ مستقيم مقارب للخط C في جوار $-\infty$ والخط البياني C يقع فوق المقارب لأنه أياً كانت $x\in\mathbb{R}$ فلدينا

$$f(x)-y_{\Delta_1}=\frac{e^x-1}{e^x+1}+1=\frac{2e^x}{e^x+1}>0$$

في جوار $+\infty$

لـــدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ لأنّ للدالـــة f الصـــيغةَ المكافئـــة الآتيـــة : $f(x)=-f(-x)=\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$،

و $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}=0$.

إذن المستقيم Δ_2 الذي معادلته $y=1$ مستقيم مقارب للخط C في جوار $+\infty$ والخط البياني C يقع تحت المقارب لأنه أياً كانت $x\in\mathbb{R}$ فلدينا

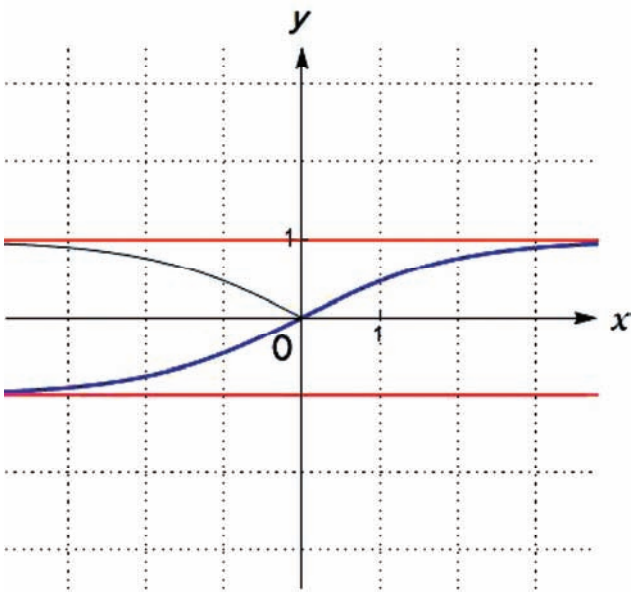
$$f(x)-y_{\Delta_2}=\frac{e^x-1}{e^x+1}-1=\frac{-2}{e^x+1}<0$$

3. نلاحظ أنّ $f'(x)=\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}>0$

فالدالة f متزايدة تماماً لها جدول التغيرات

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+1$

4. الرسم مبيّن في الشكل المجاور.



5. نلاحظ أنّ $f_1(x)=|f(x)|$ إذن C_1 ينتج عن C بتثبيت النقاط ذات الترتيب الموجب، ونأخذ نظائر النقاط ذات الترتيب السالب بالنسبة إلى محور $x'x$. وقد رسمنا C_1 مع C على الشكل نفسه.

6. نلاحظ أنّ الخط البياني C يقع فوق محور الفواصل على المجال $[0,\ln 2]$ إذن $S=\int_0^{\ln 2}\frac{e^x-1}{e^x+1}dx$.

لحساب هذا التكامل نلاحظ أنّه تمكن كتابة f بالشكل:

$$f(x)=\frac{e^x+1}{e^x+1}+\frac{-2}{e^x+1}=1+\frac{-2}{e^x+1}=1+\frac{-2e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

تذكر

$e^x e^{-x}=1$

وعليه

$$S=\int_0^{\ln 2}\frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx=\int_0^{\ln 2}\left(1+\frac{-2e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)dx$$

$$=\left[x+2\ln\left(1+e^{-x}\right)\right]_0^{\ln 2}$$

$$=\left[\ln 2+2\ln\left(1+e^{-\ln 2}\right)-\left(0+2\ln\left(1+e^{0}\right)\right)\right]$$

$$=\ln 2+2\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)-0-2\ln 2$$

$$=2\ln\left(\frac{3}{2}\right)-\ln 2=2\ln 3-2\ln 2-\ln 2$$

$$=2\ln 3-3\ln 2=\ln 9-\ln 8=\ln\frac{9}{8}$$

مسألة (4)

ليكن الخط C البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x+\frac{e^x}{e^x+1}$.

1. برهن أنّ المستقيم Δ_1 الذي معادلته $y=x$ مستقيم مقارب للخط C عند $-\infty$ ثم ادرس وضع C بالنسبة إلى Δ_1.
2. برهن أنّ المستقيم Δ_2 الذي معادلته $y=x+1$ مستقيم مقارب للخط C عند $+\infty$ ثم ادرس وضع C بالنسبة إلى Δ_2.
3. ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها.
4. ارسم كلّ مقارب وجدته ثم ارسم C.
5. احسب مساحة السطح المحصور بين C والمحور $x'x$ والمستقيم $x=1$.

الحـــل:

1. نلاحظ أنّ $f(x)-y_{\Delta_1}=\frac{e^x}{1+e^x}$، ومنه

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-y_{\Delta_1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{1+e^x}=0$$

نستنتج أن المستقيم Δ_1 الذي معادلته $y=x$ مستقيم مقارب للخط C عند $-\infty$. ولأنّ $f(x)-y_{\Delta_1}=\frac{e^x}{1+e^x}>0$ نرى أنّ الخط البياني C يقع فوق المقارب Δ_1.

2. نلاحظ مجدداً أنّ

$$f(x)-y_{\Delta_2}=x+\frac{e^x}{e^x+1}-x-1=\frac{e^x}{e^x+1}-1=\frac{-1}{e^x+1}$$

إذن

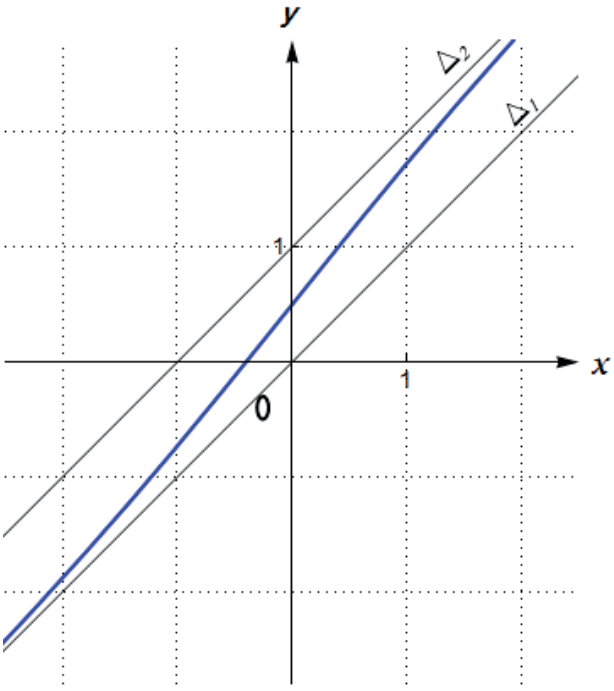
$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-y_{\Delta_2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{e^x+1}=0$$

و المستقيم Δ_2 الذي معادلته $y=x+1$ مستقيم مقارب لـ C في جوار $+\infty$. والخط البياني C يقع تحت Δ_2 لأنّ $f(x)-y_{\Delta_2}=\frac{-1}{e^x+1}<0$ أياً كانت قيمة x.

3. لإنجاز جدول التغيرات نلاحظ أنّ $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ (علل) و أنّ $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ (علل). وبحساب المشتق نجد $f'(x)=1+\frac{e^x}{(1+e^x)^2}>0$، فالدلة متزايدة تماماً، ولها جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4. نجد في الشكل المجاور الخط البياني C والمقاربات Δ_1 و Δ_2.



5. الخط C يقع فوق محور الفواصل على المجال $[0,1]$ إذن:

$$S=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(x+\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}+\ln(e^x+1)\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}+\ln(e+1)-[0+\ln 2]=\frac{1}{2}+\ln(e+1)-\ln 2$$
$$=\frac{1}{2}+\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$$

مسألة (5)

ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ بالصيغة $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

1. أوجد معادلة كل مقارب للخط C، ثمَّ عيّن وضع الخط C بالنسبة إلى كل مقارب وجدته.
2. ادرس تغيرات الدالة f ونظم جدولاً بها، ثمَّ دلّ على القيمة الكبرى محلياً.
3. وازن بين π^e و e^π.
4. ارسم كل مقارب وجدته، ثمَّ ارسم C واستنتج الخط البياني C_1 للدالة f_1: $f_1(x)=\frac{1}{x}\cdot\ln\left(\frac{1}{x}\right)$.
5. أوجد معادلة المنحني التكاملي للدالة f المارّ بالنقطة $(e,\frac{1}{e})$
6. احسب مساحة السطح المحصور بين C والمحور $x'x$ والمستقيم الذي معادلته $x=e$.

الحـل:

1. الدالة مستمرة على $]0,+\infty[$.

- ولدينا $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=-\infty$ (علل). إذن المستقيم Δ_1 الذي معادلته $x=0$ (المحور $y'y$) هو مستقيم مقارب للخط C الذي يقع إلى يمين المقارب عندما تسعى x إلى 0 من اليمين.
- ومن جهة أخرى $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ إذن المستقيم Δ_2 الذي معادلته $y=0$ (المحور $x'x$) مستقيم مقارب للخط C عندما تكون x في جوار $+\infty$.
- لدراسة وضع الخط C بالنسبة إلى Δ_2 نلاحظ أنّ: $f(x)-y_{\Delta_2}=f(x)=\frac{\ln x}{x}$
- وهنا نناقش كما يأتي:
  - ❖ في حالة $x\in]0,1[$ يكون $\ln x<0$، ومن ثَمّ $f(x)-y=\frac{\ln x}{x}<0$. أي يقع C تحت المقارب Δ_2 في هذا المجال.
  - ❖ في المجال $x\in]1,+\infty[$ يكون $\ln x>0$، إذن $f(x)-y=\frac{\ln x}{x}>0$. أي يقع C فوق المقارب Δ_2 في هذا المجال.

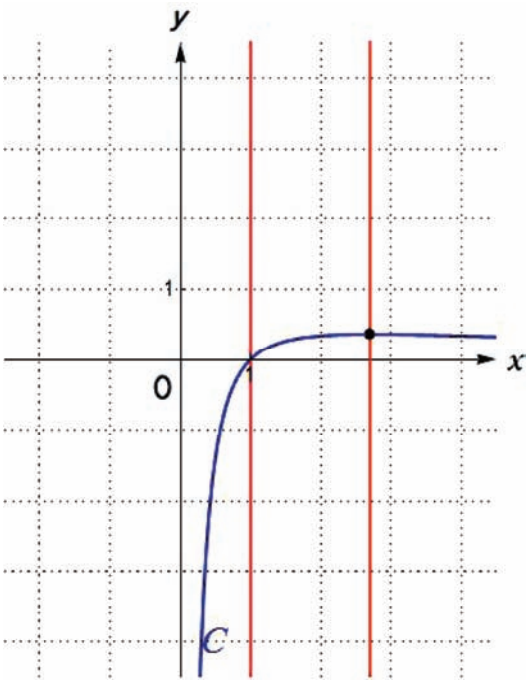
ونلاحظ أن $x=1$ هي فاصلة نقطة التقاطع $(1,0)$ بين Δ_2 و C.

2. الدالة f اشتقاقية على المجال $]0,+\infty[$، ولدينا

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

إذن إشارة $f'(x)$ توافق إشارة $1-\ln x$. فهو يغير إشارته عندما $x=e$. ومنه جدول التغيرات الآتي :

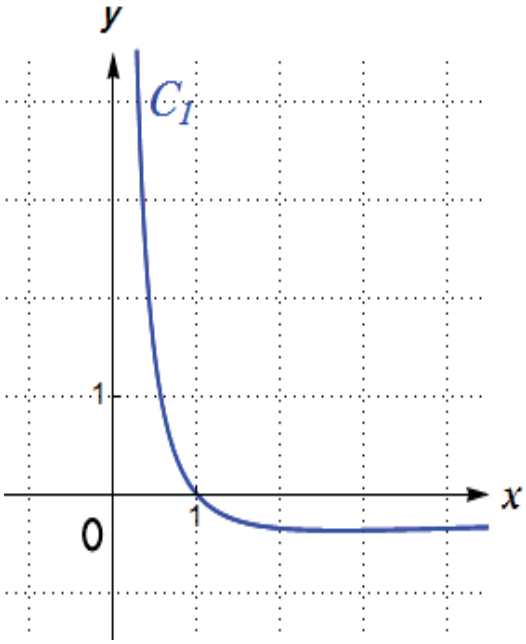
x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0



يبيّن جدول التغيرات أنّ $f(e)=\frac{1}{e}$ هي قيمة كبرى شاملة للدالة f أي أنّ $f(x)\leq\frac{1}{e}$ أياً كانت x من $]0,+\infty[$.

3. الدالة f متناقصة تماماً على $[e,+\infty[$، ولأنّ $\pi\in[e,+\infty[$ استنتجنا أنّ $f(\pi)<f(e)$ أي $\frac{\ln\pi}{\pi}<\frac{\ln e}{e}$ أو $e\ln\pi<\pi\ln e$ وأخيراً $\ln(\pi^e)<\ln(e^\pi)$، ولأنّ الدالة الأسيّة متزايدة تماماً استنتجنا من ذلك أنّ $\pi^e<e^\pi$.

4. الرسم : نجد أعلاه الخط البياني C، ونلاحظ أنّ $f_1(x)=-f(x)$ ، أي أنّ C_1 هو نظير C بالنسبة إلى محور الفواصل $x'x$. ومنه الخط البياني C_1 المبيّن في الشكل المجاور.



بملاحظة أنّ

$$\int f(x)dx=\int\frac{\ln x}{x}dx=\frac{1}{2}\ln^2(x)+c$$

نرى الدوال الأصلية للدالة f هي $F(x)=\frac{1}{2}\ln^2(x)+c$، ونبحث عن تلك الدالة الأصلية التي تُحقّق الشرط $F(e)=\frac{1}{e}$، مما يفيد في تعيين c. فنجد $c=\frac{1}{e}-\frac{1}{2}$، والدالة الأصلية المطلوبة هي :

$$F(x)=\frac{1}{2}\ln^2(x)+\frac{1}{e}-\frac{1}{2}$$

5. وأخيراً، يُحسب السطح المطلوب كما يأتي:

$$S=\int_1^e f(x)dx=\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx=\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e=\frac{1}{2}$$

مسألة (6)

ليكن C الخطّ البياني للدالة f المعرفة بالصيغة $f(x)=\ln\left(\frac{x}{2-x}\right)$.

1. أوجد D_f، وأوجد معادلة كلّ مقارب للخط C يوازي المحور $x'x$ أو يوازي المحور $y'y$.

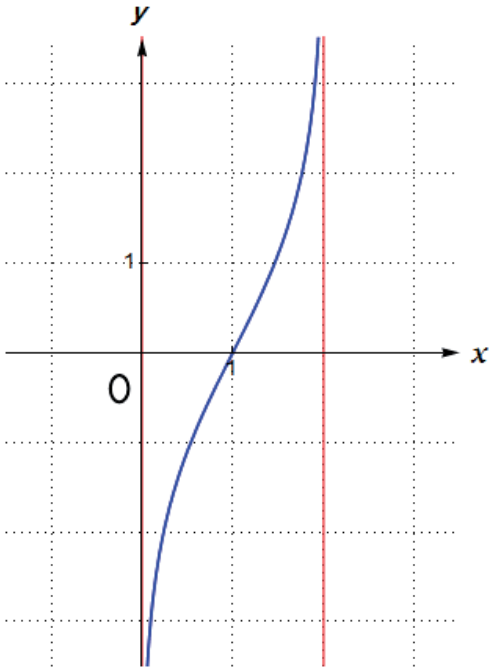
2. ادرس تغيرات الدالة f ونظّم جدولاً بها.

3. ارسم كل مقارب وجدته للخط C ثم ارسم C.

الحـل:

1. الدالة f معرفة عندما $\frac{x}{2-x}>0$ أي $D_f=]0,2[$، والدالة مستمرة على المجال $]0,2[$.

- من جهة أولى $\lim\limits_{x\to 0^{>}} f(x)=-\infty$ إذن المستقيم Δ_1 الذي معادلته $x=0$ مستقيم مقارب والخط C يقع إلى يمين المقارب Δ_1.
- ومن جهة ثانية $\lim\limits_{x\to 2^{<}} f(x)=+\infty$، إذن المستقيم Δ_2 الذي معادلته $x=2$ مستقيم مقارب والخط C يقع إلى يسار المقارب Δ_2.



2. لدراسة اطراد f نلاحظ أنّ f اشتقاقية، وأياً كان $x\in]0,2[$

$$f'(x)=\frac{2}{x(2-x)}>0$$

إذن f متزايدٌ تماماً على $]0,2[$. ومنه جدول التغيرات:

x	0		2
$f'(x)$	‖	$+$ $+$	‖
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

مسألة (6)

ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة وفق: $f(x)=\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$

1. أوجد D_f، ثمّ أوجد معادلة كلّ مقارب للخط C يوازي المحور $x'x$ أو يوازي المحور $y'y$.

2. برهن أنّ الخط C متناظر بالنسبة إلى مبدأ الإحداثيات $(0,0)$

3. ادرس تغيرات الدالة f ونظّم جدولاً بها .

4. ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C، واستنتج منه الخط البياني C_1 للدالة f_1 : $f_1(x)=\ln(x-2)-\ln(x+2)$.

5. ادرس جبرياً تقاطع منحني الدالة $g(x)=\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^2$ مع مجموعة المستقيمات $y=\lambda$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}$.

الحل:

1. الدالة f معرفة عندما $\frac{x-2}{x+2}>0$ إذن $D_f=]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$. وهي f مستمرة على كل من المجالين $]2,+\infty[$ و $]-\infty,-2[$ ونتحقق بسهولة أنّ :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0 \text{ و } \lim_{x\to-\infty} f(x)=0 \quad \text{(علل)}$$

إذن المستقيم Δ_1 الذي معادلته $y=0$ مستقيم مقارب (منطبق على $x'x$) عندما تكون x في جوار $+\infty$، وفي جوار $-\infty$.

ومن جهة أخرى، لدينا

$$\lim_{x\xrightarrow{>}+2} f(x)=-\infty \text{ و } \lim_{x\xrightarrow{<}-2} f(x)=+\infty \quad \text{(لماذا؟)}$$

إذن المستقيم Δ_2 الذي معادلته $x=-2$ مستقيم مقارب للخط C الذي يقع إلى يسار المقارب Δ_2.

وكذلك يكون المستقيم Δ_3 الذي معادلته $x=2$ مستقيماً مقارباً للخط C الذي يقع إلى يمين المقارب Δ_3.

2. دراسة التناظر بالنسبة إلى $(0,0)$:

أولاً : أياً كان x من $]-\infty,-2[\cup]+2,+\infty[$ كان $-x\in]-\infty,-2[\cup]+2,+\infty[$.

ثانياً : أياً كان x من $]-\infty,-2[\cup]+2,+\infty[$ فلدينا

$$f(-x)=\ln\left(\frac{-x-2}{-x+2}\right)=\ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)=-\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)=-f(x)$$

أي أنّ $f(-x)=-f(x)$ أياً كانت x من D_f. نستنتج أنّ C متناظر بالنسبة إلى $(0,0)$.

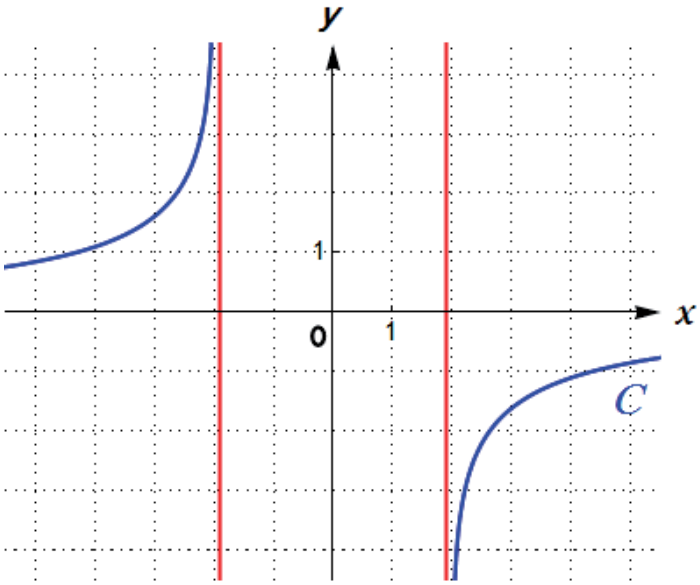
3. f اشتقاقية على كل من المجالين $]2,+\infty[$ و $]-\infty,-2[$ ولدينا في حالة $x\notin[-2,2]$:

$$f'(x)=\frac{4}{(x+2)(x-2)}=\frac{4}{x^2-4}>0$$

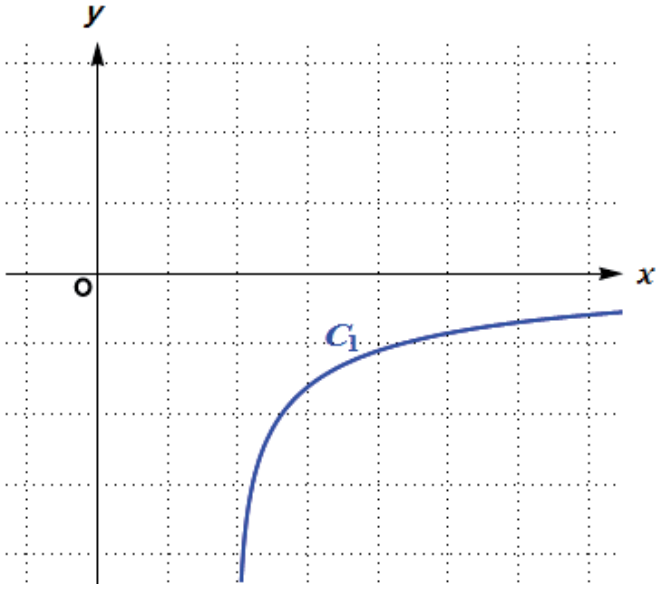
ومنه جدول التغيرات الآتي :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$				$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$		$-\infty$	$\nearrow$	0

4. الرسم:



ونلاحظ أنّ الدالة f_1 معرّفة على $D_{f_1}=]2\,,+\infty[$، وهي على هذه المجموعة تتفق مع $f(x)$. نستنتج أنّ الخط C_1 هو الفرع من الخط C الواقع تحت محور الفواصل $x'x$، ومنه الرسم في الشكل الآتي :



5. المعادلة $\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^2=\lambda$ تكافئ $\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^2=e^{\lambda}$ وهي بعد الإصلاح تُكافئ

$$(1-e^{\lambda})x^2-4(1+e^{\lambda})x+4(1-e^{\lambda})=0\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

لنناقش إذن الحالاتِ الآتيةَ :

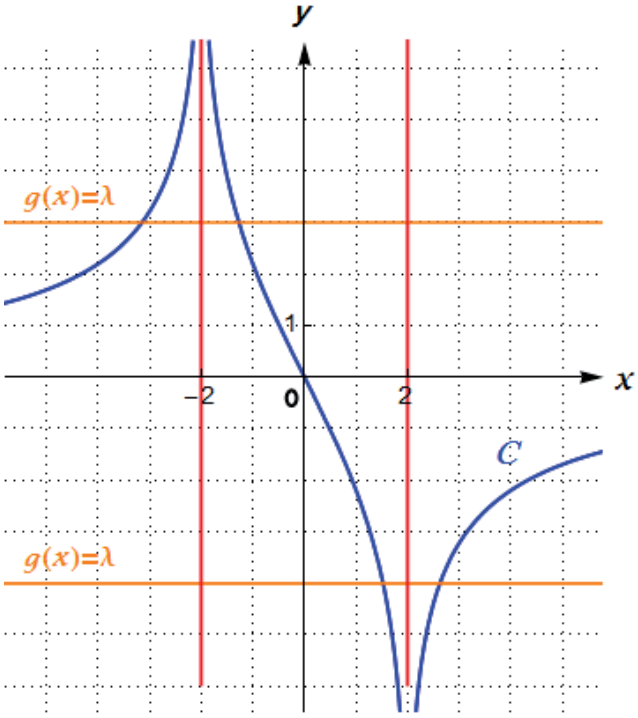
- إذا كان $1-e^{\lambda}=0$ (أي $\lambda=0$) كان للمعادلة (1) جذر وحيد هو $x=0$ والمستقيم يقطع المنحني في نقطة واحدة فاصلتها $x=0$.
- إذا كان $1-e^{\lambda}\neq 0$ (أي $\lambda=0$) كان مميّز المعادلة من الدرجة الثانية

$$\Delta=16(1+e^{\lambda})^2-16(1-e^{\lambda})^2=64e^{\lambda}>0$$

ويكون للمعادلة جذران مختلفان، فالمستقيم الذي معادلته $y=\lambda$ يقطع منحني الدالة g في نقطتين مختلفتين، يمكن حساب فاصلتاهما بسهولة لنجد

$$x_1=2\frac{1+e^{\frac{\lambda}{2}}}{1-e^{\frac{\lambda}{2}}} \quad \text{و} \quad x_2=2\frac{1-e^{\frac{\lambda}{2}}}{1+e^{\frac{\lambda}{2}}}$$

يوضّح الرسمُ البياني الآتي هذه النتائجَ :



تمارين

1 ليكن Δ_1 الخطّ البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ بالصيغة $f(x)=e^{-x}+\frac{1-x}{1+x}$.

1) ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها.

2) أوجد ما للخط C من مقاربات موازية للمحاور الإحداثيّة.

3) ارسم ما وجدته من مقاربات للخط C ، ثمّ ارسم C .

4) احسب مساحة السطح المحصور بين C والمحورين الإحداثيين والمستقيم $x=\frac{-1}{2}$.

2 ليكن C الخطّ البياني للدالة f المعرفة بالصيغة $f(x)=\ln(1+e^{-x})$.

1) عيّن مجموعة تعريف f، ثمّ أوجد نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

2) أثبت أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=-x$ مستقيم مقارب للخط C.

3) ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها.

4) لتكن A, B, D نقاطاً من الخط C فواصلها على الترتيب $0, 1, -1$، أثبت أنّ Δ' مماس C في A يوازي المستقيم BD.

5) ارسم Δ ثم ارسم C.

3 ليكن $\lambda\in\mathbb{R}$ و ليكن C_λ الخطّ البياني للدالة f_λ : $f_\lambda(x)=e^{x}+e^{-x}+\lambda$

1) عيّن λ ليكون للدالة f قيمةٌ صغرى شمولياً قيمتها 0.

2) في حالة $\lambda=-2$ برهن أنّ الخطين البيانيين C_{-2} و C_1 متماسان في المبدأ $(0,0)$.

3) برهن أنّ الدالة f_λ زوجيةٌ واستنتج الصفة التناظرية.

4) ادرس تغيّرات الدالة f_λ ونظّم جدولاً بها، ودلّ على قيمها الصغرى محلياً.

5) استنتج من تغيّرات f_{-2} أنّ حلول المتراجحة $2-e^{-x}<e^{x}$ هي $\mathbb{R}^*$.

6) ارسم الخطّ C للدالة f_{-2} واحسب مساحة السطح المحصور بين الخط C_{-2} والمحور $x'x$ والمستقيمين $x=\ln 2$ و $x=0$.

4 ليكن C الخطّ البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)$.

1) أثبت أنّ الدالة f فردية

2) ادرس تغيّرات f ونظّم جدولاً بها.

3) أثبت أنّ للمعادلة $f(x)=\lambda$ حلاً وحيداً في $\mathbb{R}$ وذلك أياً كان $\lambda\in\mathbb{R}$.

4) أثبت أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=x$ مماس للخط C في المبدأ O.

5) ارسم Δ ثمّ ارسم C واحسب مساحة السطح المحصور بين C والمحور $x'x$ والمستقيم الذي معادلته $x=\ln 2$.

6) إذا كان β هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=\lambda$، فأوجد β بدلالة λ.

5 ليكن C الخطّ البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=(x-1)e^x$

1) أثبت بطريقة الاستقراء الرياضي أنّ المشتق من المرتبة n حيث $n\in\mathbb{N}^*$ يُعطَى بالعلاقة $f^{(n)}(x)=(x+n-1)e^x$

2) ادرس تغيرات الدالة f ونظم جدولاً بها وأوجد ما للخط C من مقاربات لـ $x'x$.

3) ادرس بحسب قيم $\lambda\in\mathbb{R}$ قابلية المعادلة $f(x)=\lambda$ للحل.

4) ارسم كلّ مقارب وجدته للخط C، ثم ارسم C واستنتج رسم الخط C_1 للدالة f_1 المعرفة بالعلاقة $f_1(x)=xe^{x+1}$.

5) احسب مساحة السطح المحصور بين C والمحورين الإحداثيين $x'x$ و $y'y$.

6 ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة : $f(x)=ae^{2x}+be^x$ حيث a و b عددان حقيقيان

أولاً : عين a و b إذا علمت أن للدالة قيمةً صغرى محلياً قيمتها (-1) عند $x=0$.

ثانياً: في حالة $a=1$ و $b=-2$ ادرس تغيرات الدالة f: $f(x)=e^{2x}-2e^x$ ونظّم جدولاً بها.

1. استنتج عدد حلول المعادلة $e^x-2=-e^{-x}$ في $\mathbb{R}$.

2. ادرس جبرياً وبحسب قيم λ حلول المعادلة $f(x)=\lambda$.

3. ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C واستنتج الخط البياني للدالة f_1: $f_1(x)=\frac{1}{e^{2x}}(1-2e^x)$

4. احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحوري الإحداثيات .

5. احسب حجم المجسم الناتج عن دوران السطح السابق دورة كاملة حول محور $x'x$.

7 ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ بالعلاقة : $f(x)=\ln\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)$

3.3

1) أوجد معادلة كلّ مقارب للخط C موازٍ لأحد المحورين الإحداثيين، وادرس الوضع النسبي للخط C مع كل مقارب وجدته .

2) ادرس تغيرات الدالة f ونظّم جدولاً بها.

3) استنتج من جدول التغيرات أن للمعادلة $f(x)=\lambda$ حلاً وحيداً في $]0,+\infty[$ في حالة $\lambda<0$ ثمّ أوجد هذا الحلّ بدلالة f و λ.

4) احسب طول القوس من الخط C المحدد بالنقطتين $A(\ln 2, -\ln 3)$, $B\left(\ln 4, \ln\frac{3}{5}\right)$

5) ارسم كلّ مقارب وجدته ثمّ ارسم C.

تمرينات عامة

أولاً

أوجد مجموعة الدوال الأصلية للدالة f مع المجال D :

(1 $f(x)=\dfrac{5}{4x-3}$ $\quad : D=\left]-\infty,\dfrac{3}{4}\right[$

(2 $f(x)=\dfrac{3x+1}{2x}$ $\quad : D=]0,\infty[$

(3 $f(x)=\tan(x)$ $\quad : D=\left]\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right[$

(4 $f(x)=\cot(x)$ $\quad : D=]0,\pi[$

(5 $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$ $\quad : D=]0,1[$

(6 $f(x)=\dfrac{1}{\sin 2x}$ $\quad : D=\left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right[$

أوجد قيمة كلّ من التكاملات الآتية:

$$I_1=\int_1^e (x-1-\ln(x))dx \quad , \quad I_2=\int_0^{\ln 2}\left(\frac{1}{e^x+1}\right)dx$$

$$I_3=\int_{-2}^{-1}\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)dx \quad , \quad I_4=\int_0^{\ln 2}(xe^x)dx$$

$$I_5=\int_0^3 |2x+2|dx \quad , \quad I_6=\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx$$

$$I_7=\int_2^1\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}-3\right)dx \quad , \quad I_8=\int_0^3\left|x^2-3x+2\right|dx$$

$$I_9=\int_0^{\ln 2}(x-2)e^x\,dx \quad , \quad I_{10}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}\,dx$$

$$I_{11}=\int_0^1(e^{2x}+e^{-2x})dx \quad , \quad I_{12}=\int_{-2}^{+2}\left|x^2+4x\right|dx$$

ثانياً

1 مجموع محيطي دائرة ومربع يساوي $60\ cm$ ، أوجد طول نصف قطر الدائرة وطول ضلع المربع عندما يكون مجموع مساحتي الدائرة والمربع أصغر ما يمكن .

2 مثلث متساوي الساقين مرسوم داخل دائرة نصف قطرها $12\ cm$ أوجد بعدي المثلث لتكون مساحته أكبرَ ما يمكن ثمّ برهن أن نسبة مساحة المثلث إلى مساحة الدائرة كنسبة $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.

3 يصب دواء سائل في قمع على شكل مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته $2\ cm$ ، وارتفاعُهُ $4\ cm$ ، فإذا كان معدّل انسياب السائل في القمع هو $3\,cm^3/\sec$ فما هو معدل ارتفاع مستوى السائل في القمع عندما يكون ارتفاع السائل $1\ cm$ ثم عندما يكون ارتفاع السائل $2\ cm$.

4 مخروط دورانيّ نصفُ قطر قاعدته $4\ cm$ ، ومركزُها o ، وارتفاعُ المخروط $6\ cm$ ، نقطعه بمستوٍ متحوّل يوازي مستوي القاعدة ويبعد عنها مسافة x . احسب بدلالة x حجم المخروط الذي رأسه o وقاعدته المقطع السابق، ثمّ عيّن x ليكون حجم هذا المخروط أكبرَ ما يمكن .

5 عند تسخين أنبوب معدني مصمت على شكل أسطوانة دورانية قائمة يزيد الطول بمعدل $0{,}005\ cm/\sec$ ويزيد نصف القطر بمعدل $0{,}002\ cm/\sec$ ، أوجد معدل زيادة حجم الأنبوب عندما يكون طوله $40\ cm$ ونصف قطره $3\ cm$.

6 سلّم طولُهُ $10\ cm$ يستند طرفه الأسفل على أرض أفقية وطرفه العلوي على حائط عمودي على مستوي الأرض الأفقية ، فإذا انزلق الطرف الأسفل مبتعداً عن الحائط بمعدل $2\ m/\sec$ عندما يكون الطرف الأسفل على بعد $8\ m$ من الحائط فأوجد:

1) معدل انزلاق الطرف العلوي .
2) سرعة تغيّر الزاوية بين السلم ومستوي الأرض .

7 أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين الخطيين البيانيين C_1 , C_2 للدالتين $f_2(x)=x^2$, $f_1(x)=\sqrt{8x}$ دورة كاملة حول $x'x$

8 أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين الخط C للدالة f : $f(x)=\sqrt{x}$ ومحور $x'x$ والمستقيمين $x=4$, $x=0$ دورة كاملة حول $x'x$.

9 أوجد قيمة تقريبية للعدد $\ln(7.9)$ إذا علمت أنّ $\ln(2)\approx 0.693147$ ولسهولة الحسابات نكتب $(\ln(2)\approx 0.7)$

10 ليكن C الخطّ البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ إذا كان C يقبل مماساً موازياً ل $x'x$ في النقطة M منه والتي فاصلتها $x=1$ ولم يكن $f(1)$ قيمة كبرى ولا صغرى محلياً للدالة f أثبت أن $b=-3a$, $c=3a$

مسألة 1: لتكن مجموعة الدوال g المعرفة على $\mathbb{R}$: $g(x)=ax+be^x$ حيث $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}^*$ والمطلوب :

أولاً: أوجد مجموعة قيم b التي من أجلها $g''(x)<0$، ثمّ عيّن عندئذ مجموعة قيم a التي كل منها يجعل للدالة g قيمة كبرى محلية.

ثانياً: أوجد معادلة تفاضلية تقبل الدوالّ $y=ax+be^x$ حلولاً لها.

ثالثاً: من أجل: $a=1$, $b=-1$ نحصل على الدالة f : $f(x)=x-e^x$ خطها البياني C والمطلوب:

1) أوجد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) اثبت أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=x$ مقارب للخط C في جوار $-\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي للخط C بالنسبة إلى المستقيم Δ

3) ادرس تغيرات الدالة f ونظّم جدولاً بها ، دلّ على قيمه الكبرى محلياً.

4) ارسم Δ ثم ارسم C واستنتج رسم الخط البياني C_1 للدالة f_1 المعرفة بالعلاقة
$$f_1(x)=-e^{-x}(1+xe^x)$$

5) احسب مساحة السطح المحصور بين C والمحور $x'x$ والمستقيمين $x=-1$, $x=1$

مسألة 2: ليكن الخط البياني للدالة f : $f(x)=\frac{x}{\ln x}-e$ والمطلوب :

1) أوجد مجموعة تعريف الدالة f، وأوجد معادلة كلّ مستقيم مقارب للخط C يوازي المحور $y'y$.

2) ادرس تغيّرات الدالة f ونظّم جدولاً بها ، دلّ على القيمة الصغرى محلياً واستنتج حلول المتراجحة $x > e\ln x$.

3) ارسم كلّ مقارب وجدته ثمّ ارسم C، ثمّ استنتج رسم الخط C_1 للدالة $f_1(x)=\frac{x}{\ln(-x)}+e$

مسألة 3: ليكن C الخطّ البياني للدالة f : $f(x)=\frac{x-2}{x}$ والمطلوب :

1) أوجد مجموعة التعريف D ، ثمّ أوجد كلّ مقارب للخط C موازٍ للمحور $x'x$ أو موازٍ للمحور $y'y$

2) ادرس تغيرات الدالة f ونظم جدولاً بها .

3) ارسم كل مقارب وجدته للخط C ثم ارسم C

4) استنتج رسم الخط C_1 للدالة f_1 المعرفة بالعلاقة $f_1(x)=\left|\frac{x-2}{x}\right|$

5) احسب مساحة السطح المحصور بين C والمحور $x'x$ والمستقيمين $x=3$, $x=2$

6) احسب حجم المجسم الناتج عن دوران السطح السابق دورةً كاملة حول محور $x'x$.

مسألة 4: ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على $D\subseteq\mathbb{R}$: $f(x)=\ln(ax+b)$ والمطلوب :

1) عيّن a , b علماً أن المستقيم $x=\frac{1}{2}$ مقارب لخطه البياني C عندما $x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}$ وأن C يقطع المحور $x'x$ في النقطة $A(1,0)$.

2) من أجل $b=-1$, $a=2$ نحصل على الدالة f : $f(x)=\ln(2x-1)$

a) أوجد مجموعة تعريف الدالة f ثمّ ادرس تغيرات الدالة f ونظّم جدولاً بها.

b) ارسم كلّ مقارب وجدته ثمّ ارسم واستنتج رسم الخط البياني C_1 للدالة f_1 المعرفة بالعلاقة $f_1(x)=|\ln(2x-1)|$

c) برهن أنّ الدالة f تَقابُل، ثمّ عين f^{-1} واستنتج رسم الخط البياني للدالة f^{-1}

d) برهن أن F: $F(x)=\frac{1}{2}\left[(2x-1)\cdot\ln\left(\frac{1}{2x-1}\right)-2x\right]$ دالة أصلية على المجال $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ للدالة f ثمّ احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور $x'x$ والمستقيم $x=2$

مسألة 5: ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على $D=[1,+\infty[$ وفق $f(x)=\ln\sqrt{x-1}$

1) أوجد $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ ثم أوجد المقارب الموازي $y'y$

2) ادرس تغيرات الدالة f ونظّم جدولاً بها .

3) ارسم الخط C للدالة f واستنتج رسم C_1 الخط البياني للدالة f_1 المعرفة بالعلاقة $f_1(x)=\ln(x-1)$ ورسم C_2 للدالة f_2 المعرفة بالعلاقة $f_2(x)=\ln x$

4) احسب مساحة السطح المحصور بين الخط C والمحور $x'x$ والمستقيم الذي معادلته $x=e$

مسألة 6: ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ وفق $f(x)=ax+\dfrac{b}{x^3}$

والمطلوب :

1) أوجد قيمة كل من a , b إذا علمت أن للدالة f قيمةً صغرى محلياً هي $f(1)=4$

2) من أجل $b=1$, $a=3$ تحقق أنّ الدالة f: $f(x)=y=3x+\dfrac{1}{x^3}$. حلّ للمعادلة التفاضلية

$$\frac{1}{3}xy''+y'-\frac{1}{x^4}-3=0$$

3) برهن أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=3x$ مقارب لـ C وادرسِ الوضع النسبي لـ C مع Δ.

4) ادرس تغيرات الدالة f ونظم جدولاً بها واستنتج كل مقارب للخط C يوازي المحور $y'y$ أو يوازي المحور $x'x$

5) ارسم كل مقارب وجدته ثمّ ارسم C واحسب مساحة السطح المحصور بين C والمحور $x'x$ والمستقيمين $x=2$, $x=1$

6) احسب حجم المجسم الناتج عن دوران السطح السابق حول $x'x$ دورة كاملة .

مسألة 7: ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x^2\cdot e^x$ والمطلوب :

1) ادرس تغيرات الدالة f ونظّم جدولاً بها ، عيّن كل قيمة كبرى أو صغرى محلياً ، واستنتج كل مقارب للخط C يوازي المحور $x'x$.

2) احسب اعتماداً على التكامل بالتجزئة مساحة السطح المحدد بـ C والمحور $x'x$ والمستقيم $x=1$

3) ارسم كلّ مقارب وجدته ثم ارسم C واستنتج رسم الخط البياني C_1 للدالة f_1: $f_1(x)=\dfrac{x^2}{e^x}$

4) ناقش بيانياً حسب قيم λ عدد حلول المعادلة $f(x)=\lambda$.

مسألة 8: ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=xe^{x}$

1) ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها، ثمّ وعيّن القيمة الصغرى محلياً ومقاربي خطه البياني المنطبقين على $x'x$ وارسم C.

2) احسب مساحة السطح المغلق المحدد بـ C والمحور $x'x$ والمستقيم $x=1$

3) استنتج رسم C_1 الخط البياني للدالة f_1 المعرفة وفق $f_1(x)=\frac{x}{e^{x}}$

مسألة 9: ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على المجال $]-1,1[$ وفق $f(x)=\ln(1-x^2)$

1) ادرس تغيّرات f ونظّم جدولاً بها وعين القيمة الكبرى محلياً لها، وكل مقارب لـ C يوازي $y'y$

2) ارسم كل مقارب وجدته، ثمّ ارسم C

3) احسب L طول القوس من C الموافق للمجال $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ الجواب $L=-\frac{1}{2}+\ln 3$.

مسألة 10: لتكن الدالة f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$: $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x-1}$ خطه البياني C:

1) عيّن a, b (الحقيقيين) ليكون للدالة قيمةٌ كبرى محليا مساوية للصفر عند $x=-1$.

2) أثبت أنّ الدالة تكتب بالشكل: $f(x)=x+3+\frac{4}{x-1}$.

3) أثبت أنّ المستقيم: $y=x+3$ مقارب للخط C ثم أوجدِ المقارب الموازي $y'y$.

4) ادرس تغيرات الدالة f ثم ارسم C بعد رسم المقاربات

5) ناقش بيانياً بحسب قيم λ حلول المعادلة: $x^2+(2-\lambda)x+1+\lambda=0$.

6) احسب مساحة السطح المحصور بين C والمحور $x'x$ والمستقيمين $x=3$, $x=2$.

مسألة 11: الاستطاعة P (مقدرة بالواط w) لجهاز كهربائي تُعطى بالدستور: $P(r)=\frac{-4r}{(r+1)^2}$

حيث (r مقاومة الدارة الكهربائية بالأوم Ω).

1- ادرس تغيّرات الدالة P ونظّم جدولاً بها، ثمّ وعيّن كلّ قيمة كبرى أو صغرى محلياً لها، وعيّنِ المقارب الأفقي للخط البياني C للدالة P.

2- ارسم كلّ مقارب وجدته وارسم C.

مسألة 12: لتكن لدينا كثيرةُ الحدود $p(x)=2x^3+x^2-13x+6$ المعرفة على $\mathbb{R}$

1- تحقّق من أنّ العدد $x=2$ جذر للمعادلة $p(x)=0$ ثمّ عيّن مجموعة حلولها.

2- حلّ في $\mathbb{R}$ كلّاً من المعادلتين:

$$2(\ln x)^3+(\ln x)^2-13(\ln x)+6=0$$

$$6e^{-3x}+e^{-x}-13e^{-2x}+2=0$$

3- لتكن الأعدادُ الحقيقيه الموجبة تماماً a , b , c حدوداً متعاقبة من متتالية هندسية:

1- بيّن أنّ الأعداد $\ln a$, $\ln b$, $\ln c$ بهذا الترتيب هي حدود من متتالية حسابية

احسبِ الأعداد الحقيقية a , b , c علماً أنّ $\begin{cases}\ln(a.b.c)=21\\ \ln a.\ln b.\ln c=-105\end{cases}$

مسألة 13: ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}\setminus\{1,3\}$ وفق $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4x+3}$ والمطلوب :

1- ادرس تغيرات الدالة f ونظّم جدولاً بها، واستنتج كلّ مقارب للخط C يوازي المحور yy' أو يوازي xx' .

2- ارسم كلّ مقارب وجدته ثمّ ارسم C.

3- احسب مساحة السطح المحصور بين C والمحور xx' والمستقيمين $x=-1$, $x=-2$.

مسألة 14: ليكن C الخطّ البياني للدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ وفق $f(x)=\dfrac{3x}{x+2}$ والمطلوب :

1- ادرس تغيّرات الدالة f ونظّم جدولاً بها.

2- استنتج كلّ مقارب للخط C يوازي المحور yy' أو يوازي xx'، وادرسِ الوضع النسبي للخط C مع كل مقارب وجدته.

3- ارسم كلّ مقارب وجدته ثمّ ارسم C، ثمّ احسب مساحة السطح المحصور بين C والمحور xx' والمستقيم $x=2$.

مسألة 15: **لتكن f دالةً معرّفة على $]-\infty,3]$ وفق $f(x)=x.\sqrt{3-x}$ خطها البياني C .**

1) ادرس تغيّرات الدالة f ونظّم جدولاً بها، ثمّ عيّن ما للدالة f من قيم كبرى وما له من قيم صغرى محلياً.

2) ارسم الخط C.

3) أثبت أنّ للدالة g المعيّنة بالعلاقة : $g(x)=\frac{2}{5}x(x^2-x-6)\sqrt{3-x}$ هي دالة أصلية على المجال $]-\infty,3]$ للدالة f .

4) احسب مساحة السطح المحصور بين C والمحور $x'x$ والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0\,,\,x=2$

5) احسب حجم المجسّم الناتج عن دوران السطح السابق دورةً كاملة حول محور $x'x$.

مسألة 16: لتكنِ الدالةُ f المعرفة على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ خطّه البياني C .

1) ادرس تغيرات الدالة f ونظّم جدولاً بها، ثمّ استنتج كلّ مقارب للخط C يوازي أحد المحورين الإحداثين، ثمّ ادرس وضع C بالنسبة إلى كلّ منهما .

2) ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C .

3) احسب مساحة السطح المحصور بين C والمحور $x'x$ والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0\,,x=1$

مسألة 17: لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}\setminus\{-2,0\}$ وفق $f(x)=\frac{x^3+1}{x^2+2x}$:

1- أثبت أنّ f يُكتَب بالشكل $f(x)=ax+b+\frac{g(x)}{x^2+2x}$.

2- ابحث عن كلّ مقارب للخط C يوازي المحور yy' ، وادرس الوضع النسبي للخط C مع كلّ مقارب وجدته.

3- أثبت أنّ المستقيم $\Delta: y=x-2$ مقارب للخط C، ثمّ ادرس الوضع النسبيّ للخط C بالنسبة إلى المقارب Δ.

مسألة 18: ليكن C الخطّ البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$ وفق $f(x)=\frac{x-1}{x^2-4}$

والمطلوب :

1- ادرس تغيّرات الدالة f ونظّم جدولاً بها.

2- استنتج ما للخط C من مقاربات موازية للمحور yy' أو المحور xx'.

3- ارسم كلّ مقارب وجدته ثمّ ارسم C.

4- احسب مساحة السطح المحصور بين C والمحور xx' والمحور yy' .

مسألة 19: لتكن لدينا الدالةُ f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ وفق $f(x)=2x-1+\frac{1}{x^2}$ خطه البياني C .

1) أثبت أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x-1$ مقارب للخط البياني C عند $+\infty$ وعند $-\infty$

2) ادرس تغيّرات الدالة f ونظّم جدولاً بها، ثمّ استنتج كلّ مقارب يوازي المحور $y'y$.

3) ارسم كل مقارب وجدته ثمّ ارسم C .

4) احسب مساحة السطح المحصور بين C وَ Δ والمستقيمين اللذين معادلتهما $x=2$, $x=1$

5) ناقش بيانياً وبحسب قيم الوسيط λ عدد حلول المعادلة $2x^3-(1+\lambda)x^2+1=0$

مسألة 20: لتكن f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\frac{2}{e^x+1}$ خطها البياني C

1) ادرس تغيرات الدالة f ونظّم جدولاً بها، ثمّ ادرس جهة تقعّر الخط C.

2) استنتج من جدول التغيّرات أنه: إذا كان $b\in\mathbb{R}$ كانت المعادلة $be^x=2-b$ غير قابلة للحل عندما $b\in]-\infty,0]\cup[2,+\infty[$، ولها جذر وحيد عندما $b\in]0,2[$.

3) أوجد ما للخط C من مستقيمات مقاربة وبيّن وضع C بالنّسبة إلى كل مقارب له.

4) أوجد معادلة المماس Δ للخط C في النّقطة $A(0,1)$.

5) ارسم كلّ مقارب للخط C وارسم Δ ثم ارسم C.

مسألة 21: ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ وفق $f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)^2$

1) أوجد معادلة كلّ مقارب للخط C يوازي المحور yy' أو المحور xx'.

2) ادرس تغيّرات الدالة f ونظّم جدولاً بها .

3) ارسم كل مقارب للخطّ C ثم ارسم C .

4) استنتج رسم الخط C_1 للدالة f_1 : $f_1(x)=2\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$

5) استنتج رسم الخط C_2 للدالة f_2 : $f_2(x)=2\ln\left(\frac{-x+1}{x}\right)$

6) استنتج رسم الخط C_3 للدالة f_3 : $f_3(x)=2\left[\ln(x-1)-\ln(x)\right]$

مسألة 22: ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ وفق $f(x)=\left(\frac{ax+b}{x}\right)$

وليكن المستقيم d الذي معادلته $y=x-\frac{1}{2}$

1) عيّن a , b إذا علمت أنّ المستقيم d يمسّ C في نقطة من محور $x'x$

2) ادرس تغيرات الدالة f: $f(x)=\left(\frac{2x-1}{4x}\right)$ المعرفة على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ونظّم جدولاً بها ثمّ أوجد معادلة كلّ مقارب للخط C يوازي المحور yy' أو المحور xx'.

3) ارسم كلّ مقارب للخط C ثمّ ارسم C .

4) احسب مساحة السطح المحصور بين C و d والمستقيم $\Delta: x=2$

5) أوجد معادلة مماسّ آخرَ لـ C يوازي المماس d .

مسألة 23: ليكن C الخط البياني للدالة f وفق $f(x)=\ln\left(\frac{2x+\lambda-2}{\lambda x+1}\right)$ حيث λ وسيط حقيقي

A. عين λ ليمرّ خطّه البياني من النقطة $M(2,\ln 2)$.

B. ليكن C الخط البياني للدالة g المعرفة على $D=]1,+\infty[$ وفق $g(x)=\ln(2x-2)$

1) أوجد معادلة كلّ مقارب للخط C yy' أو المحور xx'.

2) ادرس تغيرات الدالة g ونظّم جدولاً بها .

3) ارسم كل مقارب للخط C ثم ارسم C .

4) برهن أن $F(x)=x\ln(2x-2)-x-\ln(x-1)$ هو أحد الدوال الأصلية للدالة g ثم احسب مساحة السطح المحصور بين C والمحور xx' والمستقيمين $x=\frac{3}{2}$, $x=\frac{5}{2}$

مسألة 24: لتكن مجموعة الدوال : $f(x)=ae^{-x}+b$

أولاً) أوجد الدالة العدديّة التي يمرّ خطها البياني من مبدأ الإحداثيات ويكون المستقيم $y=2$ مستقيماً مقارباً للخط البياني للدالة f.

ثانياً) ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=-2e^{-x}+2$

1) أوجد معادلة كل مقارب للخط C يوازي المحور yy' أو المحور xx'.

2) ادرس تغيرات الدالة g ونظّم جدولاً بها .

3) ارسم كل مقارب للخط C ثمّ ارسم C .

4) اكتب معادلة مماس الخط C الذي ميلُه يساوي 2 .

5) احسب مساحة السطح المحصور بين C والمماس السابق والمستقيم $x=1$.

6) احسب حجم المجسم المتولّد عن دوران السطح السابق حول xx' دورة كاملة .

مسألة 25: ليكن C_1 الخط البياني للدالة f المعرّفة على المجال $]-1,+\infty[$ وفق $f(x)=\ln(x+1)$، وليكن C_2 الخط البياني للدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ وفق $g(x)=\dfrac{x}{x+1}$

أثبت أن C_1 و C_2 متماسان في المبدأ $o(0,0)$ ثم أوجد معادلة المماس المشترك Δ لهما في النقطة o.

1) ادرسِ الوضعَ النسبي للخطين C_1 و C_2 على المجال $]0,+\infty[$.

2) ادرس تغيرات كلّ من الدالتين f و g ونظّم جدولاً بذلك واستنتج كلّ مقارب موازٍ للمحورين $x'x$، $y'y$ للخطين C_1 و C_2 .

3) ارسم Δ ثمّ ارسم C_1 و C_2 .

4) احسب مساحة السطح المحصور بين C_2 والمحور $x'x$ والمستقيم الذي معادلته $x=2$.

مسألة 26: (دورة 2010)

ليكن C الخط البياني للدالة f المعرّفة على $D=]0,1[\cup]1,+\infty[$ وفق $f(x)=\dfrac{1}{x\ln(x)}$

1) ادرس تغيرات الدالة f ونظّم جدولاً بها، ثمّ أوجد ما للخط C من مقاربات موازية للمحور $x'x$ أو للمحور $y'y$. دلّ على قيمه الكبرى محلياً .

2) ارسم ما وجدته من مقاربات للخط C ثم ارسم C .

3) احسب مساحة السطح المحصور بين C والمحور $x'x$ والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=2$ ، $x=e$.

مسألة 27: (دورة 1993)

ليكن C_1 الخط البياني للدالة f وفق $f(x)=\ln(x+a)$

C_2 الخط البياني للدالة g وفق $g(x)=e^x+b$ حيث a,b حقيقيان

أولاً: عيّن كل من a,b إذا علمت أنّ C_1 يمرّ بالنقطة $(e-1,1)$ وأن C_1 و C_2 متناظران بالنسبة إلى منصف الربعين الأول والثالث .

ثانياً: إذا علمت أن $a=1, b=-1$

1) أوجد معادلة كلّ مقارب للخط C_1 وللخط C_2 موازٍ للمحور yy' أو المحور xx'.

2) ادرس تغيرات كلّ من الدالتين f, g ونظّم جدولاً بكل منهما .

3) ارسم كل مقارب وجدته للخط C_1 وللخط C_2 ثمّ ارسم كلّاً من C_1 و C_2 في الجملة نفسها.

4) أثبت أن C_1 و C_2 متماسان في المبدأ $(0,0)$

5) احسب مساحة السطح المحصور بين C_1 ومحور $y'y$ والمستقيم $y=1$.

مسألة 28: (دورة 1990)

لتكن مجموعة الدوال $f_\lambda(x)=\ln(x^2+\lambda)$ حيث λ وسيطٌ حقيقي

اولاً : عيّن قيمة الوسيط λ ليمرّ خطّه البياني بالنقطة $(2,\ln 3)$

ثانياً : ليكن C الخط البياني للدالة f المعرفة على $D=]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ وفق $f(x)=\ln\left(x^2-1\right)$

1) أوجد معادلة كل مقارب للخط C يوازي المحورَ yy' أو المحور xx'.

2) ادرس تغيرات الدالة f ونظّم جدولاً بها .

3) ارسم كلّ مقارب للخط C ثمّ ارسم C .

4) إذا كان C_1 الجزء من الخط C، الذي تكون فاصلة كلٍّ من نقطِهِ موجبةً، فاكتب معادلة المماس للخط C_1 في نقطة تقاطعه مع محور xx' .

5) إذا كانت $M(x,y)$ تتحرك على الخط C_1 وكان معدل ابتعادها عن yy' يساوي 2 عندما $x=3$ فأوجد معدل تغير ترتيبها y عندئذ .

مسألة 29: ليكن C الخط البياني للدالة f المعرّفة على $]0,+\infty[$ وفق $f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x)$

1) ادرس تغيرات الدالة f نظّم جدولاً بها، ثمّ أوجد ما لخطه البياني من مقاربات موازية للمحور $x'x$ أو للمحور $y'y$، ودلّ على قيمه الصغرى محلياً.

2) ارسم ما وجدته من مقاربات للخط C ثمّ ارسم C.

3) احسب مساحة السطح المحصور بين C والمحور $x'x$ والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ ، $x=e$.

مسألة 30: ليكن C الخط البياني للدالة f المعرف على $]-1,3[$ وفق $f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{3-x}\right)$

1) ادرس تغيرات الدالة f ونظّم جدولاً بها، ثمّ أوجد ما لخطه البياني من مقاربات موازية للمحور $x'x$ أو للمحور $y'y$.

2) اكتب معادلة المماس Δ للخط C في النقطة $A(1,0)$.

3) ارسم Δ ثمّ ارسم C.

مسألة 31: لتكن f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{-x}{2}})$ خطها البياني

1) أثبت أنّ الدالة f زوجية واستنتج الصفة التناظرية للخط C.

2) ادرس تغيرات f، ونظّم جدولاً بها.

3) ارسم C واحسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور $x'x$ والمستقيمين $x=-1, x=1$

4) احسب حجم المجسم الناتج عن دوران السطح السابق دورةً كاملة حول $x'x$

5) احسب طول القوس من الخط C المحدّد بالنقطتين $A(0,f(0)), B(1,f(1))$

مسألة 32: ليكن C الخط البياني للدالة f : $f(x)=\frac{1}{8}x^2-\ln x$ والمطلوب :

1) أوجد مجموعة التعريف D ، ثمّ أوجد كل مقارب للخط C .

2) ادرس تغيرات الدالة f ونظّم جدولاً بها ثمّ دلّ على القيمة الصغرى محلياً.

3) ارسم كلّ مقارب وجدته للخط C ثمّ ارسم C

4) احسب طول القوس من C الموافق للمجال $[1,e]$

5) استنتج رسم الخط C_1 للدالة f_1 المعرفة بالعلاقة $f(x)=-\frac{1}{8}x^2+\ln(-x)$

مسألة 33:

1. حلّ في $\mathbb{R}$ جملة المعادلتين $\begin{cases} x-3y=2\ln 2 \\ x+y=4\ln 2 \end{cases}$

2. إذا كان $I=\int_0^{\ln 16}\frac{e^x+3}{e^x+4}dx$, $J=\int_0^{\ln 16}\frac{1}{e^x+4}dx$ فاحسب $I-3J$, $I+J$ واستنتج قيمة كلٍّ من I , J

مدوّنة ملحوظة

خطة توزيع المنهاج

(أربع حصص أسبوعياً)

الشهر	الأسبوع الأوّل	الأسبوع الثاني	الأسبوع الثالث	الأسبوع الرابع
أيلول			النهايات	النهايات
	الأسبوع الأوّل	الأسبوع الثاني	الأسبوع الثالث	الأسبوع الرابع
تشرين أوّل	الاستمرار	الاشتقاق	الاشتقاق + قاعدة السلسلة	قاعدة السلسلة + تطبيقات الاشتقاق
	الأسبوع الأوّل	الأسبوع الثاني	الأسبوع الثالث	الأسبوع الرابع
تشرين ثاني	تطبيقات الاشتقاق + توظيف المشتقة	توظيف المشتقة + القيم الكبرى والصغرى محلياً	القيم الكبرى والصغرى محلياً	تطبيقات القيم الكبرى والصغرى محلياً
	الأسبوع الأوّل	الأسبوع الثاني	الأسبوع الثالث	الأسبوع الرابع
كانون أول	التكامل غير المحدد	التكامل بالتعويض ـ التكامل بالتجزئة	تكاملات الكسور الجزئية	مراجعة عامة
	الأسبوع الأوّل	الأسبوع الثاني	الأسبوع الثالث	الأسبوع الرابع
كانون ثاني	امتحان الفصل الأول + العطلة الانتصافية			التكامل المحدّد

	الأسبوع الأوّل	الأسبوع الثاني	الأسبوع الثالث	الأسبوع الرابع
شباط	التكامل المحدّد ـ تطبيقات التكامل	تطبيقات التكامل	تطبيقات التكامل المعادلات التفاضلية	المعادلات التفاضلية
	الأسبوع الأوّل	الأسبوع الثاني	الأسبوع الثالث	الأسبوع الرابع
آذار	المستقيمات المقاربة	الدوالّ الكسرية	الدوالّ الكسرية	التمثيل البياني لنماذج من الدوال
	الأسبوع الأوّل	الأسبوع الثاني	الأسبوع الثالث	الأسبوع الرابع
نيسان	التمثيل البياني لنماذج من الدوال	التمثيل البياني لنماذج من الدوال	مسائل عامة	مسائل عامة
	الأسبوع الأوّل	الأسبوع الثاني	الأسبوع الثالث	الأسبوع الرابع
أيار	مسائل عامة	مسائل عامة		

مدوّنة ملحوظة