

Exercice 1. Soient a et b deux nombres réels.

1. Montrer graphiquement que si $a > b > 0$, alors $b^{-1} > a^{-1}$. L'hypothèse $b > 0$ est-elle nécessaire ?
2. Montrer que si $a > b \geq 0$, alors $a^2 > b^2$. L'hypothèse $b \geq 0$ est-elle nécessaire ?

Exercice 2. Les parties de \mathbb{R} suivantes sont-elles minorées, majorées ? Dans chaque cas, déterminer, si elle existe, la borne inférieure, la borne supérieure, et dire s'il s'agit d'un minimum (le plus petit élément) ou d'un maximum (le plus grand élément).

$$A_1 =]0, 1] \cup]2, 4[, \quad A_2 =]-\infty, 5], \quad A_3 = \left\{3 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}, \quad A_4 = \left\{\frac{1}{n} + (-1)^n, n \in \mathbb{N}^*\right\},$$

$$A_5 = \left\{\frac{x+1}{x+2}, x \in]-\infty, -3]\right\}, \quad A_6 = \left\{\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right), n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Exercice 3. Résoudre dans \mathbb{R} les équations et inéquations suivantes :

$$\overset{1}{|x-1|} + \overset{2}{|x-2|} = 2, \quad \overset{3}{|x+12|} = \overset{4}{|x^2-8|}, \quad |x+3| \leq x, \quad \left|\frac{1}{x} - 2\right| \leq 3,$$

$$\sqrt{41-x} + \sqrt{41+x} = 10, \quad \sqrt{2x+3} \geq x.$$

Exercice 4. On note $E(x)$ la partie entière d'un réel x .

$$1. \text{ Évaluer } \overset{2}{E(2)}, \overset{4}{E(-7)}, \overset{3}{E(3,7)}, \overset{-4}{E(-3,7)}, \overset{3}{E(\pi)}, \overset{0}{E(-\frac{3}{8})}, \overset{1}{E(\sqrt{2})}.$$

$$2. \text{ Résoudre } E(x^3 - 1) = -1.$$

$$3. \text{ Montrer que pour tous réels } x \text{ et } y \text{ on a : } E(x) + E(y) \leq E(x+y) \leq E(x) + E(y) + 1.$$

$$4. \text{ Calculer } E(x) + E(-x) \text{ pour } x \text{ réel.}$$

Exercice 5.

$$1. \text{ En utilisant le triangle de Pascal, calculer } \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^5.$$

$$2. \text{ En déduire une linéarisation de } \cos^5 x \text{ et } \sin^5 x. \text{ (linéariser veut dire donner son égale avec une expression linéaire, i.e. de degré 1).}$$

Exercices supplémentaires

Exercice 1. Que peut-on dire des nombres $x + y$ et xy dans les cas suivants ?

1. x et y sont rationnels.
2. x et y sont irrationnels.
3. x est rationnel et y est irrationnel.

Exercice 2. Les ensembles suivants sont-ils majorés ? minorés ? Si oui, déterminer leurs bornes supérieures, leurs bornes inférieures.

$$A = \left\{x \in \mathbb{R}; x^2 < 2\right\}, \quad B = \left\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}, \quad C = \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{p}; (p, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*\right\}.$$

Exercice 3. Soient a, b deux réels strictement positifs. Les parties suivantes sont-elles majorées, minorées ? Si oui, déterminer leurs bornes supérieures, leurs bornes inférieures.

$$A = \{a + bn, n \in \mathbb{N}\}, \quad B = \{a + b/n, n \in \mathbb{N}^*\}, \\ C = \{a + (-1)^n b, n \in \mathbb{N}\}, \quad D = \{a + (-1)^n b/n, n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Exercice 4. Si a et b sont des réels positifs ou nuls, montrer que $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2}\sqrt{a+b}$.

Exercice 5. Montrer que $a = \sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$ est un nombre entier.

Exercice 6. Résoudre dans \mathbb{R} les équations ou inéquations suivantes :

$$1) \sqrt{x^2 - 2x + 6} < \sqrt{2x^2 - x + 4}, \quad 2) \quad 3) 2\sqrt{-x-4} > 9.$$

Exercice 7. Développer $(x+1)^6$, $(x-1)^6$, $(3x+2)^5$.

Exercice 8. Le maximum de deux nombres x, y (c'est-à-dire le plus grand des deux) est noté $\max(x, y)$. De même, on notera $\min(x, y)$ le plus petit des deux nombres x, y .

1. Démontrer que :

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2} \quad \text{et} \quad \min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}$$

2. Trouver une formule pour $\max(x, y, z)$.

Exercice 9. Pour chacune des parties dans $A_i \subset \mathbb{R}$ ci-dessous, déterminer si A_i est majorée, minorée, bornée, si elle admet une borne supérieure, une borne inférieure, un maximum, un minimum (justifier chaque réponse).

$$A_1 = \{1, 2, 3, 7, 12\} \quad A_2 = \mathbb{N}, \quad A_3 = \mathbb{Z}, \quad A_4 = \mathbb{R}, \quad A_5 =]5, 6]$$

$$A_6 = \{3+7q : q \in \mathbb{N}\}, \quad A_7 = \{3-7q : q \in \mathbb{N}\}, \quad A_8 = \left\{\frac{p}{3^n} : p, n \in \mathbb{N}\right\}, \quad A_9 = \left\{\frac{p}{3^n} : p, n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

$$A_{10} = \left\{\frac{n}{mn+1}, (m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*\right\}, \quad A_{11} = \left\{\frac{n}{mn+1}, (m, n) \in \mathbb{N}^2\right\}$$

Exercice 10.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, E(x+1) = E(x) + 1$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, comparer $E(x)$ et $E(-x)$.
3. Montrer que la fonction $x \mapsto E(x)$ est croissante.

Nombres réels =

i.e. c'est à dire

① $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est un corps totalement

ordonné

$(\mathbb{R}, +) \forall x, y \in \mathbb{R}, x+y \in \mathbb{R}$ loi interne,

$x+y = y+x$ loi commutative

$(x+y)+z = x+(y+z)$ loi associative

$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

groupe commutatif neutre = $x+0=0+x=x$

(\mathbb{R}^*, \cdot) groupe commutatif

$$x \cdot (x^{-1}) = 1$$

$$x^{-1} = 1/x$$

② " \leq " est une relation d'ordre total sur \mathbb{R}

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, on peut toujours les comparer (i.e. $x \leq y$ ou $y \leq x$)

" \leq " est compatible avec + :

i.e. $\forall x, y, a \in \mathbb{R}, x \leq y \Rightarrow x+a \leq y+a \Rightarrow$ l'ordre est total

pour qu'elle soit une r.-ordre total

Reflexive = $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x$ vraie

Antisymétrique = $x \leq y$ et $y \leq x \Rightarrow y = x$

Transitive = $x \leq y$ et $y \leq z \Rightarrow x \leq z$

$$\begin{aligned} x+y &= y+x && \text{commutative} \\ x \cdot y &= y \cdot x && \text{commutative} \\ (x+y)+z &= x+(y+z) && \text{associative} \\ (x \cdot y) \cdot z &= x \cdot (y \cdot z) && \text{associative} \\ x+(-x) &= 0 \rightarrow \text{l'opposé, symétrique} \\ x \cdot x^{-1} &= 1/x \end{aligned}$$

Exercice 0.1 =

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad a > b > 0 &\Rightarrow b^{-1} > a^{-1} \\ a > b &\Rightarrow ab^{-1} > b \cdot b^{-1} \quad (\text{car } b^{-1} > 0) \\ &\quad ab^{-1} > 1 \\ &\quad a^{-1}(a \cdot b^{-1}) > a^{-1} \cdot 1 \quad (a^{-1} > 0 \text{ car } a > 0) \\ &\quad (a^{-1} \cdot a) b^{-1} > a^{-1} \quad (\text{car } \cdot \text{ est associative}) \\ &\quad b^{-1} > a^{-1} \end{aligned}$$

$b > 0$ est nécessaire.

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad a > b > 0 &\Rightarrow a^2 > b^2 \\ \text{ma} = a > b &\Rightarrow a \cdot b > b^2 \quad \textcircled{1} \\ a > b &\Rightarrow a^2 > ab \quad \textcircled{2} \end{aligned}$$

d'après ① et ② $\text{ma} = a^2 > b^2$ car " $>$ " est transitive

Exercice 03: Résoudre dans \mathbb{R} : $|x-1| + |x-2| = 2$

1

	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$ x-1 $	$1-x$	0	$x-1$	$x-1$
$ x-2 $	$2-x$	$2-x$	0	$x-2$
$ x-1 + x-2 $	$3-2x$	1	$2x-3$	

$3-2x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$
pas de solution
 $2x-3 = 2 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

Donc l'ensemble des solutions est $\{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\}$

3. $|x+3| \leq x \iff |x+3| - x \leq 0$

	$-\infty$	-3	$+\infty$
x	x		x
$ x+3 $	$-x-3$	0	$x+3$
$ x+3 - x$	$-2x-3$		3
$ x+3 - x \leq 0$	$-2x-3 \leq 0 \Rightarrow 2x \geq -3, 0$ $x \geq -\frac{3}{2}$		\emptyset

alors $S = [-\frac{3}{2}, +\infty[$

$$\textcircled{4} \quad \left| \frac{1}{x} - 2 \right| < 3 \quad (x \neq 0)$$

$$\left| \frac{1-2x}{x} \right| < 3 \Leftrightarrow |1-2x| < 3|x|$$

$$\Rightarrow |1-2x| - 3|x| < 0$$

	$-\infty$	0	$1/2$	$+\infty$
$ 1-2x $	$2x-1$	$2x-1$	$1-2x$	$1-2x$
$3 x $	$-3x$	$3x$	$3x$	$3x$
$ 1-2x - 3 x $	$5x-1$	$-x-1$	$1-5x$	

$$]0, 1/5] \quad x < 1/5 \quad [-1, +\infty[\quad x > 1/2 \quad]1/2, +\infty[\quad x > 1/5$$

$$E =]-\infty, 0] \cup [0, 1/2] \cup [1/5, +\infty[$$

Donc l'ensemble des solutions est $E =]-\infty, 1/2] \cup [1/5, +\infty[$

$$\text{II. } \textcircled{1} \quad \left(\sqrt{41-x} + \sqrt{41+x} \right) = 10$$

$$\left(\sqrt{41-x} + \sqrt{41+x} \right)^2 = 10^2$$

$$(41-x) + (41+x) + 2\sqrt{41-x} \cdot \sqrt{41+x} = 100$$

$$2\sqrt{(41)^2 - x^2} = 18$$

$$\sqrt{(41)^2 - x^2} = 9 \Rightarrow (41)^2 - x^2 = 81$$

$$1680 - x^2 = 0$$

$$(40-x)(40+x) = 0$$

$$x = 40 \quad x = -40$$

$$(2) \sqrt{2x+3} \geq x$$

$$(\sqrt{2x+3})^2 \geq x^2$$

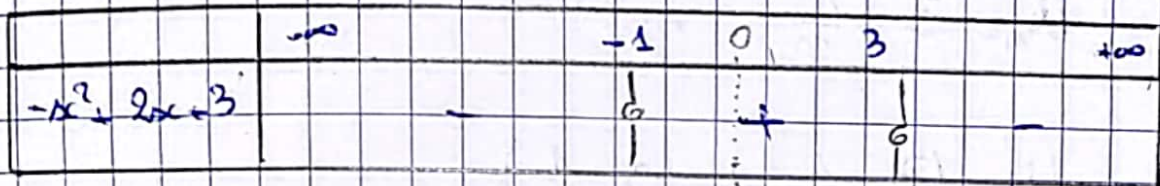
$$(x \geq 0)$$

$$2x+3 \geq x^2$$

$$-x^2 + 2x + 3 \geq 0$$

$$\Delta = 16$$

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$



Donc l'ensemble de solutions $S = [-1, 3] \cap [0, +\infty[$
 $S = [0, 3]$

Exercice 02 :

$$* A_1 =]0, 1] \cup]2, 4[$$

$$\text{Sup}(A \cup B) = \max(\text{Sup } A, \text{Sup } B)$$

$$\text{Inf}(A \cup B) = \min(\text{Inf } A, \text{Inf } B)$$

$$\text{Sup}(A_1) = \text{Sup }]0, 1] = 1$$

$$\text{Inf}(A_1) = \text{Inf }]0, 1] = 0$$

$$\text{Sup } A_1 = \max(1, 4) = 4$$

$$\text{Inf } A_1 = \min(2, 0) = 0$$

Sup : plus petit E_{\max}

Inf : plus grand E_{\min}

minorant : $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A$
 $x \geq m$

majorant : si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A$
 $x \leq M$

* $A_2 =]-\infty, 5]$

A_2 n'est pas minoré

A_2 est majoré par tous les éléments de $[5, +\infty[$ de plus

$\text{Sup} A_2 = 5$

* $A_3 = \left\{ 3 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\} = \{ u_n, n \in \mathbb{N}^* \}$

on pose $u_n = 3 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(3 - \frac{1}{n+1} \right) - \left(3 - \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} \end{aligned}$$

$\Rightarrow (u_n)$ est croissante

$u_1 = 2 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 3 \Rightarrow \inf A = 2$

* $A_5 = \left\{ \frac{x+1}{x+2}, x \in]-\infty, 3] \right\}$

$A = \{ f(x), x \in I \}$

f est défini sur I

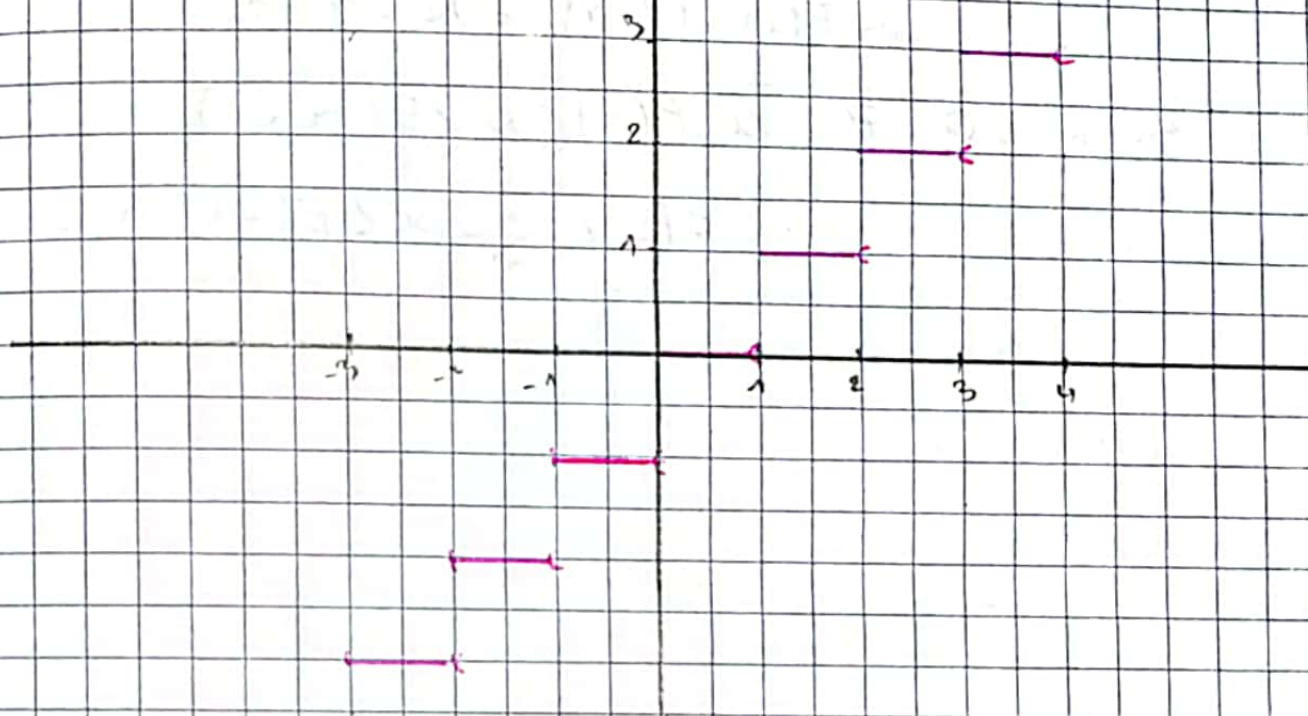
$f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2} > 0$ Donc $f \nearrow$

$\inf A = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

$\text{Sup} A = f(3) = 2$

$f(x), x \in I$
 f est définie sur I
 * Étude de f, f'
 $f \nearrow$
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = \inf A$
 $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = f(b) = \sup A$

Exercice 04 :



1).

$$E(2) = 2$$

$$E(\sqrt{2}) = 1$$

$$E(-7) = -7$$

$$E(0,22) = 0$$

$$E(3,7) = 3$$

$$E(\pi) = 3$$

$$E(-3,7) = -4$$

$$E(-3/8) = -1$$

2) Résoudre $E(x^3 - 1) = -1$

$$E(y) = a \Leftrightarrow E(y) \leq y < E(y) + 1$$

$$a \leq y < a + 1$$

$$\text{si } y = x^3 - 1, a = -1$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq x^3 - 1 < -1 + 1$$

$$\Rightarrow x \in [0, 1[$$

$$-1 \leq x^3 - 1 < 0 \Rightarrow 0 \leq x < 1$$

④ calculer $E(x) + E(-x)$, $x \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

si $x \in \mathbb{Z}$, $E(x) = x$ et $E(-x) = -x$

$$\Rightarrow E(x) + E(-x) = x - x = 0$$

si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et $E(x) \leq x < E(x) + 1$,

$$E(-x) \leq -x < E(-x) + 1$$

$$E(x) + E(-x) \leq 0 < E(x) + E(-x) + 2$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$